

ДЛЯ ВЫСШИХ  
УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

В.М. Шибинский

# ПРИМЕРЫ И КОНТРПРИМЕРЫ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА



$$f(x, y) = D(x+y)$$

МАТЕМАТИКА



ПРИМЕРЫ И КОНТРПРИМЕРЫ  
В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В.М. Шибинский

---

# Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа

---



Москва «Высшая школа» 2007

УДК 51  
ББК 22.16  
Ш 55

Издано при финансовой поддержке Федерального агентства по печати  
и массовым коммуникациям в рамках  
Федеральной целевой программы «Культура России»

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра математического анализа ПГУ им. М.В. Ломоносова (зав. кафедрой канд. физ.-мат. наук, доцент *Б.М. Постников*); зав. кафедрой математики канд. физ.-мат. наук, проф. *А.Д. Романов* (филиал «Севмашвуз» СПбГМТУ)

**Шибинский В.М.**

Ш 55 Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа: Учеб. пособие/В.М. Шибинский. — М.: Высш. шк., 2007. — 543 с.: ил.

ISBN 978-5-06-005774-4

В пособии систематизированы разработанные автором примеры и контрпримеры к основным определениям, теоремам, правилам, признакам и другим положениям из курса математического анализа.

Пособие позволит студентам университетов и вузов глубже усвоить содержание, смысл и применимость понятий и положений математического анализа и сделает его преподавание и изучение интересным, творческим процессом. Примеры и контрпримеры могут быть использованы преподавателями на лекциях и практических занятиях по математическому анализу, а также составить содержание специального курса.

*Для студентов-математиков, аспирантов и преподавателей вузов.*

УДК 51  
ББК 22.16

ISBN 978-5-06-005774-4

© ОАО «Издательство «Высшая школа», 2007

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                         |    |
|---------------------------------------------------------|----|
| Предисловие.....                                        | 6  |
| 1. Функции одной переменной.....                        | 9  |
| 1.1. Последовательность, предел последовательности..... | 9  |
| 1.2. Предел функции, теоремы о пределах.....            | 16 |
| Упражнения.....                                         | 21 |
| 2. Непрерывные функции одной переменной.....            | 22 |
| 2.1. Непрерывность функции.....                         | 22 |
| 2.2. Теоремы о непрерывных функциях.....                | 27 |
| Упражнения.....                                         | 33 |
| 3. Дифференцируемые функции одной переменной.....       | 34 |
| 3.1. Производная.....                                   | 34 |
| 3.2. Дифференциал.....                                  | 42 |
| 3.3. Производные высших порядков.....                   | 44 |
| Упражнения.....                                         | 45 |
| 4. Теоремы о дифференцируемых функциях.....             | 47 |
| 4.1. Теоремы Ферма и Дарбу.....                         | 47 |
| 4.2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.....                | 51 |
| Упражнения.....                                         | 57 |
| 5. Исследование функций с помощью производных.....      | 58 |
| 5.1. Изменения функции, экстремумы.....                 | 58 |
| 5.2. Наибольшее и наименьшее значения функции.....      | 68 |
| 5.3. Выпуклость функции, точки перегиба.....            | 71 |
| 5.4. Раскрытие неопределенностей.....                   | 78 |
| Упражнения.....                                         | 82 |
| 6. Функции нескольких переменных.....                   | 83 |
| 6.1. Предел функции.....                                | 83 |
| 6.2. Непрерывность функции.....                         | 88 |
| Упражнения.....                                         | 93 |

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7. Дифференцируемые функции нескольких переменных.....                 | 94  |
| 7.1. Частные производные, дифференцируемость, полный дифференциал..... | 94  |
| 7.2. Частные производные высших порядков.....                          | 112 |
| 7.3. Экстремумы, наибольшие и наименьшие значения.....                 | 115 |
| 7.4. Неявные функции, производные неявных функций.....                 | 123 |
| Упражнения.....                                                        | 137 |
| 8. Первообразная функция и определенный интеграл.....                  | 138 |
| 8.1. Первообразная и неопределенный интеграл.....                      | 138 |
| 8.2. Определение и существование определенного интеграла.....          | 141 |
| 8.3. Свойства определенного интеграла.....                             | 150 |
| 8.4. Вычисление определенных интегралов.....                           | 156 |
| Упражнения.....                                                        | 163 |
| 9. Геометрические приложения интегрального исчисления.....             | 165 |
| 9.1. Площадь фигуры.....                                               | 165 |
| 9.2. Объем тела.....                                                   | 185 |
| 9.3. Длина кривой.....                                                 | 199 |
| Упражнения.....                                                        | 206 |
| 10. Числовые ряды.....                                                 | 207 |
| 10.1. Основные свойства сходящихся рядов.....                          | 207 |
| 10.2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.....                 | 210 |
| 10.3. Сходимость произвольных рядов.....                               | 230 |
| 10.4. Теоремы о сходящихся рядах.....                                  | 236 |
| 10.5. Бесконечные произведения.....                                    | 241 |
| Упражнения.....                                                        | 246 |
| 11. Функциональные последовательности и ряды.....                      | 247 |
| 11.1. Равномерная сходимость последовательности и ряда.....            | 247 |
| 11.2. Свойства предельной функции последовательности и суммы ряда..... | 261 |
| 11.3. Степенные ряды.....                                              | 287 |
| Упражнения.....                                                        | 299 |
| 12. Несобственные интегралы.....                                       | 301 |
| 12.1. Несобственные интегралы на бесконечных промежутках.....          | 301 |
| 12.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций.....           | 315 |

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| 12.3. Преобразование несобственных интегралов.....                | 324 |
| Упражнения.....                                                   | 332 |
| 13. Интегралы, зависящие от параметра.....                        | 334 |
| 13.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра.....          | 334 |
| 13.2. Равномерная сходимость интегралов.....                      | 349 |
| 13.3. Свойства равномерно сходящихся интегралов.....              | 366 |
| Упражнения.....                                                   | 385 |
| 14. Криволинейные интегралы.....                                  | 387 |
| 14.1. Криволинейные интегралы первого рода.....                   | 387 |
| 14.2. Криволинейные интегралы второго рода.....                   | 398 |
| Упражнения.....                                                   | 421 |
| 15. Двойные интегралы.....                                        | 422 |
| 15.1. Определение и свойства двойных интегралов.....              | 422 |
| 15.2. Переход от двойного интеграла к повторному.....             | 430 |
| 15.3. Формула Грина.....                                          | 436 |
| 15.4. Замена переменных в двойных интегралах.....                 | 440 |
| Упражнения.....                                                   | 446 |
| 16. Площадь поверхности, поверхностные интегралы.....             | 447 |
| 16.1. Двусторонние поверхности.....                               | 447 |
| 16.2. Площадь поверхности.....                                    | 456 |
| 16.3. Поверхностные интегралы первого рода.....                   | 465 |
| 16.4. Поверхностные интегралы второго рода.....                   | 470 |
| Упражнения.....                                                   | 480 |
| 17. Тройные интегралы.....                                        | 482 |
| 17.1. Определение и свойства тройных интегралов.....              | 482 |
| 17.2. Переход от тройного интеграла к повторному.....             | 486 |
| 17.3. Формула Гаусса–Остроградского.....                          | 492 |
| 17.4. Замена переменных в тройных интегралах.....                 | 497 |
| Упражнения.....                                                   | 501 |
| 18. Дополнение. Некоторые примеры функций.....                    | 503 |
| 18.1. Примеры разрывных и непрерывных функций.....                | 503 |
| 18.2. Примеры несуществования и существования<br>производной..... | 508 |
| 18.3. Фракталы и построение примеров функций.....                 | 516 |
| Ответы.....                                                       | 528 |
| Список литературы.....                                            | 532 |
| Указатель избранных примеров и контрпримеров.....                 | 533 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Крылатые выражения: «учиться на примерах», «сила примера» имеют не только житейский смысл. Слово «пример» является одно-коренным со словами «мера», «мерить», «измерить», но не только поэтому присутствует в математике с самих ее начал. Пример иллюстрирует понятие, помогает уяснить его смысл, подтверждает истинность утверждения в его частном проявлении; контрпример, опровергая ложное утверждение, имеет доказательную силу. Особенностью многих примеров и контрпримеров в математике является их эффективность: простой пример может привести к пониманию сложной истины, простой контрпример способен перечеркнуть нетривиальные рассуждения, гипотезы и заблуждения. Казалось бы, примеры и контрпримеры должны стать эффективным инструментом в руках (точнее в умах) преподавателей и студентов, усилить учебный процесс. Однако перегруженность учебных программ, ограниченность лекционного и семинарского времени привели не к лучшей традиции: излагать материал в сжатой и канонизированной форме. Сделать, используя примеры и контрпримеры, «шаг влево – шаг вправо», ответить на возникающие при обучении качественные вопросы, дотошно выяснить границы применимости понятий, теорем, правил и методов уже не хватает времени.

Данное учебное пособие призвано помочь преподавателям и студентам выйти за рамки упомянутой традиции, оно посвящено примерам и контрпримерам в курсе математического анализа.

**Структура и содержание пособия.** Последовательность изложения и объем материала в основном соответствуют традиционному курсу математического анализа, изучаемого в университетах, педагогических и технических вузах с углубленным преподаванием математики.

Последовательно, по разделам математического анализа для определений и утверждений (лемм, теорем, свойств, правил и т.п.) выполняется следующее:

- 1) приводится формулировка определения или утверждения;
- 2) следует комментарий к определению или утверждению, в котором намечается иллюстративный пример или контрпример;

3) строится соответствующий пример (контрпример) с необходимыми доказательствами.

При этом п. 2 и 3, относящиеся к некоторому определению (утверждению), могут быть многочисленны.

В конце разделов помещены упражнения, в основном на построение примеров и контрпримеров. К упражнениям даются ответы. Конечно, составить пример или контрпример можно многими способами. Ответы подтверждают существование хотя бы одного решения и могут служить подсказками.

В дополнении (разд. 18) даны более сложные примеры функций, имеющих нетривиальные свойства. О существовании такого рода функций говорится в некоторых учебниках, но их примеры читатели могут найти только в монографии [1], которая стала библиографической редкостью, или в труднодоступных журнальных публикациях. Исключением служат помещенные в некоторых учебниках примеры Вейерштрасса и Ван-дер-Вардена всюду непрерывных функций, нигде не имеющих производной. Пример такой функции дан в дополнении, ее график имеет фрактальную структуру и, в отличие от классических примеров, график этой функции можно видеть. Этот пример доступен сразу после знакомства с понятием производной, не надо дожидаться знакомства с равномерно сходящимися функциональными рядами, которые используются при построении названных классических примеров.

В конце книги дается указатель избранных примеров и контрпримеров, который упрощает поиск и может, в некотором смысле, служить задачиком, так как в названиях примеров (контрпримеров) часто содержится информация, достаточная для их построения. В указателе ссылки на примеры и контрпримеры часто группируются, поэтому наряду с номерами страниц даются и номера примеров и контрпримеров.

Приводимые иллюстративные примеры по возможности наиболее адекватны определениям и утверждениям, так как не содержат избыточных предположений. Контрпримеры либо демонстрируют ограниченность действия определения или правила; либо опровергают ошибочное утверждение, полученное, например, отбрасыванием отдельных предположений исходного утверждения или его обращением; либо показывают только достаточность или только необходимость предположений в утверждении.

Заметим, что содержание настоящего пособия, вопреки желанию автора, не всегда непрерывно охватывает курс математического анализа. Отдельные определения и теоремы не допускают интересных (содержательных) контрпримеров. Иногда уже построенные контрпримеры не отвечали вкусу автора, некоторые возможные контрпримеры, вероятно, не удалось разглядеть, в малом числе случаев их не удалось придумать.



Примеры и контрпримеры сознательно выполнены максимально простыми. «Выхолощенность» многих примеров может быть легко исправлена. Так, пример функции, имеющей производную (нулевую) только в одной точке (нулевой), может быть легко модифицирован в аналогичный пример, но уже производная будет существовать только в одной любой заданной точке и иметь любое заданное значение. Это достигается сдвигом аргумента на константу и прибавлением к построенной функции «хорошей», всюду дифференцируемой, функции, имеющей заданное значение производной в заданной точке.

Если пример (контрпример) заимствуется, делается ссылка на источник. Когда пример встречается во многих источниках, а авторство его неизвестно, то на него дается ссылка как на известный пример. Такие примеры можно встретить в монографии [1], известных учебниках [2]–[4] и в некоторых сборниках задач, например в популярном задачнике [5].

**Рекомендации по работе с пособием.** Как правило, контрпримеры построены с использованием уже пройденного материала, но в некоторых из них приходится применять понятия и теоремы из последующих разделов курса (такова специфика контрпримеров – вспомним упомянутые функции Вейерштрасса и Ван-дер-Вардена). Такие контрпримеры (они помечены звездочкой) можно пропускать или для их понимания надо знакомиться с соответствующими главами [2]–[4], [6] или других книг. Не все используемые в примерах понятия определяются и описываются в пособии, это невозможно сделать в рамках данной книги, однако для читателей в тексте даются ссылки на соответствующие книги с указанием страниц.

Рекомендуется иметь перед собой лист бумаги и рисовать графики функций из примеров и контрпримеров, они (графики), как правило, простые. Это значительно облегчит понимание материала.

Полезно при чтении данного пособия параллельное знакомство с другими примерами и контрпримерами из соответствующих разделов монографии [1].

**Применения пособия.** Построенные примеры и контрпримеры могут выборочно использоваться преподавателями на лекциях и практических занятиях по математическому анализу, а в целом пособие может составлять содержание отдельного предмета по выбору для студентов старших курсов.

Прошу читателей посылать свои замечания и предложения через мой сайт <http://vladimir.shibinsky.ru/>.

*Автор*

## РАЗДЕЛ I

# ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 1.1. Последовательность, предел последовательности

**Определение предела последовательности.** Число  $a$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что для всех  $x_n$ ,  $n > N$ , выполняется неравенство  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

Использование в неравенстве  $|x_n - a| < \varepsilon$  величины  $|x_n - a|$ , т.е. расстояния от точки  $x_n$  до фиксированной точки  $a$ , допускает различные «способы» стремления членов последовательности  $\{x_n\}$  к пределу. Приведем примеры.

**1.1. Различные последовательности, имеющие предел.** Рассмотрим последовательности  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$ ,  $\{u_n\}$ :  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $y_n = \frac{3}{n}$ ,  $z_n = -\frac{1}{n}$ ,  $u_n = -\frac{3}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , каждая из которых имеет пределом нуль. Но стремление членов этих последовательностей к нулю различно: переменные  $x_n = \frac{1}{n}$  и  $y_n = \frac{3}{n}$  остаются больше нуля, а переменные  $z_n = -\frac{1}{n}$  и  $u_n = -\frac{3}{n}$  остаются меньше нуля, при этом переменные  $x_n$  и  $z_n$  стремятся к нулю «быстрее» переменных  $y_n$  и  $u_n$ . Построим последовательность  $\{v_n\}$ , чередуя члены последовательностей  $\{z_n\}$  и  $\{x_n\}$ , получим  $v_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (рис. 1.1, а). Переменная  $v_n$  стремится к нулю, становясь периодически то меньше, то больше нуля. Чередуя члены последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , построим последовательность  $\{s_n\}$ ,  $s_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (рис. 1.1, б). Переменная  $s_n$  при стремлении к нулю пе-

риодически то приближается, то удаляется от нуля. Если чередовать члены последовательностей  $\{x_n\}$ ,  $\{y_n\}$ ,  $\{z_n\}$  и  $\{u_n\}$ , то получим последовательность  $\{q_n\}$  (рис. 1.1, в). При стремлении к нулю переменная  $q_n$  периодически то приближается, то удаляется от нуля, меняя знак через каждые два члена.

**1.2. Последовательность, не имеющая предела.** Последовательность  $\{x_n\}$ ,  $x_n = (-1)^n$ , не имеет предела (рис. 1.1, г). Предположим, что предел существует и равен некоторому числу  $a$ . Тогда

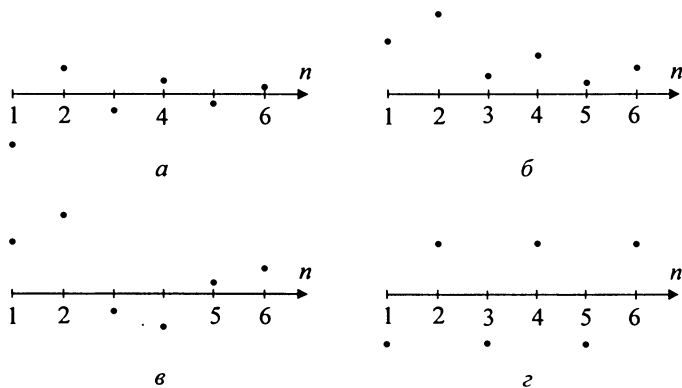


Рис. 1.1

для любого  $\varepsilon > 0$ , а значит и для  $0 < \varepsilon < 1$ , существует номер  $N$  такой, что для всех  $n > N$  выполняется  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Отсюда и  $|x_{n+1} - a| < \varepsilon$ . Следовательно,  $|x_{n+1} - x_n| < 2\varepsilon < 2$ . Но модуль разности между любыми двумя соседними членами последовательности равен двум. Получаем противоречие, предел не существует.

**Теорема об ограниченности последовательности, имеющей предел.** Последовательность  $\{x_n\}$ , имеющая конечный предел, является ограниченной.

Обратное утверждение: ограниченная последовательность имеет предел, опровергается следующим контрпримером.

**1.3. Ограниченная последовательность, не имеющая предела.** Последовательность  $x_n = (-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ограничена, так как выполняется  $|x_n| \leq 1$ , но не имеет предела.

**Предельный переход в неравенстве.** Если для последовательностей  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  существует номер  $N$  такой, что для всех  $n > N$  справедливо не-

равенство  $x_n \geq y_n$ , и существуют конечные пределы:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то выполняется  $a \geq b$ .

Аналогичное утверждение для случая строгих неравенств  $x_n > y_n$  и  $a > b$  опровергается следующим контрпримером.

**1.4. Последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ , такие, что  $x_n > y_n$ , но  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .** Пусть  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $y_n = \frac{1}{n+1}$ , тогда выполняется при всех  $n$   $x_n > y_n$ , однако  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ .

**Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , то последовательность  $\{x_n\}$  называется бесконечно малой. Сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей это также бесконечно малая последовательность.

Покажем сначала, что требование конечности числа бесконечно малых последовательностей не является необходимым для бесконечной малости их суммы.

**1.5\*. Счетное множество бесконечно малых последовательностей, сумма которых – бесконечно малая последовательность.** Пусть бесконечно малые последовательности заданы в виде  $\alpha_k = \frac{1}{n2^k}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , тогда их сумма

$$\beta = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1/2}{1-1/2} = \frac{1}{n}$$

также является бесконечно малой последовательностью. Суммирование выполнено по формуле для суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. Вынесение постоянного множителя  $\frac{1}{n}$  за знак суммы бесконечного числа слагаемых выполнено в соответствии со свойствами сходящегося числового ряда, [2], т. II, с. 14.

Однако, сняв в утверждении условие конечности числа бесконечно малых последовательностей, мы получим неверное утверждение. Контрпример.

**1.6\*. Счетное множество бесконечно малых последовательностей, сумма которых не определена.** Пусть бесконечно малые последовательности заданы в виде  $\alpha_k = \frac{k}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

тогда их сумма  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$  не является последовательностью бесконечно

малой, более того, она не определена, так как при любом  $n$  сумма  $\sum_{k=1}^m \frac{k}{n}$  неограниченно увеличивается при неограниченном увеличении числа слагаемых  $m$ .

**Произведение последовательности ограниченной на бесконечно малую последовательность.** Произведение  $\{x_n \alpha_n\}$  ограниченной последовательности  $\{x_n\}$  на бесконечно малую последовательность  $\{\alpha_n\}$  есть бесконечно малая последовательность.

Предположение об ограниченности последовательности  $\{x_n\}$  является достаточным, но не является необходимым для бесконечной малости произведения  $\{x_n \alpha_n\}$ . Контрпример.

**1.7. Неограниченная и бесконечно малая последовательности, произведение которых – последовательность бесконечно малая.** Пусть  $x_n = n$ ,  $\alpha_n = \frac{1}{n^2}$ . Последовательность  $\{x_n\}$  является неограниченной, однако произведение ее на бесконечно малую последовательность  $\{\alpha_n\}$  является последовательностью бесконечно малой, так как  $x_n \alpha_n = \frac{1}{n}$ .

Однако удалить из утверждения предположение об ограниченности последовательности  $\{x_n\}$  нельзя. Контрпример.

**1.8. Неограниченная и бесконечно малая последовательности, произведение которых – неограниченная последовательность.** Пусть  $x_n = n^2$ ,  $\alpha_n = \frac{1}{n}$ . Последовательность  $\{x_n\}$  является неограниченной, произведение ее на бесконечно малую последовательность  $\{\alpha_n\}$  является бесконечно большой последовательностью, так как  $x_n \alpha_n = n$ .

**Пределы суммы, разности, произведения и отношения последовательностей.** Если последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  имеют конечные пределы,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ , то их сумма, разность, произведение и отношение также имеют конечные пределы (в последнем случае  $b$  и  $y_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , отличны от нуля), и выполняется:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = a - b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ .

Существование конечных пределов последовательностей только доста-

точно для существования конечных пределов суммы, разности, произведения и отношения этих последовательностей. Приведем контрпримеры.

**1.9, 1.10. Расходящиеся последовательности, сумма, разность, произведение и отношение которых сходятся.** Последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  с общими членами

$$x_n = (-1)^n, \quad y_n = (-1)^{n+1} \quad (1.1)$$

не имеют пределов, однако их сумма имеет предел, равный нулю, а их произведение и отношение имеют пределы, равные  $-1$ .

Заметим, что разность этих последовательностей не имеет предела. Но если вместо последовательностей (1.1) рассмотреть совпадающие последовательности  $x_n = (-1)^n$ ,  $y_n = (-1)^n$ , то их разность будет иметь равный нулю предел.

**Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности.** Если монотонно возрастающая последовательность  $\{x_n\}$  ограничена сверху, т.е.  $x_n \leq M$ , где  $M = \text{const}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то имеет конечный предел, если она не ограничена сверху, то имеет предел, равный  $+\infty$ . Аналогично имеет предел и монотонно убывающая последовательность  $\{x_n\}$ . Этот предел конечен, если она ограничена снизу, иначе ее предел равен  $-\infty$ .

Условие монотонности ограниченной последовательности является достаточным, но не является необходимым условием ее сходимости. Приведем контрпример.

**1.11. Немонотонная сходящаяся последовательность.** Последовательность  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , ограничена,  $|x_n| \leq 1$ . Она сходится,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ , но не является монотонной.

**Теорема о вложенных отрезках.** Имеется бесконечная последовательность отрезков  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$ , ...,  $[a_n, b_n]$ , ... таких, что каждый последующий содержится в предыдущем, при этом  $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ , т.е. длина отрезков стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда концы  $a_n$  и  $b_n$  отрезков стремятся к общему пределу  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , и точка  $c$  является единственной общей точкой всех отрезков данной последовательности.

Вместо замкнутых промежутков (отрезков) рассмотрим в теореме промежутки незамкнутые, тогда получим ложное утверждение, опровергаемое следующим известным контрпримером.

**1.12. Бесконечная последовательность вложенных незамкнутых промежутков, не имеющих общей точки.** Рассмотрим бес-

конечную последовательность вложенных полуинтервалов  $(0, 1]$ ,  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ , ...,  $\left(0, \frac{1}{n}\right]$ , ... Длина этих полуинтервалов стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , однако у них нет общей точки.

**Теорема о пределе подпоследовательности.** Если последовательность имеет предел  $a$  (конечный или нет), то такой же предел имеет любая ее подпоследовательность.

У сходящейся последовательности существует только один предел, а каким может быть множество частичных пределов у расходящейся последовательности? Построим несколько примеров.

**1.13. Последовательность с любым конечным, заранее заданным множеством частичных пределов.** Последовательность  $1, 2, 1, 2, \dots$  имеет два частичных предела 1 и 2, соответствующие подпоследовательностям  $1, 1, \dots$  и  $2, 2, \dots$ . Последовательность  $1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$  имеет три частичных предела 1, 2, 3. Аналогично можно построить последовательность с любым конечным, заранее заданным множеством частичных пределов.

**1.14. Последовательность, частичные пределы которой – все целые числа.** У последовательности  $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots$  частичные пределы – все натуральные числа, так как для любого натурального  $m$  она содержит подпоследовательность  $m, m, \dots$ . По аналогичной схеме строится последовательность

$$0, 1, -1, 0, 1, -1, 2, -2, 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots,$$

для которой частичными пределами являются все целые числа.

**1.15. Последовательность, частичные пределы которой – все числа из отрезка  $[0, 1]$ .** Построенная из конечных десятичных дробей последовательность

$$0,1; 0,2; \dots; 0,9; 0,01; 0,02; \dots; 0,99; 0,001; 0,002; \dots; 0,999; \dots \quad (1.2)$$

содержит подпоследовательности, имеющие своим пределом любое заданное действительное число на отрезке  $[0, 1]$ . Покажем это. Последовательность (1.2) составлена из следующих друг за другом серий: записаны все меньшие единицы десятые доли, сотые доли, тысячные доли и т.д. Рассмотрим произвольное действительное число  $a$ ,  $a \in [0, 1]$ . В серии с номером  $m$ , содержащей числа

$$\frac{1}{10^m}, \frac{2}{10^m}, \frac{3}{10^m}, \dots, \frac{10^m - 1}{10^m},$$

очевидно, найдется некоторое число

$$\frac{k}{10^m}, \text{ где } k < 10^m - \text{натуральное, для которого } \left| a - \frac{k}{10^m} \right| \leq \frac{1}{10^m},$$

где равенство выполняется только для  $a = 0$  или 1. Заметим также, что

каждая последующая серия содержит все числа предыдущей серии. Выписывая из последовательных серий с номерами  $m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , члены последовательности (1.2), которые отличаются от числа  $a$  по абсолютной величине не более чем на  $\frac{1}{10^m}$ , получим подпоследовательность, сходящуюся к числу  $a$ .

**1.16. Последовательность, частичные пределы которой – все действительные числа.** Изложенное выше построение можно несколько обобщить, а именно записать последовательность

$$0,1; 0,2; \dots; 0,9; 0,01; 0,02; \dots; 1,99; 0,001; 0,002; \dots; 2,999; \dots, \quad (1.3)$$

для которой уже любое неотрицательное действительное число является частичным пределом. От последовательности (1.2) она отличается тем, что первая серия составлена из всех десятых долей, меньших единицы, вторая – из всех сотых долей, меньших двух, третья – из всех тысячных долей, меньших трех, и т.д. Рассмотрим произвольное действительное число  $a$ ,  $a \in [0, +\infty)$ . Пусть  $m_0$  – некоторое натуральное число,  $m_0 > a$ , тогда построение подпоследовательности, сходящейся к действительному числу  $a$ , начнем с серии, имеющей номер  $m_0$  (заметим, что и в этом случае каждая последующая серия содержит все числа предыдущей серии). В остальном процедура построения подпоследовательности выполняется дословно аналогично предыдущему случаю.

Наконец, если после каждого члена последовательности (1.3) вписать член с противоположным знаком, то получим последовательность, которая содержит подпоследовательности, сходящиеся к любому заданному действительному числу  $a$ ,  $a \in (-\infty, +\infty)$ .

**Теорема Больцано – Вейерштрасса.** Из любой ограниченной последовательности можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к конечному пределу.

Если снять условие ограниченности последовательности, то подпоследовательности, сходящейся к конечному пределу, может не быть. Контрпример.

**1.17. Неограниченная последовательность, не имеющая конечных частичных пределов.** Такой является, например, последовательность  $-1, 2, -3, \dots, (-1)^n n, \dots$

Однако существуют неограниченные последовательности, которые имеют подпоследовательности с конечными пределами.

**1.18. Неограниченная последовательность, имеющая конечный частичный предел.** Последовательность  $1, \frac{1}{1}, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}, \dots$  не-



ограниченна, но содержит подпоследовательность (из членов с четными номерами), которая имеет предел, равный нулю.

**Критерий Коши сходимости последовательности.** Для существования у последовательности  $\{x_n\}$  конечного предела необходимо и достаточно, чтобы для любого числа  $\varepsilon > 0$  существовал такой номер  $N$ , чтобы неравенство  $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$  выполнялось для всех  $n > N$ ,  $n' > N$ .

Сформулируем более сильное утверждение, потребовав выполнения неравенства  $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$  не для всех  $n > N$ ,  $n' > N$ , а только для тех из них, для которых  $|n - n'| \leq m$ , где  $m$  – произвольное натуральное число. Контрпример.

**1.19. Расходящаяся последовательность, для которой абсолютная величина разности ее членов, с номерами, отличающимися на константу, стремится к нулю при стремлении их номеров к бесконечности.** Рассмотрим расходящуюся последовательность:

$$\ln 1, \ln 2, \dots, \ln n, \dots \quad (1.4)$$

Пусть  $n > n'$  и  $n - n' = k \leq m$ , где  $m = \text{const}$ , тогда

$$|x_n - x_{n'}| = \ln n - \ln n' = \ln \frac{n}{n'} = \ln \frac{n' + k}{n'}. \quad (1.5)$$

Так как  $\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n' + k}{n'} = 1$ , то предел правой части (1.5) при  $n' \rightarrow \infty$  равен нулю. Отсюда для любого  $\varepsilon > 0$  существует такой номер  $N$ , что  $|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$  для всех  $n > N$ ,  $n' > N$ ,  $|n - n'| = k \leq m$ . Однако последовательность (1.4) не имеет конечного предела ввиду неограниченного возрастания функции  $\ln x$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

## 1.2. Предел функции, теоремы о пределах

**Определение предела функции.** Рассмотрим  $X$  – множество (ограниченное или нет) определения функции  $f(x)$ . Пусть точка  $a$  – предельная точка множества  $X$ ,  $a$  может не принадлежать  $X$ ,  $a$  – конечное число, или равно  $-\infty$ , или  $+\infty$ . Пусть также  $A$  – некоторое конечное число, или равно  $-\infty$ , или  $+\infty$ .

Если  $a$  и  $A$  – конечные числа, то функция  $f(x)$  имеет предел  $A$  при стремлении  $x$  к  $a$ , если для каждого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что  $|f(x) - A| < \varepsilon$  для всех  $x \in X$ , таких, что  $0 < |x - a| < \delta$ .

Если  $a = +\infty$ ,  $A$  – конечное число (или  $+\infty$ ), то функция  $f(x)$  имеет предел  $A$  при стремлении  $x$  к  $+\infty$ , если для каждого числа  $\varepsilon > 0$  ( $E > 0$ ) найдется такое число  $\Delta > 0$ , что  $|f(x) - A| < \varepsilon$  ( $f(x) > E$ ) для всех  $x \in X$ , таких, что  $x > \Delta$ .

Определения в других случаях конечных и бесконечных значений  $a$  и  $A$  формулируются аналогично.

Заметим, что отбрасывание требования  $0 < |x - a|$ , т.е.  $x \neq a$ , в определении сужает его (определения) область действия. Примеры.

**1.20. Функции, не определенные в точке  $x = a$ , но имеющие предел при  $x \rightarrow a$ .** Следующие замечательные пределы:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

потеряли бы смысл, так как функции, стоящие под знаком предела, не определены в точках  $x = 0, +\infty, 0$  соответственно.

Приведем примеры несуществования пределов функций.

**1.21. Функции, не имеющие пределов в отдельной точке или всюду.** Непосредственно используя определение предела и свойства функций можно показать, например, несуществование пределов

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} D(x)$ , где  $D(x)$  – функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число,} \end{cases} \quad (1.6)$$

$a$  – любое действительное число, или  $a = +\infty$ , или  $a = -\infty$ . Для всех трех пределов возьмем значение  $\varepsilon = 0,5$ . В первом случае сколь ве-

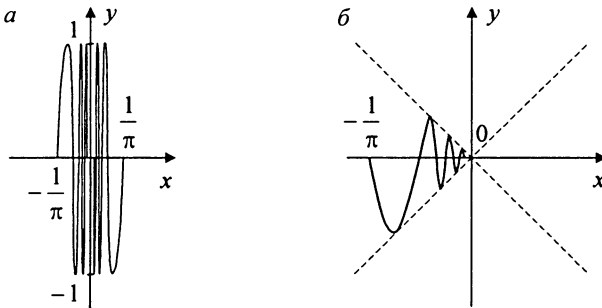


Рис. 1.2

лико ни было бы значение  $\Delta > 0$ , найдутся значения  $x_1$  и  $x_2$ ,  $x_1, x_2 > \Delta$ , такие, что  $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon = 0,5$ . Во втором случае при любом, сколь угодно малом значении  $\delta > 0$ , найдутся значения  $x_1$  и  $x_2$ ,  $|x_1|, |x_2| < \delta$ , такие, что  $|f(x_1) - f(x_2)| > \varepsilon = 0,5$  (рис. 1.2, а). В третьем случае  $f(x_1) - f(x_2) = 1 - 0 = 1 > \varepsilon = 0,5$ , где числа  $x_1$  – рациональное,  $x_2$  – иррациональное взятые в любой окрестности  $a$ .

Если  $a = +\infty$  или  $a = -\infty$ , то под окрестностями  $a$  понимаем интервалы  $(E, +\infty)$  или  $(-\infty, -E)$  соответственно,  $E > 0$ . Во всех трех случаях требования определения не выполняются.

Понятие предела функции определяется для одной отдельной точки  $x = a$ , конечной или бесконечно удаленной ( $a = -\infty$  или  $a = +\infty$ ), которая является предельной для множества определения  $X$  функции  $f(x)$ . Поэтому адекватно иллюстрируют понятие предела функции примеры, в которых предел существует только в одной точке. Такой пример демонстрирует отличия в «поведении» функции в окрестности упомянутой точки и в окрестностях всех других точек. Приведем такие примеры.

**1.22\*. Функция, имеющая предел только в одной точке.** Рассмотрим определенную на всей числовой оси функцию  $f(x) = x \left( D(x) - \frac{1}{2} \right)$  (рис. 1.3, а), где  $D(x)$  – функция Дирихле, заданная в предыдущем примере. На рис. 1.3, а, график функций изо-

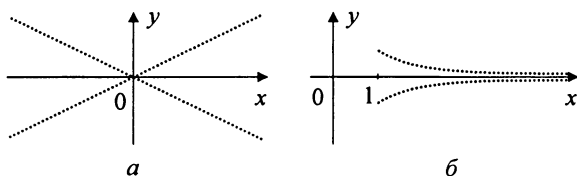


Рис. 1.3

бражен условно – пунктиром, так как при рациональных и иррациональных значениях  $x$  точки графика лежат на прямых  $y = x/2$  и  $y = -x/2$  соответственно. Существует  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  как предел произведения бесконечно малой функции  $f_1(x) = x$  на функцию  $f_2(x) = D(x) - \frac{1}{2}$  – ограниченную, которая принимает только два значения:  $\frac{1}{2}$  – при рациональных  $x$  и  $-\frac{1}{2}$  – при  $x$  иррациональных. В любой точке  $x_0$ , отличной от  $x = 0$ , функция  $f(x)$  не имеет предела, так как в любой окрестности точки  $x_0$  принимает значения как большие  $x_0/2$ , так и меньшие  $-x_0/2$ .

**1.23. Функция, имеющая предел только при  $x \rightarrow +\infty$ .** Функция  $f(x) = \frac{1}{x} \left( D(x) - \frac{1}{2} \right)$ ,  $x > 1$ , по той же самой причине имеет пре-

дел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  (рис. 1.3, б). Точки графика функции располагаются при рациональных и иррациональных  $x$  соответственно на гиперболох  $y = 1/(2x)$  и  $y = -1/(2x)$ . В любой конечной точке  $x_0 > 1$  функция  $f(x)$  не имеет предела, так как в любой окрестности точки  $x_0$  принимает значения как большие  $\frac{1}{2x_0}$ , так и меньшие  $-\frac{1}{2x_0}$ .

**Теорема об ограниченности функции, имеющей конечный предел.** Если функция  $f(x)$  имеет конечный предел  $A$  при стремлении  $x$  к  $a$ , то для некоторого  $\delta > 0$  и всех значений  $x: 0 < |x - a| < \delta$  функция будет ограниченной, т.е. найдутся постоянные  $m$  и  $M$  такие, что  $m \leq f(x) \leq M$ .

Обратное утверждение неверно.

**1.24. Ограниченная функция, не имеющая предела.** Функция  $\sin \frac{1}{x}$  ограничена,  $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$ . Однако,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  не существует.

**Предельный переход в неравенствах.** Если две функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на некотором множестве  $X$ , имеющем предельную точку  $a$ , и для некоторого  $\delta > 0$  и всех  $x \in X$ ,  $0 < |x - a| < \delta$ , выполняется неравенство  $f(x) \geq g(x)$ , и существуют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ , то и  $A \geq B$ .

Если в этом утверждении использовать строгие неравенства  $f(x) > g(x)$  и  $A > B$ , то получим неверное утверждение, опровергаемое следующим контрпримером.

**1.25. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , такие, что выполняется  $f(x) > g(x)$ , но  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .** Пусть  $f(x) = |x|$ , а  $g(x) = x^2$ . Тогда для всех  $x$ ,  $0 < |x| < 1$ , выполняется  $f(x) > g(x)$ , однако  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

**Сумма конечного числа бесконечно малых функций.** Пусть функции  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  определены на множестве  $X$ , имеющем предельную точку  $a$ , и являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow a$ , тогда их сумма также бесконечно малая функция при  $x \rightarrow a$ .

Покажем, что требование конечности числа бесконечно малых функций не является необходимым.

**1.26\*. Счетное множество бесконечно малых функций, сумма которых есть функция бесконечно малая.** Функции

$$f_k(x) = \frac{x}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

являются бесконечно малыми при  $x \rightarrow 0$ . Рассмотрим их сумму

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = x \frac{1/2}{1-1/2} = x, \quad \text{она также является беско-}$$

нечно малой функцией при  $x \rightarrow 0$ . Заметим, что мы использовали формулу суммы членов бесконечной геометрической прогрессии.

**Предел суммы, разности, произведения и частного функций.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  заданы в области  $X$  с предельной точкой  $a$  и при стремлении  $x$  к  $a$  имеют конечные пределы  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ . То-

гда и функции  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x)g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  также имеют конечные пределы

(в случае частного предполагаем, что  $B \neq 0$ ), а именно  $A \pm B$ ,  $AB$ ,  $\frac{A}{B}$ .

Условие существования конечных пределов  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$  функций  $f(x)$  и  $g(x)$  является достаточным, но не является необходимым

для существования пределов функций  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x)g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$ . Приведем контрпримеры.

**1.27. Функции, не имеющие предела ни в одной точке, сумма, разность, произведение и частное которых имеют пределы в любой точке.** Сумма  $D(x) + (-D(x)) = 0$ , разность  $D(x) - D(x) = 0$ , произведение  $D(x)D(x + \pi) = 0$ , частное  $\frac{D(x)+1}{D(x)+1} = 1$  двух функций,

каждая из которых не имеет предела ни в одной точке, являются константами, т.е. имеют пределы в любой точке. Следует только пояснить, что в произведении, если аргумент  $x$  — иррационален, то  $D(x) = 0$ , если  $x$  — рационален, то  $x + \pi$  — иррациональное число, и  $D(x + \pi) = 0$ , см. формулу (1.6), определяющую функцию  $D(x)$ .

**Теорема о пределе монотонной функции.** Пусть функция  $f(x)$  монотонно возрастает (хотя бы нестрого) в области  $X$ , имеющей предельную точку  $a$ , и число  $a$  (конечное или равное  $+\infty$ ) больше всех значений  $x$ . Если при этом функция ограничена сверху:  $f(x) \leq M$ , для всех  $x \in X$ , то существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ; в противном случае —  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

Аналогичное утверждение имеет место для монотонно убывающей, ограниченной снизу функции.

Монотонность ограниченной функции является достаточным, но не является необходимым условием, существования ее предела. Контрпримеры.

**1.28. Немонотонная ограниченная функция, имеющая предел.** Функция  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $-\frac{1}{\pi} < x < 0$ , ограничена сверху и снизу (рис. 1.2, б). Ни в какой левой полуокрестности точки  $x = 0$  она не является монотонной, так как совершает в ней бесконечное число колебаний. Однако существует предел  $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 0$ .

**1.29. Всюду немонотонная ограниченная функция, имеющая предел.** Рассмотренная в примере 1.23 (см. рис. 1.3, б) функция  $f(x) = \frac{1}{x} \left( D(x) - \frac{1}{2} \right)$ ,  $x > 1$ , является ограниченной сверху и снизу, она нигде (ни на каком интервале) не является монотонной. При этом существует предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Однако условие монотонности нельзя изъять из теоремы.

**1.30. Немонотонная ограниченная функция, нигде не имеющая предела.** Простейший такой пример – функция Дирихле.

### Упражнения

**1.1.** Показать, что последовательность  $x_n = \sin n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , не имеет предела.

**1.2.** Опровергнуть контрпримером утверждение: если сходится последовательность  $\{|x_n|\}$ , то сходится и последовательность  $\{x_n\}$ .

**1.3.** Известно, что если последовательность  $\{x_n\}$  сходится, то сходится и имеет такой же предел последовательность  $\left\{ \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right\}$ . Построить контр-пример к обратному утверждению.

**1.4.** Доказать, что не существует последовательности, у которой частичные пределы – все (и только) рациональные числа.

**1.5.** Привести пример функции, не имеющей предела только в заданных точках  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

**1.6.** Построить пример функции, которая имеет предел только в заданных точках  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

**1.7.** Построить контрпример к утверждению: сумма двух функций, имеющих бесконечные пределы при  $x \rightarrow +\infty$ , имеет также бесконечный предел при  $x \rightarrow +\infty$ .

**1.8.** Дать пример всюду определенной, ни в какой точке не имеющей предела функции, квадрат которой имеет предел в любой точке.

## РАЗДЕЛ 2

# НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 2.1. Непрерывность функции

**Определение непрерывности функции в точке.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некотором промежутке  $X$  и пусть  $x_0$  – точка этого промежутка. Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , т.е. для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x \in X$ , для которых справедливо неравенство  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .

Приведем адекватный определению пример функции, которая является непрерывной действительно только в одной точке.

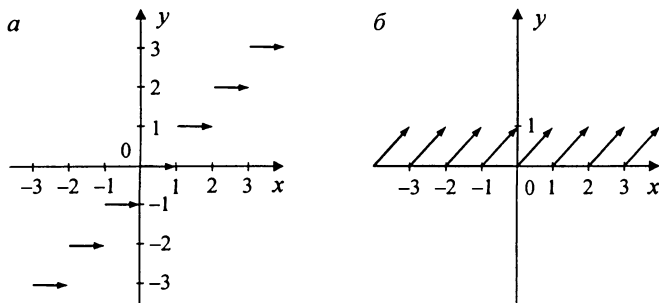


Рис. 2.1

**2.1. Функция, непрерывная только в одной точке.** Примем

$$f(x) = xD(x), \quad (2.1)$$

где  $D(x)$  – функция Дирихле, которая задана в примере 1.21. Функция (2.1) определена на всей числовой оси,  $f(0) = 0$ . Покажем, что в точке  $x_0 = 0$  функция (2.1) непрерывна. Действительно,

$\lim_{x \rightarrow 0} (xD(x)) = 0$  как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную и выполняется  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . Заметим, что в любой другой точке  $x_1 \neq 0$  функция  $f(x)$  разрывна, так как предел  $\lim_{x \rightarrow x_1} f(x)$  не существует. Это следует из того, что в любой окрестности точки  $x_1 \neq 0$  функция  $f(x)$  принимает как значения, равные нулю (при иррациональных  $x$ ), так и значения, большие числа  $x_1$  по абсолютной величине (при рациональных  $x$ ).

Приведем различные примеры функций, которые не отвечают данному выше определению, т.е. функций разрывных.

**2.2. Функции, имеющие точки разрыва.** Функции  $y = [x]$  – целая часть числа  $x$  (рис. 2.1, а),  $y = \{x\}$  – дробная часть числа  $x$  (рис. 2.1, б) имеют разрывы первого рода при всех целых значениях  $x$ , в каждой точке разрыва они непрерывны справа и разрывны слева. Функция  $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$  (рис. 2.2, а) имеет разрыв второго рода в нуле, так как она неограниченна в любой окрестности нуля,

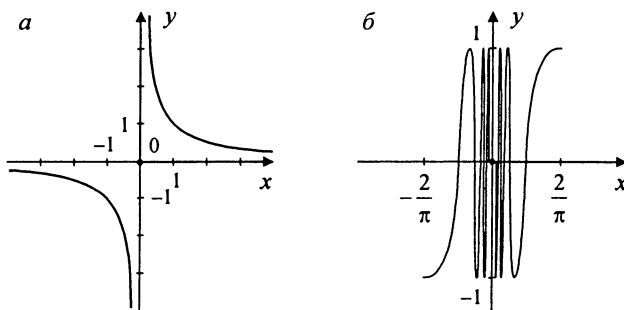


Рис. 2.2

пределы слева и справа в нуле существуют и равны  $-\infty$  и  $+\infty$  соответственно. Функция  $y = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$  (рис. 2.2, б) имеет разрыв второго рода в нуле, так как не существует предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ , не



существуют в нуле также пределы слева и справа. Функция  $y = D(x)$  в любой точке числовой оси имеет разрыв второго рода, так как для любого значения  $x_0$  не существует предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} D(x)$ , не

существуют также соответствующие пределы слева и справа. Это следует из того, что в любой окрестности любой точки функция  $y = D(x)$  принимает значения 0 и 1.

**2.3. Функция, имеющая в любом интервале бесконечное число точек разрыва и точек непрерывности. Функция Римана:**

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x \text{ рациональное число } \frac{m}{n}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число,} \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $\frac{m}{n}$  – несократимая дробь,  $m$  – целое число,  $n$  – натуральное число (рис. 2.3, а). На рисунке показан один период функции. Для

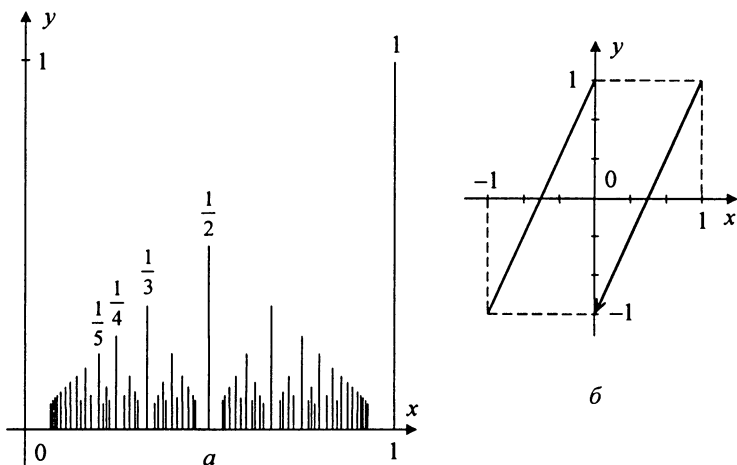


Рис. 2.3

наглядности значения функции изображены отрезками. Построение значений функции выполнено только для иррациональных  $x$  (эти значения нулевые) и для рациональных  $x$ , кратных  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{14}$ .

Функция (2.2) непрерывна в иррациональных и разрывна в рациональных точках. Сначала покажем второе. Если точка  $x_0$  – рациональная, то  $R(x_0) > 0$ , но в любой, сколь угодно малой, окрестности точки  $x_0$  находятся иррациональные точки  $x$ , в которых

$R(x) = 0$ . Таким образом, в точке  $x_0$  функция имеет разрыв. Покажем первое. Пусть  $x_0$  – иррациональная точка, тогда  $R(x_0) = 0$ . Зададимся произвольным, сколь угодно большим, натуральным числом  $N$ . В любой окрестности иррациональной точки  $x_0$  находится лишь конечное, или пустое, множество рациональных точек вида  $\frac{m}{n}$ , где  $n \leq N$ , поэтому существует меньшая ненулевая окрестность

точки  $x_0$ , не содержащая точек вида  $\frac{m}{n}$ ,  $n \leq N$ , и соответственно в

этой окрестности  $0 \leq R(x) < \frac{1}{N}$  (не будем забывать, что в иррациональных точках функция равна нулю). Отсюда видно, что при неограниченном уменьшении окрестности иррациональной точки  $x_0$ , максимум функции  $R(x)$  в окрестности будет стремиться к нулю, т.е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = 0 = R(x_0)$ , и функция непрерывна в точке  $x_0$ .

**Определение непрерывности функции в точке (в терминах приращений).** Пусть функция  $f(x)$  определена в некотором промежутке  $X$ , а  $x_0$  – точка этого промежутка. Дадим значению  $x_0$  приращение  $\Delta x = x - x_0$ , где  $x \in X$ . Получим приращение функции  $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ . Для непрерывности функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  необходимо и достаточно, чтобы при стремлении приращения  $\Delta x$  к нулю ее приращение  $\Delta y$  в этой точке также стремилось к нулю.

Иногда возникает заблуждение, что справедливо и альтернативное утверждение: для непрерывности  $f(x)$  в точке  $x_0$  необходимо и достаточно, чтобы приращение  $\Delta x$  независимой переменной в этой точке стремилось к нулю вместе с приращением  $\Delta y$  функции. Контрпример.

**2.4. Непрерывная функция такая, что стремлению в данной точке приращения  $\Delta y$  к нулю не соответствует стремление к нулю приращения  $\Delta x$ .** Рассмотрим всюду непрерывную функцию

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{если } x < -1, \\ 0, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Примем  $x_0 = 0$ , получим значение функции  $f(x_0) = 0$ . Придадим ему произвольное (не равное нулю) приращение

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Ему соответствует приращение  $\Delta x = x - x_0$ , такое, что  $|\Delta x| > 1$ . Очевидно, что при  $\Delta y \rightarrow 0$  будет выполняться  $|\Delta x| \rightarrow 1$ .

**Теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в промежутке  $X$  и обе непрерывны в точке  $x_0$  этого промежутка, тогда в точке  $x_0$  будут непрерывны и функции  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x)g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  (в последнем случае  $g(x_0) \neq 0$ ).

Условие непрерывности функций  $f(x)$  и  $g(x)$  в точке  $x_0$  является достаточным, но не является необходимым для непрерывности в  $x_0$  функций  $f(x) \pm g(x)$ ,  $f(x)g(x)$ ,  $\frac{f(x)}{g(x)}$ . Контрпримеры.

**2.5. Всюду разрывные функции, сумма, разность, произведение и частное которых всюду непрерывны.** В данном качестве могут быть рассмотрены функции контрпримера 1.27. Сумма  $D(x) + (-D(x)) = 0$ , разность  $D(x) - D(x) = 0$ , произведение  $D(x)D(x + \pi) = 0$ , частное  $\frac{D(x)+1}{D(x)+1} = 1$  двух функций, каждая из которых разрывна в любой точке числовой оси, являются константами, т.е. непрерывны в любой точке.

**Теорема о суперпозиции непрерывных функций.** Рассмотрим функцию  $\varphi(y)$ , которая определена в промежутке  $Y$ , и функцию  $f(x)$ , которая определена в промежутке  $X$ , при этом  $f(x) \in Y$ , если  $x \in X$ . Если  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0 \in X$ , а  $\varphi(y)$  непрерывна в точке  $y_0 = f(x_0)$ ,  $y_0 \in Y$ , то сложная функция  $\varphi(f(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ .

Условия непрерывности  $f(x)$  в точке  $x_0$  из  $X$  и  $\varphi(y)$  в точке  $y_0 = f(x_0)$  из  $Y$  являются достаточными, но не являются необходимыми, для непрерывности сложной функции. Контрпримеры.

**2.6. Разрывные функции, суперпозиция которых непрерывна.** Рассмотрим функции

$$\varphi(y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0; \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Они всюду определены и имеют в точках  $y_0 = 0$  и  $x_0 = 0$  соответственно разрывы,  $f(0) = 0$ . Сложная функция  $\varphi(f(x)) = x$  непрерывна в нуле.

**2.7. Всюду непрерывная и всюду разрывная функции, су-**

**перпозиция которых всюду непрерывна.** Рассмотрим определенные всюду функции  $\varphi(y) = y^2$  и  $f(x) = D(x) - \frac{1}{2}$ . Первая из них всюду непрерывна, вторая – всюду разрывна. Однако сложная функция  $\varphi(f(x)) = \left(D(x) - \frac{1}{2}\right)^2 \equiv \frac{1}{4}$  непрерывна всюду.

**2.8. Две всюду разрывные функции, суперпозиция которых всюду непрерывна.** Пусть  $\varphi(y) = D(y)$ , а  $f(x) = D(x)$ . Эти функции всюду определены и всюду разрывны. Сложная функция  $D(D(x)) \equiv 1$  всюду непрерывна.

## 2.2. Теоремы о непрерывных функциях

**Первая теорема Больцано–Коши.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда в интервале  $(a, b)$  найдется точка  $c$ , в которой функция равна нулю:  $f(c) = 0$ ,  $c \in (a, b)$ .

Попытаемся усилить теорему, снимая ее отдельные условия. Для начала снимем предположение об определении функции на всем отрезке  $[a, b]$ . Полученное утверждение опровергнем контрпримером.

**2.9. Не определенная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение первой теоремы Больцано–Коши.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

определена на отрезке  $[-1, 1]$ , за исключением точки  $x = 0$ . Во всех точках области своего определения она непрерывна, на концах отрезка  $[-1, 1]$  принимает значения разных знаков. Функция нигде не обращается в нуль.

Снимем предположение о непрерывности функции на всем отрезке  $[a, b]$ . Получим ложное утверждение. Контрпример.

**2.10. Разрывная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение первой теоремы Больцано–Коши.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

определена на всем отрезке  $[-1, 1]$  и непрерывна во всех его точках, кроме нуля. Она принимает значения разных знаков на концах отрезка, но нигде не обращается в нуль.

Снимем предположение о замкнутости области определения функции, заменив отрезок  $[a, b]$  на полуинтервал, например,  $(a, b]$ .

**2.11. Функция, определенная и непрерывная на полуинтервале, для которой не выполняется заключение первой теоремы Больцано–Коши.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x = -1, \\ 1, & \text{если } -1 < x \leq 1 \end{cases}$$

определена и непрерывна на полуинтервале  $(-1, 1]$ , а на его концах принимает значения разных знаков (здесь мы вынуждены определить функцию в обоих концах полуинтервала). Функция ни в одной точке интервала  $(-1, 1)$  не обращается в нуль.

**Вторая теорема Больцано–Коши.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и на концах этого отрезка принимает неравные значения  $f(a) = A$  и  $f(b) = B$ . Тогда для любого числа  $C$ , лежащего между  $A$  и  $B$ , существует такая точка  $c$  интервала  $(a, b)$ , что  $f(c) = C$ .

Попытаемся усилить теорему, снимая отдельные ее предположения. Делать это будем точно так же и в той же последовательности, как в случае первой теоремы Больцано–Коши.

**2.12, 2.13, 2.14. Контрпримеры к утверждениям, альтернативным второй теореме Больцано–Коши.** Последовательно используем функции контрпримеров 2.9, 2.10, 2.11. В качестве  $C$  можно принять любое число, лежащее строго между  $-1$  и  $1$ . Так как названные функции принимают только значения  $-1$  и  $1$ , то не существует точки  $c$  ( $-1 < c < 1$ ) такой, что  $f(c) = C$ .

Сформулируем теорему, обратную данной: пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$  и на концах этого отрезка принимает неравные значения  $f(a) = A$  и  $f(b) = B$ . И пусть для любого числа  $C$ , лежащего между  $A$  и  $B$ , существует такая точка  $c$  интервала  $(a, b)$ , что  $f(c) = C$ . Тогда функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Приведем контрпример.

**2.15. Функция, определенная на отрезке и принимающая на его концах различные значения, а внутри отрезка – все промежуточные значения, но разрывная.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ 2x-1, & \text{если } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

определена на отрезке  $[-1, 1]$ ,  $f(-1) = -1$ ,  $f(1) = 1$  (рис. 2.3, б). Функция принимает в точках отрезка  $[-1, 1]$  все значения, лежащие между  $-1$  и  $1$ . Однако она имеет разрыв в нуле.

**Теорема о существовании обратной функции.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена, строго монотонно возрастает (убывает) и непрерывна в некотором промежутке  $X$ . Тогда в промежутке  $Y$  значений этой функции существует однозначная обратная функция  $x = g(y)$ , также строго монотонно возрастающая (убывающая) и непрерывная.

Заметим, что для существования однозначной обратной функции предположения данной теоремы являются достаточными, но не являются необходимыми. Приведем примеры.

**2.16. Функция, которая не является непрерывной и монотонной, но имеет однозначную обратную функцию.** Функция, график которой изображен (рис. 2.4, а) (формульную запись не при-

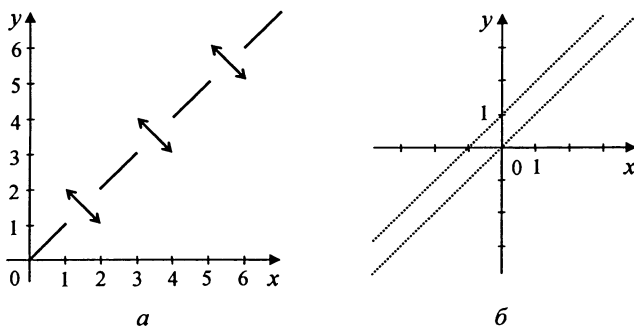


Рис. 2.4

водим ввиду ее громоздкости), определена в бесконечном полуинтервале  $X [0, +\infty)$ , она не является монотонной и непрерывной (имеет разрывы при натуральных  $x$ ). Однако существует однозначная обратная функция в бесконечном полуинтервале  $Y [0, +\infty)$ .

В последнем примере функция является кусочно-монотонной и кусочно-непрерывной. Приведем более сложный пример.

**2.17. Функция, всюду немонотонная и всюду разрывная, имеющая однозначную обратную функцию.** Определенная на всей оси  $Ox$  функция

$$y = x + D(x)$$

(рис. 2.4, б) ни в одном интервале не является монотонной, она разрывна в каждой точке. На рисунке график изображен схематически: при иррациональных  $x$  точка графика лежит на прямой  $y = x$ , при рациональных  $x$  – лежит на прямой  $y = x + 1$ . Эти прямые нарисованы пунктиром. Функция имеет однозначную обратную функцию, определенную на всей оси  $Oy$ . Действительно, если  $x$  – иррациональное число, то  $y = x$ , и  $y$  также иррационально; если  $x$  – рациональное число, то  $y = x + 1$ , где  $y$  это также число рациональное. Таким образом, рациональным значениям аргумента отвечают рациональные значения функции, и на множестве рациональных чисел существует однозначная обратная функция  $x = y - 1$ . Иррациональным значениям аргумента отвечают иррациональные значения функции, и на множестве иррациональных чисел существует однозначная обратная функция  $x = y$ . Следовательно, на всей оси  $Oy$  существует однозначная функция, обратная функции  $y = x + D(x)$ . Нетрудно заметить, что она выразится в виде  $x = y - D(y)$ .

**Первая теорема Вейерштрасса.** Если функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она ограничена на этом отрезке, т.е. существуют такие числа  $m$  и  $M$ , что  $m \leq f(x) \leq M$  для всех  $x \in [a, b]$ .

Попытаемся усилить теорему, снимая отдельные ее предположения. Сначала снимем предположение об определении функции на всем отрезке  $[a, b]$ . Приведем контрпример.

**2.18. Не определенная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение первой теоремы Вейерштрасса.** Функция  $f(x) = 1/x$  на отрезке  $[-1, 1]$  не определена только в нуле. Она непрерывна всюду в области своего определения. Данная функция не является ограниченной ни снизу, ни сверху.

Снимем предположение о непрерывности функции на всем отрезке.

**2.19. Разрывная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение первой теоремы Вейерштрасса.** Функция  $f(x) = 1/x$ ,  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ , определена на всем отрезке  $[-1, 1]$ , имеет разрыв только в нуле (см. рис. 2.2, а). Функция не является ограниченной ни снизу, ни сверху.

Снимем предположение о замкнутости области определения. Заменим в формулировке теоремы отрезок на интервал.

**2.20. Функция, определенная и непрерывная на интервале, для которой не выполняется заключение первой теоремы Вейерштрасса.** Функция  $f(x) = \operatorname{tg} x$  на интервале  $(-\pi/2, \pi/2)$  всюду определена и непрерывна, но не является ограниченной ни снизу, ни сверху.

**Вторая теорема Вейерштрасса.** Если функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она достигает на нем своей нижней грани и своей верхней грани.

Снимем предположение об определении функции на всем отрезке.

**2.21. Не определенная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение второй теоремы Вейерштрасса.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ x-1, & \text{если } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

определена всюду на отрезке  $[-1, 1]$ , кроме нуля, и непрерывна во всей области своего определения. Своей нижней грани и своей верхней грани функция на данном отрезке не достигает.

Снимем предположение о непрерывности функции на всем отрезке.

**2.22. Разрывная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение второй теоремы Вейерштрасса.** Функция из предыдущего контрпримера, доопределенная в точке  $x = 0$ :  $f(0) = 0$ . Она определена всюду на отрезке  $[-1, 1]$  и непрерывна на всем отрезке, кроме точки  $x = 0$ . Функция на  $[-1, 1]$  не достигает своей нижней грани и своей верхней грани.

Снимем предположение о замкнутости области определения. Вместо отрезка рассмотрим интервал. Контрпример.

**2.23. Функция, определенная и непрерывная на интервале, для которой не выполняется заключение второй теоремы Вейерштрасса.** Функция  $f(x) = x$  в интервале  $(-1, 1)$  всюду определена и непрерывна, но не достигает своих верхней и нижней граней.

**Теорема Кантора.** Если функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она и равномерно непрерывна на этом отрезке.

Попробуем усилить теорему, отбрасывая отдельные ее предположения.

**2.24. Функция, определенная и непрерывная на полуинтервале, для которой не выполняется заключение теоремы Канто-**



**ра.** Определенная и непрерывная на полуинтервале  $(0, 2/\pi]$  функция  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  (см. рис. 2.2, б) не является равномерно непрерывной, [2], т. I, с. 137.

**2.25. Не определенная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение теоремы Кантора.** Рассмотрим функцию из предыдущего контрпримера, но уже на отрезке  $\left[-\frac{2}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$ , исключая точку  $x = 0$ , где эта функция не определена (см. рис. 2.2, б). Она непрерывна во всей области своего определения, но не является равномерно непрерывной в полуинтервале  $\left(0, \frac{2}{\pi}\right]$ , а значит, и на всем отрезке.

**2.26. Функция, определенная и непрерывная на неограниченном полуинтервале, для которой не выполняется заключение теоремы Кантора.** Рассмотрим функцию  $f(x) = x^2$  на неограниченном полуинтервале  $[0, +\infty)$ . Она всюду определена и непрерывна, но не является равномерно непрерывной на этом полуинтервале. Покажем это. Пусть  $\varepsilon = 1$ , возьмем любое сколь угодно маленькое число  $\delta > 0$ . Возьмем две точки  $x$  и  $x_0$  ( $x_0 > x$ ,  $x_0 - x = \delta_0 < \delta$ ) и сделаем следующую оценку

$$\begin{aligned} |f(x_0) - f(x)| &= f(x_0) - f(x) = \\ &= x_0^2 - x^2 = (x_0 - x)(x_0 + x) > \delta_0 2x. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из оценки (2.3) следует, что для выполнения неравенства  $|f(x_0) - f(x)| > \varepsilon = 1$  достаточно, чтобы при любом выбранном  $\delta_0$  ( $\delta_0 < \delta$ ) выполнялось  $\delta_0 2x \geq 1$ , или  $x \geq \frac{1}{2\delta_0}$ . Таким образом, при  $\varepsilon = 1$  и любом выборе числа  $\delta > 0$  мы не получим выполнения неравенства  $|f(x_0) - f(x)| < \varepsilon = 1$  при условии  $|x_0 - x| = \delta_0 < \delta$ , т.е. если  $x \geq \frac{1}{2\delta_0}$ . Функция не является равномерно непрерывной на полуинтервале  $[0, +\infty)$ .

В заключение раздела отсылаем читателей к дополнению (разд. 18), в котором приводятся более сложные примеры, иллюстрирующие понятие непрерывности (разрывности) функций.

### Упражнения

2.1. Привести пример функции, определенной на интервале  $(0, +\infty)$ , с разрывами первого рода в точках  $x = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

2.2. Опровергнуть контрпримером утверждение: если  $\varphi(x) = |f(x)|$  непрерывная функция, то и функция  $f(x)$  непрерывная.

2.3. Известно, что если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны, то непрерывны и функции  $\varphi(x) = \min(f(x), g(x))$  и  $\psi(x) = \max(f(x), g(x))$ . Построить контрпример к обратному утверждению.

2.4. Привести контрпример к утверждению: пусть функция  $f(x)$  определена на  $(-\infty, +\infty)$  и для любых  $x_1$  и  $x_2$  найдется число  $\xi$ ,  $x_1 \leq \xi \leq x_2$ , такое, что  $f(\xi) = \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2))$ , тогда функция  $f(x)$  непрерывная на  $(-\infty, +\infty)$ .

2.5. Пусть функция  $f(x)$  определена на конечном, или нет, интервале  $(a, b)$ , и на каждом интервале  $(x_1, x_2)$ ,  $a < x_1 < x_2 < b$ , равномерно непрерывна. Следует ли из таких предположений равномерная непрерывность  $f(x)$  в  $(a, b)$ ? Ответить на вопрос, используя контрпример.

2.6. Известно, что если функция  $f(x)$  определена и непрерывна в полуинтервале  $[a, +\infty)$  и существует конечный  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , то  $f(x)$  равномерно непрерывна в  $[a, +\infty)$ . Обратное утверждение неверно. Дать контрпример.

2.7. Сумма двух равномерно непрерывных функций равномерно непрерывна. Однако их произведение может не быть равномерно непрерывным. Привести контрпример.

## РАЗДЕЛ 3

# ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 3.1. Производная

**Определение производной.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в промежутке  $X$  и  $x_0 \in X$ . Рассмотрим в точке  $x_0$  приращение  $\Delta x$  переменной (аргумента)  $x$  такое, что значение  $x_0 + \Delta x \in X$ . Тогда значение  $y_0 = f(x_0)$  функции получит приращение  $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

Если существует предел отношения приращения функции  $\Delta y$  к вызвавшему его приращению аргумента  $\Delta x$ , при стремлении  $\Delta x$  к нулю, т.е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то он называется производной функции  $y = f(x)$  по переменной  $x$  при данном ее значении  $x = x_0$  (или в точке  $x_0$ ).

Обычно в качестве примера показывают существование производной у всюду бесконечно дифференцируемых функций типа  $y = x^2$ . Такой пример, строго говоря, не является полностью корректным для иллюстрации определения производной функции в точке. Для более содержательного выражения понятия производной в точке необходимо рассмотреть функцию, имеющую производную только в одной этой точке. Приведем такой пример.

**3.1. Функция, имеющая производную только в одной точке.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 D(x), \quad (3.1)$$

где  $D(x)$  – функция Дирихле, она определяется в примере 1.21. Покажем существование производной при  $x = 0$ . По определению

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x)^2 D(0 + \Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x D(\Delta x)) = 0,$$

так как предел произведения бесконечно малой функции на ограниченную функцию равен нулю. В точке  $x = 0$  функция (3.1) непре-

рывна. Действительно,  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 D(x)) = 0$  как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную, и  $f(0) = 0$ . В любой точке  $x_0 \neq 0$  функция имеет разрыв, так как в любой окрестности точки  $x_0$  существуют два числа:  $x_1$  – рациональное и  $x_2$  – иррациональное, такие, что  $f(x_1) > x_0^2$ ,  $f(x_2) = 0$ . Отсюда функция (3.1) имеет производную только в точке  $x = 0$ , во всех других

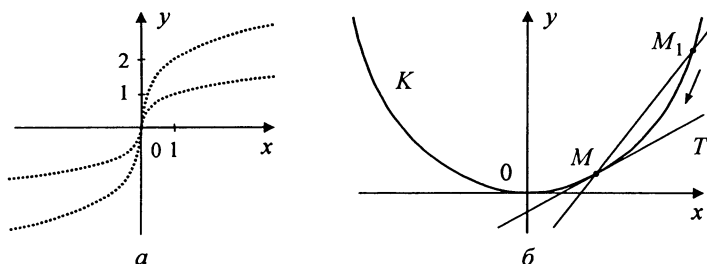


Рис. 3.1

точках она имеет разрывы, а значит, производная в них не существует (см. необходимое условие существования производной).

Заметим, что для большей общности примера вместо функции (3.1) можно было бы рассмотреть функцию

$$f(x) = (x - a)^2 D(x - a) + bx,$$

где  $a$  и  $b$  – произвольные действительные числа. Эта функция имеет производную (она равна  $b$ ) только в точке  $x = a$ .

Еще более интересен пример с бесконечной производной.

**3.2. Функция, имеющая производную (бесконечную) только в одной точке.** Функция

$$f(x) = \sqrt[3]{x}(D(x) + 1)$$

всюду определена, имеет разрывы во всех точках, кроме  $x = 0$ , в этой точке функция имеет производную, которая равна  $+\infty$ . (рис. 3.1, а). При рациональных значениях  $x$  точки графика лежат на кривой  $y = 2\sqrt[3]{x}$ , при иррациональных значениях  $x$  – на кривой  $y = \sqrt[3]{x}$ . Функция непрерывна в нуле, потому что предел функции при  $x \rightarrow 0$  равен нулю, т.е. ее значению в нуле. Действительно,  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{x}(D(x) + 1)) = 0$ , как предел произведения бесконечно малой

функции на функцию ограниченную. В любой другой точке  $x_0 \neq 0$  функция имеет разрыв, так как в любой окрестности точки  $x_0$  существуют два числа:  $x_1$  – рациональное и  $x_2$  – иррациональное, такие что  $f(x_1) > 2\sqrt[3]{x_0}$ ,  $f(x_2) < \sqrt[3]{x_0}$  при  $x_0 > 0$ , и  $y(x_1) < 2\sqrt[3]{x_0}$ ,  $f(x_2) > \sqrt[3]{x_0}$  при  $x_0 < 0$ . Покажем существование производной, равной  $+\infty$  при  $x = 0$ . По определению

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{0 + \Delta x}(D(0 + \Delta x) + 1) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \Delta x^{-\frac{2}{3}}(D(\Delta x) + 1) \right) = +\infty,$$

как предел произведения бесконечно большой функции, стремя-

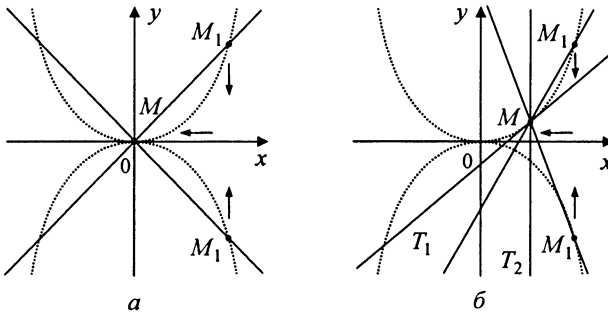


Рис. 3.2

щейся к  $+\infty$ , на ограниченную положительную функцию.

**Определение касательной.** Пусть дана кривая  $K$  (рис. 3.1, б) и на ней точка  $M$ . Возьмем на кривой  $K$  еще точку  $M_1$  и проведем секущую  $MM_1$ . Касательной к кривой  $K$  в точке  $M$  называется предельное положение  $MT$  секущей  $MM_1$ , когда точка  $M_1$  стремится по кривой к точке  $M$ .

Чтобы понять смысл определения касательной и связь существования касательной к графику функции в его точке  $(x_0, y_0)$  с существованием производной функции в точке  $x_0$ , нужен адекватный определению пример.

**3.3. График функции, имеющий касательную только в одной точке.** Рассмотрение касательной к графику функции в его отдельно взятой точке  $(x_0, y_0)$  выполним для функции, имеющей производную только в точке  $x_0$ . Такое пример будет интересней обычных примеров: мы увидим особенности графика функции в точке  $(x_0, y_0)$ , позволяющие существовать касательной. Рассмотрим функцию

$$y = f(x) = x^2 \left( D(x) - \frac{1}{2} \right). \quad (3.2)$$

Функция (3.2) всюду разрывна, кроме точки  $x = 0$  (рис. 3.2). Действительно, рассмотрим произвольную точку  $x_0 \neq 0$ . В любой сколь угодно маленькой ее окрестности располагаются рациональные точки, в которых функция больше  $\frac{1}{2}x_0^2$ , и иррациональные точки, в

которых функция меньше  $-\frac{1}{2}x_0^2$ , т.е. функция (3.2) разрывна при любом  $x_0 \neq 0$ . В нуле функция непрерывна, ее предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \left( D(x) - \frac{1}{2} \right) \right) = 0 \text{ как предел произведения бесконечно малой}$$

функции на функцию ограниченную, этот равный нулю предел соответствует нулевому значению функции в точке  $x = 0$ . Более того, в нуле функция (3.2) имеет производную, которая равна нулю. Покажем это. Запишем предел, в точке  $x = 0$ , отношение приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x)^2 \left( D(0 + \Delta x) - \frac{1}{2} \right) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \Delta x \left( D(\Delta x) - \frac{1}{2} \right) \right) = 0$$

как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную. Заметим, что в обычных примерах построения касательной, скажем к графику функции  $y = x^2$ , точка  $M_1$  вдоль по гладкой кривой стремится к точке  $M$ , при этом секущая  $MM_1$  движется (вращается вокруг точки  $M$ ) непрерывно и гладко. В нашем же примере график функции такой, что нельзя сказать о стремлении точки  $M_1$  к точке  $M$  «вдоль по кривой». На рисунке показано два положения точки  $M_1$  при сколь угодно близких значениях  $x$  (рациональном и иррациональном). При  $M_1 \rightarrow M$  движение секущей  $MM_1$  не является непрерывным и, тем более, гладким, как в обычном примере, а всюду разрывно, с бесконечным числом «скачков» точки  $M_1$  с одной параболы  $\left( y = \frac{1}{2}x^2 \right)$  на другую  $\left( y = -\frac{1}{2}x^2 \right)$ , и обратно. Однако из рис. 3.2, а видно, что предельное положение секущей существует, оно совпадает с положением оси  $Ox$ . Если в качестве точки  $M$  выбрать не точку  $(0, 0)$ , а любую другую точку

графика, то одного предельного положения секущей  $MM_1$  мы не получим (рис. 3.2, б).

Аналогичный пример, но с вертикальным расположением касательной, дает функция, которая рассматривалась в примере 3.2.

**3.4. График функции, имеющий касательную (вертикальную) только в одной точке.** Функция  $y = f(x) = \sqrt[3]{x}(D(x)+1)$  имеет производную только в точке  $x = 0$  и  $f'(0) = +\infty$ , следовательно, в точке  $M(0, 0)$  графика функции существует вертикальная касательная, см. рис. 3.1, а. Оставляем за читателями возможность просле-

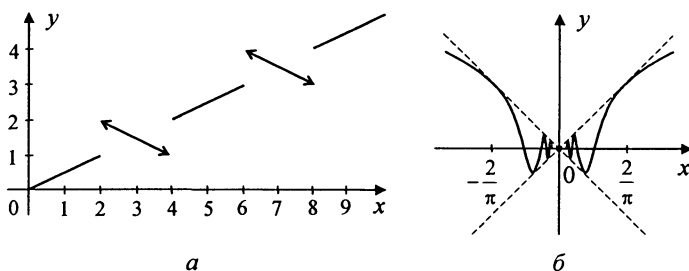


Рис. 3.3

дить, как это сделано в предыдущем примере, за поведением секущей  $MM_1$  при всюду разрывном движении точки  $M_1$  к  $M$ .

**Теорема о производной обратной функции.** Пусть функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям теоремы о существовании обратной функции (см. в подразд. 2.2) и в точке  $x = x_0$  имеет конечную, отличную от нуля производную  $f'(x_0)$ . Тогда в точке  $y_0 = f(x_0)$  у обратной функции  $x = g(y)$  существует производная и  $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ .

Теорема формулирует только достаточные условия существования производной обратной функции. Пусть нарушены условия теоремы о существовании обратной функции. Приведем контрпример.

**3.5. Функция  $f(x)$ , для которой нарушены условия теоремы о существовании обратной функции, но существует обратная функция с производной, равной  $1/f'(x)$ .** Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , график которой изображен на рис. 3.3, а, аналогичную функции из примера 2.16. Она определена в бесконечном полуинтервале  $X [0, +\infty)$ , не является монотонной и непрерывной, как то-

го требует теорема о существовании обратной функции, однако существует однозначная обратная ей функция  $x = g(y)$  в бесконечном полуинтервале  $Y [0, +\infty)$ . В любой точке  $x_0$ , кроме четных натуральных значений  $x$ , функция  $y = f(x)$  имеет производную, равную  $\frac{1}{2}$  или  $-\frac{1}{2}$ . В соответствующих точках  $y_0 = f(x_0)$  существует производная обратной функции  $x = g(y)$ , равная 2 или  $-2$  соответственно.

**Необходимое условие существования производной.** Если в точке  $x_0$  функция  $y = f(x)$  имеет конечную производную, то в этой точке функция непрерывна.

Утверждение относится к отдельной точке, поэтому иллюстрируем его примером функции, имеющей производную только в одной точке.

**3.6. Функция, имеющая производную только в одной точке и непрерывная только в этой точке.** Функция (3.2) обладает этим свойством. В примере 3.3 доказывается непрерывность этой функции только в точке  $x = 0$  и существование у нее производной только в одной этой точке.

Заметим, что и при существовании бесконечной производной в точке функция может быть в ней непрерывна. Такой является функция из примера 3.2. Приведем более простой пример.

**3.7. Функция, имеющая бесконечную производную в точке и непрерывная в этой точке.** Функция  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  в точке  $x = 0$  имеет бесконечную производную и непрерывна.

Однако снять в утверждении требование конечности производной нельзя. Приведем контрпример.

**3.8. Функция, имеющая бесконечную производную в точке и разрыв в этой точке.** Функция  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ . Формально, по определению, эта функция имеет в нуле бесконечную производную. Действительно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn}(0 + \Delta x) - \operatorname{sgn}(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sgn} \Delta x}{\Delta x} = +\infty,$$

так как совпадают и равны  $+\infty$  пределы справа и слева при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{1}{\Delta x} = +\infty$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{-1}{\Delta x} = +\infty$ . Заметим, что в нуле функция  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  имеет разрыв.



Обратное утверждение неверно, т.е. из непрерывности функции в точке не следует существование в этой точке производной. Контрпримеры.

**3.9, 3.10. Непрерывные функции, не имеющие производной в точке.** Всюду непрерывная функция  $f(x) = |x|$  не имеет в точке  $x = 0$  производной, так как в точке  $x = 0$  производная справа равна 1, а производная слева равна  $-1$ . Заметим, что график этой функции не имеет касательной в точке  $(0, 0)$ .

$$\text{Функция } f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases} \text{ непрерывна в точке } x = 0,$$

но не имеет в этой точке производной (рис. 3.3, б). Имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \frac{1}{x} \right) = 0 \text{ как предел произведения бесконечно малой функции}$$

на функцию ограниченную, что совпадает со значением функции в нуле, т.е. функция непрерывна в точке  $x = 0$ . Рассмотрим пре-

$$\text{дел } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x) \sin \frac{1}{0 + \Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{\Delta x}, \text{ он не существует, так}$$

как в любой сколь угодно малой окрестности нуля (при  $\Delta x$ , стремящемся к нулю) функция  $\sin \frac{1}{\Delta x}$  принимает значения  $-1$  и  $1$ .

Следовательно, производная в нуле не существует. Заметим, что при стремлении вдоль графика функции  $y = f(x)$  точки  $M_1$  к точке этого графика  $M$  с координатами  $(0, 0)$ , секущая  $MM_1$  будет бесконечное число раз перемещаться от прямой  $y = x$  к прямой  $y = -x$ , и обратно. Это означает, что касательной, как предельного положения секущей, в точке  $(0, 0)$  не существует.

Известны примеры функций, всюду непрерывных, но нигде не имеющих производной, см. [1], с. 52, [2], т. II, с. 85, [7], с. 360. Смотрите также пример 18.8 в дополнении.

**Простейшие правила вычисления производных.** Пусть в точке  $x = x_0$  функции  $u = \varphi(x)$  и  $v = \psi(x)$  имеют конечные производные  $u'$  и  $v'$ . Тогда в этой точке:  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ;  $(uv)' = u'v + uv'$ ;  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ , если  $v \neq 0$ .

Это утверждение формулирует только достаточные условия существования производной суммы, разности, произведения и частного двух функций. Приведем контрпримеры.

**3.11. Всюду разрывные функции, сумма, разность, произведение и частное которых всюду имеют производные.** Такими являются функции из контрпримеров 1.27 и 2.5.

Отбросим в правилах требование о конечности производных. Получим усиленные правила, опровергаемые следующими контрпримерами.

**3.12. Функции с бесконечными производными, для которых неприменимо правило  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ .** Рассмотрим функции  $u = \sqrt[3]{x}$  и  $v = -\sqrt[3]{x}$ , как известно,  $u'(0) = +\infty$ ,  $v'(0) = -\infty$ , и применим к ним усиленное правило. Получим  $(\sqrt[3]{x} + (-\sqrt[3]{x}))' = (\sqrt[3]{x})' + (-\sqrt[3]{x})'$ , что при  $x = 0$  слева дает нуль (правильный результат), а справа – неопределенность вида  $(+\infty) + (-\infty)$ .

**3.13. Функции, одна из которых имеет бесконечную производную, для которых неприменимо правило  $(uv)' = u'v + uv'$ .** Функция  $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$  дифференцируема, и всюду имеет производную  $f'(x) = 2|x|$ . Действительно, справа от нуля и в нуле (при  $x \geq 0$ ) имеем  $f(x) = x^2$ , соответственно  $f'(x) = 2x$ ; слева от нуля и в нуле (при  $x \leq 0$ ) имеем  $f(x) = -x^2$ , соответственно  $f'(x) = -2x$ . В нуле производные слева и справа совпадают, т.е. существует  $f'(0) = 0$ . Одной формулой производная записывается в виде  $f'(x) = 2|x|$ . Применим к  $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$  в точке  $x = 0$  усиленное правило, заметим, что в этой точке второй множитель  $\operatorname{sgn} x$  имеет производную, равную  $+\infty$ . Получим по этому правилу

$$f'(x) = (x^2 \operatorname{sgn} x)' = 2x \operatorname{sgn} x + x^2 (\operatorname{sgn} x)',$$

что в точке  $x = 0$  дает слева  $2|x| \big|_{x=0} = 0$  (правильный результат), а справа неопределенность вида  $0 \cdot \infty$  во втором слагаемом.

Однако существуют и обратные примеры.

**3.14. Функции, одна из которых имеет бесконечную производную, для которых правило  $(uv)' = u'v + uv'$  применимо.** Пусть  $u = x$ , а  $v = \sqrt[3]{x}$ . Заметим, что  $v'(0) = +\infty$ . Применяя правило, получим  $(x \sqrt[3]{x})' = 1 \cdot \sqrt[3]{x} + x(\sqrt[3]{x})'$ , или  $\frac{4}{3} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} + x \frac{1}{3 \sqrt[3]{x^2}}$ , наконец

$\frac{4}{3}\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x}$ . Последнее выполняется тождественно, в том числе и при  $x = 0$ .

**Теорема о производной сложной функции.** Пусть функция  $u = \varphi(x)$  имеет в точке  $x_0$  производную  $u'_x = \varphi'(x_0)$ , а функция  $y = f(u)$  имеет производную  $y'_u = f'(u_0)$  в точке  $u_0 = \varphi(x_0)$ . Тогда сложная функция  $y = f(\varphi(x))$  также будет иметь производную в точке  $x_0$ , причем

$$(f(\varphi(x)))' = f'_u(\varphi(x_0))\varphi'(x_0), \text{ или } y'_x = y'_u u'_x.$$

В утверждении формулируются достаточные условия, которые не являются необходимыми, для существования производной сложной функции. Приведем контрпримеры.

**3.15. Функции, одна или обе из которых нигде не имеют производной, но суперпозиция которых всюду дифференцируема.** Пусть  $u = D(x)$  – функция нигде не имеющая производной, а  $y = (2u - 1)^2$ . Тогда сложная функция  $y = (2D(x) - 1)^2 \equiv 1$  имеет производную всюду.

Пусть  $u = D(x)$ ,  $y = D(u)$  – функции, нигде не имеющие производной. Тогда сложная функция  $y = D(D(x)) \equiv 1$  всюду имеет производную.

В завершение подраздела отсылаем читателей к дополнению (разд. 18), где приводятся более сложные примеры функций, в частности, имеющих в любом сколь угодно малом интервале бесконечное много отличных друг от друга точек существования и несуществования производной.

## 3.2. Дифференциал

**Определение дифференциала.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некотором интервале  $X$  и точка  $x_0 \in X$ . Тогда приращению аргумента  $\Delta x$  ( $x_0 + \Delta x \in X$ ) соответствует приращение  $\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  функции. Функция  $y = f(x)$  называется дифференцируемой при  $x = x_0$ , если ее приращение в этой точке можно представить в виде:

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0,$$

где  $A$  некоторое число, которое не зависит от  $\Delta x$ , но, вообще говоря, различно для различных точек  $x_0$ . Линейная однородная функция  $A \Delta x$  переменной  $\Delta x$  называется дифференциалом функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначается символом  $dy$  или  $df(x_0)$ .

В учебной литературе приводятся примеры вычисления дифференциалов в случае всюду дифференцируемых функций, однако интересней примеры,

более отвечающие определению, т.е. когда функция дифференцируема только в одной точке. Приведем такой пример.

**3.16. Функция, имеющая дифференциал только в одной точке.** Рассмотрим функцию

$$y = f(x) = (x-1)^2 D(x-1) + 2x.$$

Она непрерывна только в точке  $x=1$ . Действительно,  $f(1)=2$  и  $\lim_{x \rightarrow 1} ((x-1)^2 D(x-1) + 2x) = 2$ . Заметим, что предел первого слагаемого равен нулю, как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную, а предел второго слагаемого равен двум. Покажем, что функция дифференцируема в точке  $x_0=1$  и имеет в этой точке дифференциал  $dy = 2 \cdot \Delta x$ . Запишем

$$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = \Delta x^2 D(\Delta x) + 2(1 + \Delta x) - 2 = 2\Delta x + \Delta x^2 D(\Delta x),$$

где первое слагаемое  $2\Delta x$  — линейная однородная функция переменной  $\Delta x$ , а второе слагаемое  $\Delta x^2 D(\Delta x) = o(\Delta x)$ , при  $\Delta x \rightarrow 0$ , так как множитель  $D(\Delta x)$  ограничен. Отсюда имеем по определению дифференциала  $dy = 2\Delta x$ . В любой точке  $x \neq 1$  функция разрывна, см. пример 3.1, а значит, недифференцируема в ней.

**Связь между дифференцируемостью и существованием производной.** Для того чтобы функция  $y = f(x)$  была дифференцируема в точке  $x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную  $y' = f'(x_0)$ . При этом равенство  $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ , при  $\Delta x \rightarrow 0$ , выполняется при значении постоянной  $A$ , равном производной функции в точке  $x_0$ , т.е.  $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Сделаем попытку усилить данное утверждение, отбросив предположение о конечности производной. Построим контрпример.

**3.17. Функция, имеющая бесконечную производную в точке и недифференцируемая в этой точке.** Функция  $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$  в точке  $x_0 = 0$  имеет производную, равную  $+\infty$ . Выразим ее приращение в этой точке  $\Delta y = \sqrt[3]{0 + \Delta x} - 0 = \sqrt[3]{\Delta x}$ . Предположим, что  $\Delta y$  можно записать в виде  $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , где  $A$  — некоторое число (конечное). Имеем  $\sqrt[3]{\Delta x} = A\Delta x + o(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , отсюда, возведя обе части в куб, получаем

$$\Delta x = A^3 \Delta x^3 + 3A^2 \Delta x^2 o(\Delta x) + 3A \Delta x (o(\Delta x))^2 + (o(\Delta x))^3.$$

При условии, что  $A$  – постоянное число, видим, что вся правая часть это  $o(\Delta x^2)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Приходим к противоречию. Следовательно, функция не имеет дифференциала в нуле.

### 3.3. Производные высших порядков

**Определение производных высших порядков.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена и имеет конечную производную  $y' = f'(x)$  в каждой точке некоторого интервала  $X$  и пусть  $x_0 \in X$ . Если в точке  $x_0$  существует производная функции  $f'(x)$ , конечная или нет, то она называется производной второго порядка, или второй производной, функции  $y = f(x)$  и обозначается  $f''(x_0)$ , т.е.  $f''(x_0) = (f'(x))'|_{x=x_0}$ . Аналогично, по индукции, определяется производная  $f^{(n)}(x_0)$  порядка  $n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а именно предполагается, что в каждой точке интервала  $X$  существует конечная производная  $f^{(n-1)}(x)$ , тогда  $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'|_{x=x_0}$ , если производная  $(f^{(n-1)}(x))'|_{x=x_0}$ , конечная или нет, существует. При этом принимается, что  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

В различных теоремах математики встречаются требования двойной, тройной и т.д. дифференцируемости (часто непрерывной) некоторых функций. Иными словами, предполагается возможность того, что функции могут не иметь в отдельных точках производную, производную второго порядка, производную третьего порядка и т.д. Приведем соответствующие примеры.

**3.18. Функция, не имеющая в точке производную заданного порядка. Функции**

$$y_0(x) = |x|, \quad y_1(x) = \frac{x^2}{2!} \operatorname{sgn} x, \quad \dots, \quad y_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{sgn} x, \quad (3.3)$$

$n = 1, 2, \dots$ , не имеют в точке  $x = 0$  производной первого, второго, ...,  $(n+1)$ -го порядка соответственно. Это следует из того, что первая из них (функция  $y_0(x) = |x|$ ) не имеет в нуле производной, см. пример 3.9, и из того, что в последовательности функций (3.3) каждая предыдущая всюду является производной последующей. Покажем второе. То, что  $(y_1(x))' = y_0(x)$ , установлено в примере 3.13.

Найдем производную функции  $y_k(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \operatorname{sgn} x$ , где  $k = 2, 3, \dots$

При  $x \geq 0$  имеем  $y_k(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$  и производная равна  $(y_k(x))' = \frac{x^k}{k!}$ .

При  $x \leq 0$   $y_k(x) = -\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$  и производная равна  $(y_k(x))' = -\frac{x^k}{k!}$ .

Видим, что производные в точке  $x=0$  справа и слева совпадают (равны нулю), поэтому производная  $(y_k(x))'$  существует и в этой точке. Формулы для производной при  $x \geq 0$  и  $x \leq 0$  объединяются в одну формулу  $(y_k(x))' = \frac{x^k}{k!} \operatorname{sgn} x$ , правая часть которой выражает функцию  $y_{k-1}(x)$ , что и требовалось показать.

Существуют функции, имеющих всюду непрерывные производные до некоторого конечного  $n$ -го порядка, но уже не имеющие нигде производной  $(n+1)$ -го порядка. Это, например, такие функции.

**3.19\*.** Функция, нигде не имеющая производную заданного порядка. Под функцией Вейерштрасса  $W(x)$  будем понимать построенную им функцию, всюду непрерывную, но нигде не имеющую производной. Ее определение смотрите, например, в [7], с. 360. Используя всюду непрерывную функцию  $W(x)$ , можно получить путем повторного интегрирования последовательность функций:

$$W_0(x) = W(x), W_1(x) = \int_0^x W_0(t) dt, \dots, W_n(x) = \int_0^x W_{n-1}(t) dt. \quad (3.4)$$

В последовательности (3.4) каждая предыдущая функция является на всей оси  $Ox$  производной последующей функции, что следует из теоремы о дифференцируемости определенного интеграла как функции верхнего предела интегрирования в случае непрерывной подынтегральной функции, [2], т. I, с. 337. Очевидно, при любом натуральном  $n$  производная  $n$ -го порядка функции  $W_n(x)$  будет функцией непрерывной, но уже не будет иметь производной ни в одной точке оси  $Ox$ . Таким образом, последовательность (3.4) дает более сильный пример по сравнению с последовательностью (3.3).

### Упражнения

**3.1.** Построить пример функции  $f(x)$ , имеющей производную только в точках  $x=1$  и  $x=2$ , при этом  $f'(1)=3$ ,  $f'(2)=4$ .

**3.2.** Построить пример функции, имеющей в точках  $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  (и только в них) бесконечные производные.

**3.3.** Привести пример непрерывной функции, не имеющей производной только в точках  $x=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

3.4. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в интервале  $(1, +\infty)$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ . Следует ли из этого, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ? Привести контрпример.

3.5. Пусть функция  $f(x)$  дифференцируема в конечном интервале  $(a, b)$  и  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ . Обязательно ли  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = -\infty$ ? Дать контрпример.

3.6. Построить пример функции  $f(x)$ , определенной и дифференцируемой на всей числовой оси, которая не имеет производной  $f''(x)$  только в точках  $x = 0$  и  $x = 1$ .

3.7. Известно, что если у функции  $f(x)$  существует вторая производная  $f''(x)$ , то  $f''(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) - 2f(x)}{(\Delta x)^2}$ . Обратное утверждение,

что из существования и конечности данного предела следует существование  $f''(x)$ , опровергнуть контрпримером.

3.8. Справедливо утверждение, что если функция  $f(x)$  определена и имеет ограниченную производную на некотором конечном или бесконечном интервале  $(a, b)$ , то она равномерно непрерывна на этом интервале. Опровергнуть контрпримером обратное утверждение.

## РАЗДЕЛ 4

# ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

### 4.1. Теоремы Ферма и Дарбу

**Лемма к теореме Ферма.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некотором интервале  $X$  и имеет в точке  $x_0 \in X$  конечную производную  $f'(x_0)$ . Если  $f'(x_0) > 0$  ( $f'(x_0) < 0$ ), то существуют такое число  $\delta > 0$ , что для всех  $x \in X$ :  $0 < x - x_0 < \delta$ , будет выполняться  $f(x) > f(x_0)$  ( $f(x) < f(x_0)$ ), а для всех  $x \in X$ :  $0 < x_0 - x < \delta$ , будет выполняться  $f(x) < f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ).

Использование для иллюстрации этой леммы всюду непрерывно дифференцируемых функций порождает заблуждение, что при выполнении предположений леммы функция в некоторой окрестности точки  $x_0$  монотонно возрастает (или убывает) в зависимости от знака  $f'(x_0)$ . Построим контрпример, в котором не завываются предположения леммы, а именно, используем функцию, имеющую производную только в точке  $x_0$ .

**4.1. Функция, которая имеет конечную положительную производную в точке, но не возрастает монотонно в окрестности этой точки.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2 \left( D(x) - \frac{1}{2} \right) + x. \quad (4.1)$$

Раскроем скобки в (4.1), получим  $f(x) = x^2 D(x) - \frac{1}{2} x^2 + x$ . Из примера 3.1 следует, что функция (4.1) имеет производную только в точке  $x = 0$ , во всех других точках она разрывна. Там же показано, что производная функции  $x^2 D(x)$  в нуле равна нулю. Используя это, а также вычислив производную суммы, получим  $f'(0) = 1$ . Функция (4.1) удовлетворяет предположениям леммы. Точки графика этой функции лежат при рациональных значениях  $x$  на параболе  $y = \frac{1}{2} x^2 + x$ , при иррациональных значениях  $x$  — на параболке



$y = -\frac{1}{2}x^2 + x$  (рис. 4.1, а). Очевидно, что правей точки  $x=0$ , а именно, на интервале  $(0, 2)$  обе параболы лежат выше оси  $Ox$ , а левее точки  $x=0$ , а именно, на интервале  $(-2, 0)$  – лежат ниже оси  $Ox$ . Следовательно, функция (4.1) удовлетворяет лемме, а именно,

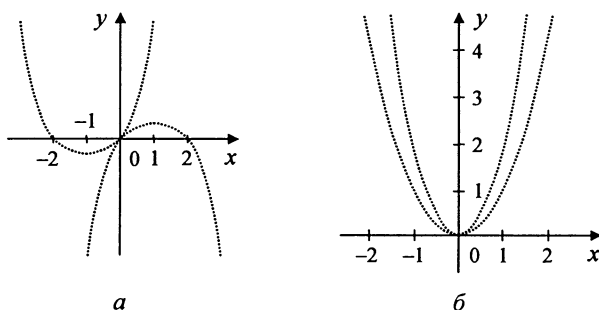


Рис. 4.1

при  $0 < x < 2$  выполняется  $f(x) > f(0) = 0$ , а при  $-2 < x < 0$  выполняется  $f(x) < f(0) = 0$ . Заметим, что в любой окрестности точки  $x=0$  функция (4.1) не является монотонно возрастающей.

**Теорема Ферма.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некотором интервале  $X$  и в точке  $x_0 \in X$  принимает наибольшее (наименьшее) значение. Если в этой точке существует конечная производная  $f'(x_0)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .

Хотя теорема требует существования производной только в одной точке, в иллюстративных примерах обычно изображают гладкие графики непрерывно дифференцируемых функций с двумя неперенными «горбами», направленными вниз и вверх. Рассмотрим пример, адекватно иллюстрирующий теорему Ферма.

**4.2. Функция, имеющая производную (равную нулю) только в точке своего наименьшего значения.** Определим функцию

$$f(x) = x^2(D(x) + 1). \quad (4.2)$$

График функции (4.2) изображен на рис. 4.1, б, его точки лежат на верхней параболе ( $y = 2x^2$ ), когда  $x$  – рациональное число, и на нижней ( $y = x^2$ ), когда  $x$  – иррациональное. Очевидно, что функция (4.2) отвечает всем требованиям теоремы Ферма. Она всюду определена, имеет производную в точке  $x=0$  (и только в ней), что

тривиально следует из аналогичного свойства функции из примера 3.1. В точке  $x = 0$  достигается наименьшее значение функции, так как она равна нулю только в нулевой точке, а в любой другой больше нуля как произведение положительных чисел. По теореме Ферма производная в точке  $x = 0$  должна равняться нулю. Действительно, раскрывая скобки в правой части (4.2), вычисляя производную этой суммы в точке  $x = 0$ , учитывая, что функция  $x^2 D(x)$  в нуле имеет нулевую производную, см. пример 3.1, получаем  $f'(0) = 0$ .

Обратное к теореме Ферма утверждение несправедливо, т.е. в предположениях теоремы из равенства нулю производной в точке  $x_0$  не следует то, что  $f(x_0)$  есть наибольшее или наименьшее значение функции. Приведем контрпримеры.

**4.3, 4.4. Функции, имеющие нулевую производную в точке, в которой не достигается их наибольшее (наименьшее) значение.** Функция  $f(x) = x^3$ . Ее производная  $f'(x) = 3x^2$  в точке  $x = 0$  равна нулю. Однако в нуле функция не принимает ни наименьшего, ни наибольшего значения, так как  $f(0) = 0$ , при  $x < 0$   $f(x) < 0$ , а при  $x > 0$   $f(x) > 0$ .

Функция из примера 3.3, см. рис. 3.2,  $f(x) = x^2 \left( D(x) - \frac{1}{2} \right)$  всюду определена, имеет производную в точке  $x = 0$  (и только в ней). Производная в этой точке равна нулю, однако ни наименьшего, ни наибольшего значения функция в нуле не принимает:  $f(0) = 0$ , а в любой окрестности точки  $x = 0$  функция и справа, и слева от нуля принимает бесконечное число раз как отрицательные (при иррациональных  $x$ ), так и положительные (при рациональных  $x$ ) значения.

Снимем предположение о том, что точка  $x_0$  — внутренняя точка (точка интервала). Контрпример.

**4.5. Функция, принимающая наименьшее и наибольшее значения на концах отрезка, производная которой не равна нулю.** Функция  $f(x) = x$  на отрезке  $[0, 1]$  имеет наименьшее значение в точке  $x = 0$  и наибольшее значение в точке  $x = 1$ . Она на отрезке  $[0, 1]$  имеет производную (в точках  $x = 0$  и  $x = 1$  одностороннюю), однако производная всюду равна 1.

**Теорема Дарбу.** Если функция  $f(x)$  имеет конечную производную на отрезке  $[a, b]$ , при этом в точке  $a$  существует производная справа, а в точке  $b$  — производная слева, здесь они обозначаются просто  $f'(a)$  и  $f'(b)$ , то

функция  $f'(x)$  принимает, в качестве своих значений, каждое число между числами  $f'(a)$  и  $f'(b)$ .

В теореме сформулированы только достаточные условия того, чтобы функция  $f'(x)$  принимала, в качестве значения, каждое число между  $f'(a)$  и  $f'(b)$ . Приведем контрпример.

**4.6. Функция, производная которой принимает на концах отрезка значения  $-\infty$  и  $+\infty$ , а внутри отрезка все значения между  $-\infty$  и  $+\infty$ .** Функция  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  на отрезке  $[-1, 1]$  (рис. 4.2,

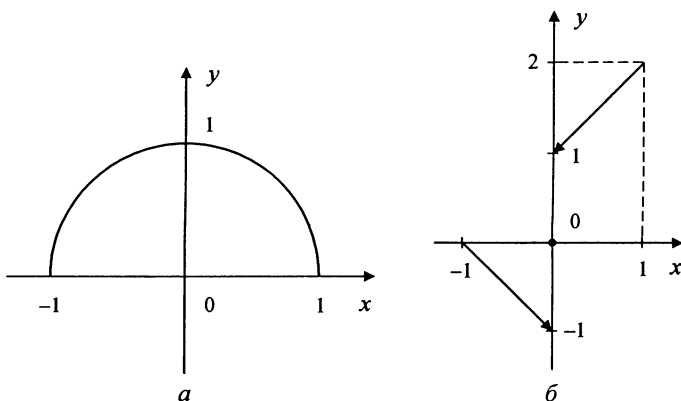


Рис. 4.2

*a*). Имеем  $f'(-1) = +\infty$ ,  $f'(1) = -\infty$ . Заметим, что нарушается предположение теоремы о конечности производной на отрезке  $[a, b]$ . Однако функция  $f'(x)$  принимает при  $-1 < x < 1$ , в качестве значения, каждое промежуточное число между  $-\infty$  и  $+\infty$ .

Попытаемся усилить теорему, снимая отдельные ее предположения. Приведем контрпримеры.

**4.7. Функция, не имеющая производной во внутренней точке отрезка, для которой не выполняется заключение теоремы Дарбу.** Функция  $f(x) = |x|$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Имеем  $f'(-1) = -1$ ,  $f'(1) = 1$ . Производная в точке  $x = 0$  не существует, при этом она принимает на отрезке  $[-1, 1]$  только два значения:  $-1$  и  $1$ .

**4.8. Функция, имеющая бесконечную производную во внутренней точке отрезка, для которой не выполняется заключение теоремы Дарбу.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ x+1, & \text{если } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

на отрезке  $[-1, 1]$  (рис. 4.2, б). Производная существует во всех точках отрезка, но в точке  $x = 0$  выполняется  $f'(0) = +\infty$ , см. аналогичный случай в примере 3.8. Имеем  $f'(-1) = -1$ ,  $f'(1) = 1$ , однако производная не принимает промежуточных значений.

## 4.2. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши

**Теорема Ролля.** Пусть функция  $f(x)$ : 1) определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ ; 2) имеет производную  $f'(x)$ , конечную или равную  $+\infty$  ( $-\infty$ ), в каждой точке интервала  $(a, b)$ ; 3) на концах отрезка принимает равные значения:  $f(a) = f(b)$ . Тогда в интервале  $(a, b)$  найдется такая точка  $c$ , что  $f'(c) = 0$ .

Попытаемся усилить теорему, снимая отдельные ее предположения. Контрпримеры.

**4.9. Функция, не определенная в одной точке отрезка, для которой не выполняется заключение теоремы Ролля.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x-2, & \text{если } 1 < x \leq 2 \end{cases} \quad \text{определена во всех точках отрезка}$$

$[0, 2]$ , кроме точки  $x = 1$ . Она непрерывна и имеет конечную производную во всех точках своей области определения. На концах отрезка  $[0, 2]$  функция принимает равные значения:  $f(0) = f(2) = 0$ . Производная  $f'(x)$ , однако, нигде не равна нулю.

**4.10. Функция, имеющая разрыв в одной точке отрезка, для которой не выполняется заключение теоремы Ролля.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{если } x = 1 \end{cases} \quad \text{определена на отрезке } [0, 1]. \text{ Она имеет}$$

разрыв только в точке  $x = 1$ . Существует конечная производная во всем интервале  $(0, 1)$ . На концах отрезка  $[0, 1]$  функция принимает равные значения:  $f(0) = f(1) = 0$ . Однако производная  $f'(x)$  в интервале  $(0, 1)$  нигде не равна нулю.

**4.11, 4.12. Функции, не имеющие производной в одной точке интервала, для которых не выполняется заключение теоремы Ролля.** Функция  $f(x) = |x|$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Она определена и не-

прерывна на всем отрезке  $[-1, 1]$ . Существует конечная производная  $f'(x)$  всюду, кроме точки  $x = 0$ . На концах отрезка  $[-1, 1]$  функция принимает равные значения:  $f(-1) = f(1) = 1$ . Но между  $-1$  и  $1$  нет такой точки  $c$  ( $-1 < c < 1$ ), что  $f'(c) = 0$ .

Функция  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  на отрезке  $[-1, 1]$ . В этом случае выполняются все предположения теоремы Ролля, кроме существования в точке  $x = 0$  производной. В этой точке существуют производная слева, равная  $-\infty$ , и справа, равная  $+\infty$ , следовательно, производная, даже бесконечная определенного знака, не существует. На интервале  $(-1, 1)$  нет такой точки  $c$ , что  $f'(c) = 0$ .

**4.13. Функция, имеющая различные значения на концах отрезка, для которой не выполняется заключение теоремы Ролля.** Функция  $f(x) = x$  на отрезке  $[0, 1]$  удовлетворяет всем предположениям теоремы, кроме равенства функции на концах отрезка. Производная всюду равна единице.

**Теорема Лагранжа.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , и существует производная  $f'(x)$ , конечная или равная  $+\infty$  ( $-\infty$ ), в каждой точке интервала  $(a, b)$ . Тогда в интервале  $(a, b)$  существует такая точка  $c$ , что выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \quad (4.3)$$

Построим контрпримеры, аналогичные данным в случае теоремы Ролля. При этом, так как теорема Лагранжа – обобщение теоремы Ролля, могут быть использованы функции и отрезки из контрпримеров 4.9–4.12. Но для большей наглядности приведем ниже контрпримеры, в которых  $f(a) \neq f(b)$ .

**4.14. Функция, не определенная в одной точке отрезка, для которой не выполняется заключение теоремы Лагранжа.** Функция  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{если } 1 < x \leq 2 \end{cases}$  определена и непрерывна на отрезке  $[0, 2]$ , кроме точки  $x = 1$ . Во всей области определения функции существует конечная производная  $f'(x)$ . Однако не существует такой точки  $c$  ( $0 < c < 2$ ), для которой выполняется равенство (4.3).

**4.15. Функция, имеющая разрыв в одной точке отрезка, для которой не выполняется заключение теоремы Лагранжа.** Функция  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1 \end{cases}$  определена на отрезке  $[0, 1]$ , она непрерывна всюду, кроме точки  $x = 1$ . Во всем интервале  $(0, 1)$  суще-

ствуется конечная производная  $f'(x)$ . Однако не существует такой точки  $c$  ( $0 < c < 1$ ), для которой выполняется равенство (4.3).

**4.16, 4.17. Функции, не имеющие производной в одной точке интервала, для которых не выполняется заключение теоремы Лагранжа.** Используем функции из контрпримеров 4.11, 4.12:  $f(x) = |x|$  и  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ , но на отрезке  $[-1, 2]$ . Рассуждения из этих контрпримеров, касающиеся несуществования производной  $f'(x)$  в точке  $x = 0$ , справедливы и здесь. Для каждой из данных двух функций в интервале  $(-1, 2)$  нет такой точки  $c$ , для которой выполнялось бы равенство (4.3).

**Теорема Коши.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$ : определены и непрерывны на отрезке  $[a, b]$ ; имеют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$  в каждой точке интервала  $(a, b)$ , при этом  $g'(x) \neq 0$  при любом  $x \in (a, b)$ . Тогда в интервале  $(a, b)$  существует такая точка  $c$ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad (4.4)$$

Сделаем попытки усилить теорему, снимая частные ее предположения. Построение двух контрпримеров поместим в упражнения к данному разделу.

**4.18. Функция  $f(x)$ , имеющая разрыв в одной точке отрезка, при которой не выполняется заключение теоремы Коши.** Рассмотрим функции

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{если } x = 1, \end{cases} \quad g(x) = -x$$

на отрезке  $[0, 1]$ . Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[0, 1]$ , кроме точки  $x = 1$ , в которой функция  $f(x)$  имеет разрыв. Существуют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$  во всем интервале  $(0, 1)$ , производная  $g'(x) \neq 0$  в интервале  $(0, 1)$ . Величина  $\frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = 0$ , в то время как  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = -1$ , в любой точке  $c$  интервала  $(0, 1)$ . Формула (4.4) не выполняется.

**4.19. Не имеющая производной в одной точке интервала функция  $g(x)$ , при которой не выполняется заключение теоремы Коши.** Функции

$$f(x) = x, \quad g(x) = |x|$$

на отрезке  $[-1, 2]$ . Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на этом от-

резке. Существуют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$  во всем интервале  $(-1, 2)$ , кроме точки  $x=0$ , где не существует производная функции  $g(x)$ . Производная  $g'(x) \neq 0$  во всей области своего существования.

Величина  $\frac{f(2)-f(-1)}{g(2)-g(-1)}=3$ , в то время как

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = -1 \text{ в любой точке } c \text{ между } -1 \text{ и } 0, \text{ и } \frac{f'(c)}{g'(c)} = 1 \text{ в любой точке } c \text{ между } 0 \text{ и } 2.$$

При  $c=0$  отношение  $\frac{f'(c)}{g'(c)}$  не определено.

**4.20. Имеющие бесконечные производные в одной точке интервала функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , для которых не выполняется заключение теоремы Коши.** Заметим, что, снимая предположение о конечности во всем интервале  $(a, b)$  производных  $f'(x)$  и  $g'(x)$ , мы обязаны в формулировке теоремы заменить отношение  $\frac{f'(c)}{g'(c)}$  пред-

делом  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Рассмотрим на отрезке  $[-1, 1]$  функции

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3}{2}\sqrt{-x} + \frac{1}{2}, & \text{если } x \leq 0; \\ \frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{2}, & \text{если } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{-x} - \frac{1}{2}, & \text{если } x \leq 0; \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2}, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

(рис. 4.3, а). Их производные запишутся в следующем виде

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{если } x < 0; \\ +\infty, & \text{если } x = 0; \\ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{если } x > 0; \end{cases} \quad g'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{-x}}, & \text{если } x < 0; \\ +\infty, & \text{если } x = 0; \\ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[-1, 1]$ . Существуют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$  во всем интервале  $(-1, 1)$ , кроме точки  $x=0$ , где производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$  существуют, но равны  $+\infty$ . Производная  $g'(x) \neq 0$  во всем интервале  $(-1, 1)$ . При этом величина  $\frac{f(1)-f(-1)}{g(1)-g(-1)}=1$ , в то время как  $\frac{f'(c)}{g'(c)}=3$  в любой

точке  $c$  между  $-1$  и  $0$ , и  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{1}{3}$  в любой точке  $c$  между  $0$  и  $1$ . В

нуле предел слева  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 3$ , а предел справа  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{3}$ ,

т.е.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  не существует.

**4.21. Имеющие нулевые производные в одной точке интервала функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , для которых не выполняется заключение теоремы Коши. Снимая предположение о неравенстве**

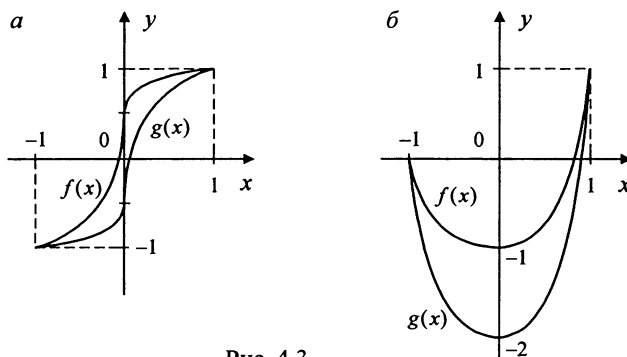


Рис. 4.3

нулю производной  $g'(x)$  во всем интервале  $(a, b)$ , мы обязаны заменить в равенстве (4.4) отношение  $\frac{f'(c)}{g'(c)}$  пределом  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Рассмотрим на отрезке  $[-1, 1]$  функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \leq 0; \\ 2x^2 - 1, & \text{если } x > 0; \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2, & \text{если } x \leq 0; \\ 3x^2 - 2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

(рис. 4.3, б). Их производные запишутся в виде

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } x \leq 0; \\ 4x, & \text{если } x > 0; \end{cases} \quad g'(x) = \begin{cases} 4x, & \text{если } x \leq 0; \\ 6x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны на отрезке  $[-1, 1]$ . Существуют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$  во всем интервале  $(-1, 1)$ . Производная  $g'(x) \neq 0$  во всем интервале  $(-1, 1)$ , кроме точки  $x = 0$ , в которой она равна нулю,  $g'(0) = 0$ . Заметим, что и  $f'(0) = 0$ . При этом величина  $\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = 1$ , в то время как  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{1}{2}$  в любой

точке  $c$  между  $-1$  и  $0$ , и  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2}{3}$  в любой точке  $c$  между  $0$  и  $1$ . В



нуле предел слева  $\lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2}$ , а предел справа  $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2}{3}$ , т.е.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  не существует.

Отметим, что предположения о конечности производных и о неравенстве нулю производной  $g'(x)$  во всем интервале  $(a, b)$  не являются необходимыми

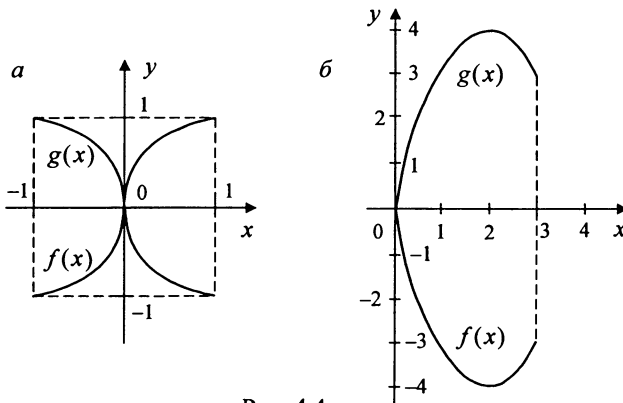


Рис. 4.4

для выполнения равенства (4.4). Только соответственно заменим в равенстве (4.4) отношение  $\frac{f'(c)}{g'(c)}$  пределом  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**4.22. Имеющие бесконечные производные в одной точке интервала функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , для которых заключение теоремы Коши выполняется.** Рассмотрим на  $[-1, 1]$  функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \text{ и } g(x) = -\sqrt[3]{x}$$

(рис. 4.4, а). Запишем их производные

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ +\infty, & \text{если } x = 0; \end{cases} \quad g'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & \text{если } x \neq 0; \\ -\infty, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Величина  $\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = -1$ , при этом отношение  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = -1$  при

всех  $c \neq 0$ , кроме того,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1$ . Таким образом, уточненное равенство (4.4) выполняется в любой точке  $c$  интервала  $(-1, 1)$ .

**4.23. Имеющие нулевые производные в одной точке интервала функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , для которых заключение теоремы Коши выполняется.** Рассмотрим на  $[0, 3]$  функции  $f(x) = x(x-4)$  и  $g(x) = -x(x-4)$  (рис. 4.4, б). Соответственно  $f'(x) = 2x-4$  и  $g'(x) = -2x+4$ . Заметим, что  $f'(2) = 0$  и  $g'(2) = 0$ . Величина  $\frac{f(3)-f(0)}{g(3)-g(0)} = -1$ , при этом отношение  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = -1$  при всех  $c \neq 2$ , кроме того,  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = -1$ . Видим, что уточненное равенство (4.4) выполняется в любой точке  $c$  интервала  $(0, 3)$ .

### Упражнения

**4.1.** Показать, что функция  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{2}x$  имеет конечную положительную производную в точке  $x = 0$ , но не возрастает монотонно в окрестности этой точки.

**4.2.** Дана функция  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ . Показать, что в точке  $x = 0$  функция  $f(x)$  не достигает ни наибольшего, ни наименьшего значений, хотя имеет производную, равную нулю.

**4.3.** Привести пример функции  $f(x)$ , которая удовлетворяет всем условиям теоремы Дарбу, а  $f'(x)$  принимает значения не только между  $f'(a)$  и  $f'(b)$ .

**4.4.** Построить иллюстративный пример, в котором функция  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  удовлетворяет всем предположениям теоремы Ролля, и имеет в точке интервала  $(a, b)$  производную, равную  $+\infty$ .

**4.5.** Выполнить упражнение, аналогичное предыдущему, но для случая теоремы Лагранжа.

**4.6.** Снять в теореме Коши предположение о непрерывности функции  $g(x)$  на  $[a, b]$ . Построить контрпример.

**4.7.** Снять в теореме Коши предположение о существовании производной  $f'(x)$  во всем интервале  $(0, 1)$ . Построить контрпример.

## РАЗДЕЛ 5

# ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

### 5.1. Изменения функции, экстремумы

**Теорема об условии постоянства функции.** Пусть функция  $f(x)$  определена в промежутке  $X$ , замкнутом или нет, конечном или бесконечном, и имеет во всех его внутренних точках конечную производную  $f'(x)$ , а на концах промежутка, если они принадлежат  $X$ , сохраняет непрерывность. Если при этом  $f'(x) = 0$  внутри  $X$ , то  $f(x)$  постоянна в  $X$ .

Попытаемся усилить теорему, снимая отдельные ее предположения. Приведем контрпримеры.

**5.1. Не определенная во внутренней точке промежутка функция  $f(x)$ , такая, что  $f'(x) = 0$ , но  $f(x)$  не константа.**

Функция  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 2, & \text{если } 1 < x \leq 2, \end{cases}$  определенная на отрезке  $[0, 2]$ ,

кроме точки  $x = 1$ . Во всех точках своего определения функция непрерывна и имеет производную, равную нулю. Эта функция не является постоянной на  $[0, 2]$ .

**5.2. Имеющая разрыв на конце промежутка функция  $f(x)$ , такая, что внутри промежутка  $f'(x) = 0$ , но  $f(x)$  не константа.**

Функция  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{если } x = 1 \end{cases}$  определена на отрезке  $[0, 1]$ , имеет

внутри него конечную производную  $f'(x) = 0$ . В точке  $x = 1$  функция имеет разрыв. Она не является постоянной на  $[0, 1]$ .

**Следствие из теоремы об условии постоянства функции.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в промежутке  $X$  и во всех его внутренних точках имеют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$ , а на концах промежутка, если они принадлежат  $X$ , сохраняют непрерывность. Если при этом

$f'(x) = g'(x)$  внутри  $X$ , то во всем промежутке  $X$  эти функции отличаются лишь постоянным слагаемым:  $f(x) = g(x) + C$  ( $C = \text{const}$ ).

Снимая в утверждении отдельные предположения, постараемся его усилить. Построение двух контрпримеров выносим в упражнения к разделу, а сейчас построим следующие контрпримеры.

**5.3. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , не имеющие производных во внутренней точке промежутка, для которых выполняется  $f'(x) = g'(x)$ , но не выполняется  $f(x) = g(x) + C$ .** Функции

$$f(x) = |x| \text{ и } g(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ x+1, & \text{если } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

на отрезке  $[-1, 1]$  (рис. 5.1, а). Обе функции определены на отрезке  $[-1, 1]$  и внутри него имеют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$ ,

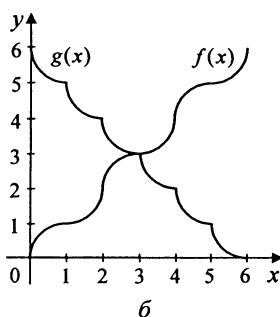
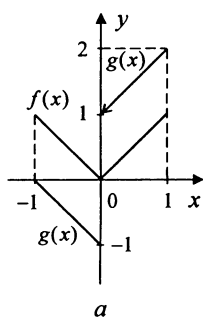


Рис. 5.1

кроме точки  $x = 0$ . На концах отрезка функции непрерывны. Производные  $f'(x) = g'(x)$  всюду, где они существуют. Функции отличаются не постоянным слагаемым.

**5.4. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , имеющие бесконечные производные во внутренней точке промежутка, для которых выполняется  $f'(x) = g'(x)$ , но не выполняется  $f(x) = g(x) + C$ .** Функции

$$f(x) = \sqrt[3]{x}; g(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}-1, & \text{если } -1 \leq x < 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ \sqrt[3]{x}+1, & \text{если } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

на отрезке  $[-1, 1]$  (рис. 5.2). Функции определены на отрезке  $[-1, 1]$ , внутри него имеют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$ , кроме точки  $x = 0$ , где их производные равны  $+\infty$ . На концах отрезка

функции непрерывны. Выполняется  $f'(x) = g'(x)$  всюду на  $[-1, 1]$ . Функции отличаются не постоянным слагаемым.

**Теорема об условии монотонности функции.** Пусть функция  $f(x)$  определена в промежутке  $X$ , замкнутом или нет, конечном или бесконечном, и имеет во всех его внутренних точках конечную производную  $f'(x)$ , а на концах промежутка, если они принадлежат  $X$ , сохраняет непрерывность. Для того чтобы  $f(x)$  была в  $X$  строго монотонно возрастающей (убывающей), достаточно выполнения условия:  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) внутри промежутка  $X$ .

Будем последовательно снимать отдельные предположения теоремы, пытаясь усилить ее. Контрпримеры.

**5.5. Функция  $f(x)$ , не определенная во внутренней точке промежутка, такая, что  $f'(x) = 1$ , но не монотонная.** Функция

$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x-1, & \text{если } 1 < x \leq 2 \end{cases}$  определена на отрезке  $[0, 2]$ , кроме точки  $x = 1$ . Она имеет во всем множестве своего определения конеч-

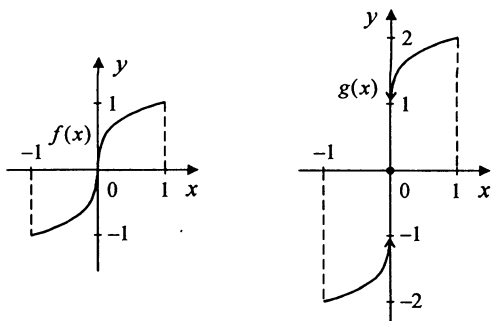


Рис. 5.2

ную положительную производную  $f'(x) = 1 > 0$ , а на концах отрезка сохраняет непрерывность. Функция  $f(x)$  не является монотонной на всем отрезке  $[0, 2]$ .

**5.6. Функция  $f(x)$ , имеющая разрыв на конце промежутка, такая, что  $f'(x) = 1$  внутри промежутка, но не монотонная.**

Функция  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{если } x = 1 \end{cases}$  определена на отрезке  $[0, 1]$ , име-

ет внутри него конечную производную  $f'(x)$ ,  $f'(x) > 0$ . На конце отрезка ( $x = 1$ ) имеет разрыв. Функция  $f(x)$  не является монотонной на всем отрезке  $[0, 1]$ .

Заметим, что предположения о положительности (отрицательности) и конечности производной, о ее существовании во всех внутренних точках промежутка являются только достаточными. Приведем примеры.

**5.7, 5.8. Строго монотонные функции, производные которых принимают нулевые и бесконечные значения, и не существуют в некоторых точках.** Функция  $f(x)$ , график которой составлен из «четвертинок» окружности единичного радиуса (рис. 5.1, б), формульное задание функции не приводим в виду его громоздкости. Функция задана в полуинтервале  $[0, +\infty)$ , в нем непрерывна и имеет производную. Видим, что производная  $f'(x)$  в целых нечетных точках равна нулю, а в целых четных точках – равна  $+\infty$ , а сама функция  $f(x)$  строго монотонно возрастает.

Функция  $g(x)$ , см. рис. 5.1, б, задана аналогично и в том же полуинтервале. Она непрерывна, в целых точках не имеет производной, но имеет односторонние производные, равные нулю и  $-\infty$ . Функция  $g(x)$  строго монотонно убывает.

За более сложными примерами монотонных функций отсылаем читателей к дополнению (разд. 18).

**Определение максимума и минимума функции.** Функция  $f(x)$ , определенная в интервале  $X$ , имеет в точке  $x_0 \in X$  максимум (минимум), если существует такое число  $\delta > 0$ , что  $\delta$ -окрестность  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  точки  $x_0$  целиком лежит в  $X$ , и для любого  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ). Если при этих же предположениях выполняется строгое неравенство  $f(x) < f(x_0)$  ( $f(x) > f(x_0)$ ),  $x \neq x_0$ , то функция имеет в точке  $x_0$  строгий максимум (строгий минимум). При этом сама точка  $x_0$  называется точкой максимума (минимума), строгого максимума (строгого минимума) функции  $f(x)$  соответственно.

Для обозначения максимума и минимума существует общий термин – экстремум.

Обычно для иллюстрации понятий максимума и минимума используют непрерывно дифференцируемые функции, имеющие гладкие графики. Иногда приводят примеры достижения функцией максимума или минимума, когда в одной точке, либо производная функции не существует, например  $f(x) = |x|$  и  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  при  $x = 0$ , либо функция имеет разрыв, например  $f(x) = \{x\}$  – дробная часть числа при целых  $x$ . Заметим, что само понятие экстремума функции не использует предположения о существовании у нее производной, и даже – о ее непрерывности. Приведем примеры.

**5.9. Функция, имеющая максимум и минимум в любой точ-**

ке. Функция  $f(x) = C$ , где  $C$  – постоянное число, имеет в любой точке и минимум, и максимум (нестрогие).

**5.10. Функция, имеющая максимум или минимум в любой точке.** Функция Дирихле имеет в любой рациональной точке максимум, а в любой иррациональной точке – минимум (нестрогие).

**5.11. Ограниченная функция, не имеющая минимумов и максимумов.** Функция  $f(x) = \sin(x D(x))$  ограничена, но не имеет минимумов и максимумов, так как синус принимает свои минимальное и максимальное значения ( $-1$  и  $1$  соответственно) при некоторых иррациональных значениях своего аргумента. Однако функция  $x D(x)$  не имеет иррациональных значений, но принимает все рациональные значения.

**5.12. Функция, точки строгих максимумов и минимумов которой находятся в любом интервале числовой оси.** Функция Римана  $R(x)$ , которая определена формулой (2.2) (рис. 2.3, а). Она известна как пример функции, непрерывной в иррациональных и раз-

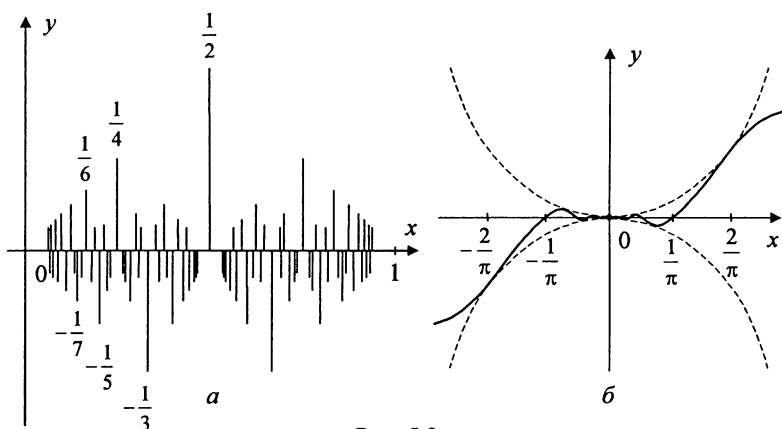


Рис. 5.3

рывной в рациональных точках. Эти ее свойства показаны в примере 2.3. Однако функция Римана обладает еще одним замечательным свойством, она имеет в рациональных точках, а они находятся в любой окрестности любого числа на оси  $Ox$ , строгие максимумы. Действительно, если мы рассмотрим произвольное рациональное число  $x_0$ , представленное в виде несократимой дроби  $\frac{m_0}{n_0}$ , то в  $\frac{1}{n_0}$ -окрестности этого числа могут находиться, исключая  $x_0$ , рациональные числа, только представимые в виде несократимых дробей

$\frac{m}{n}$ , где  $n > n_0$  и, следовательно,  $\frac{1}{n_0} > \frac{1}{n}$ . Учтя еще, что при иррациональных значениях  $x$  функция равна нулю, получаем в этой окрестности для всех  $x \neq x_0$   $R(x_0) > R(x)$ .

Если функцию Римана несколько модифицировать, определив функцию  $r(x): r(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n}, & \text{если } x \text{ рациональное число } \frac{m}{n}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число,} \end{cases}$

где  $\frac{m}{n}$  – несократимая дробь,  $m$  – целое число,  $n$  – натуральное число, то эта функция будет уже иметь в рациональных точках строгие максимумы или строгие минимумы, (рис. 5.3, а) (сравните с рис. 2.3, а). На рисунке показан один период функции. Для наглядности значения функции изображены отрезками. Построение значений функции выполнено для иррациональных  $x$  (эти значения нулевые) и для рациональных  $x$ , кратных  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{16}$ . В точках 0 и 1 значения функции, они равны  $-1$ , не изображены из соображений уменьшения размеров рисунка.

Заметим, что как точки максимумов, так и точки минимумов (строгих) будут находиться в любом, сколь угодно малом, интервале на оси  $Ox$ .

За другими, более сложными примерами функций, имеющих экстремумы, отсылаем читателей к дополнению (разд. 18).

**Необходимое условие экстремума.** Пусть функция  $f(x)$  определена в некотором интервале  $(a, b)$  и точка  $x_0 \in (a, b)$  является точкой экстремума функции  $f(x)$ . Тогда или  $f'(x_0)$  не существует, или  $f'(x_0) = 0$ .

Точки, в которых производная равна нулю, называются стационарными. Предположение о том, что любая стационарная точка – это точка экстремума, т.е. что сформулированное необходимое условие экстремума – это условие и достаточное, опровергается контрпримерами.

**5.13. Функция, стационарная точка которой не является точкой экстремума.** Для функции из примера 4.3  $f(x) = x^3$  точка  $x = 0$  является стационарной, однако в этой точке не достигается ни минимум, ни максимум функции.

**5.14. Функция, не имеющая в стационарной точке экстремума, но в любой окрестности этой точки имеющая бесконечное число строгих максимумов и минимумов.** Функция



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке  $x = 0$  нулевую производную (рис. 5.3, б). Это следует непосредственно из определения производной:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x)^2 \sin \frac{1}{0 + \Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = 0$$

как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную. В любой окрестности нуля существуют значения  $x$ , как отрицательные, так и положительные, при которых функция  $f(x)$  как меньше, так и больше нуля. Так как  $f(0) = 0$ , в нуле экстремум не достигается. В то же время в произвольной окрестности нуля (и слева от него, и справа) функция имеет бесконечное число строгих максимумов и минимумов, и не является ни убывающей, ни возрастающей.

**5.15. Функция, имеющая производную только в одной точке, которая является стационарной, но не является точкой экстремума.** Функция

$$f(x) = x^2 \left( D(x) - \frac{1}{2} \right)$$

из примеров 3.3 и 4.4, см. рис. 3.2. Эта функция непрерывна только в точке  $x = 0$ . В этой точке она имеет производную, равную нулю. Заметим, что  $f(0) = 0$ , но функция в любой окрестности нуля, и слева, и справа от него, не является ни убывающей, ни возрастающей, и принимает как отрицательные (в иррациональных точках), так и положительные (в точках рациональных) значения. Очевидно, в нуле экстремум не достигается.

Сначала приведем подряд три известных правила исследования функций на экстремум (они выражают достаточные признаки максимума и минимума). Затем исследуем несколько функций на экстремум, выясняя применимость этих трех правил.

**Первое правило исследования на экстремум.** Пусть в некоторой окрестности  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  точки  $x_0$  (кроме, может быть, самой точки  $x = x_0$ , где функция  $f(x)$  непрерывна) существует конечная производная  $f'(x)$ , которая и слева от  $x_0$ , и справа от  $x_0$  (по отдельности) сохраняет определенный знак. Тогда возможны три случая: 1) если  $f'(x) > 0$  при  $x < x_0$  и  $f'(x) < 0$  при  $x > x_0$ , то  $x_0$  – точка строгого максимума; 2) если  $f'(x) < 0$  при  $x < x_0$  и  $f'(x) > 0$  при  $x > x_0$ , то  $x_0$  – точка строгого минимума; 3) если же производ-

ная  $f'(x)$  и при  $x < x_0$ , и при  $x > x_0$ , имеет одинаковый знак, тогда в точке  $x_0$  экстремума нет.

**Второе правило исследования на экстремум.** Пусть функция  $f(x)$  в некоторой окрестности точки  $x_0$  имеет первую производную  $f'(x)$ , и  $f'(x_0) = 0$ , т.е. точка  $x_0$  – стационарная, а в самой точке  $x_0$  имеет вторую производную  $f''(x_0)$ . Тогда в точке  $x_0$  функция имеет: если  $f''(x_0) > 0$ , то строгий минимум, если  $f''(x_0) < 0$ , то строгий максимум.

**Третье правило исследования на экстремум.** Пусть функция  $f(x)$  имеет в точке  $x_0$   $n$ ,  $n \geq 1$ , последовательных производных. И пусть все они, до  $(n-1)$ -й включительно, равны в этой точке нулю:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

но  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Если при этом число  $n$  нечетно, то функция не имеет экстремума в точке  $x_0$ . Если же  $n$  четно, то функция имеет в точке  $x_0$  строгий максимум (строгий минимум), если соответственно  $f^{(n)}(x_0) < 0$  ( $f^{(n)}(x_0) > 0$ ).

Заметим, что во всех трех правилах функция в точке, исследуемой на экстремум, предполагается непрерывной. Предположим, что в первом правиле допускается разрыв в точке  $x_0$ . Приведем контрпример.

**5.16. Функция, отвечающая требованиям первого правила исследования на экстремум, кроме требования ее непрерывности в исследуемой точке.** Рассмотрим определенную на отрезке  $[-1, 1]$  функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } -1 \leq x \leq 1, x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

которая имеет разрыв в нуле (рис. 5.4, а). В нуле у нее, очевидно, строгий минимум. Применим к ней в точке  $x = 0$  первое правило, не учитывая ее разрыва в этой точке. Производная функции при  $-1 < x < 0$  существует и положительна, при  $0 < x < 1$  существует и отрицательна. Отсюда делаем ошибочный вывод, что в точке  $x = 0$  функция имеет строгий максимум.

Приведем примеры, показывающие ограниченность действия (применимости) сформулированных правил.

**5.17. Функции, для которых неприменимы все три правила исследования на экстремум.** К функции из примера 5.9 (константе) правила неприменимы, так как исследуют функцию в данной точке только на строгий экстремум. Ни одно из трех правил неприменимо к функциям примеров 5.10 – 5.12, 5.15, 5.16, так как эти функции либо не имеют производной в окрестностях точек, исследуемых на экстремум, либо в этих точках функции разрывны. Не-

способность правил определить отсутствие экстремума в точке  $x = 0$  у функции из примера 5.14 объясняется непостоянством знака производной в любой окрестности нуля, как слева, так и справа от него, и разрывом производной в нуле, [2], т. I, с. 160. Последнее означает несуществование второй и последующих производных в точке  $x = 0$ .

**5.18. Всюду имеющая конечную производную функция, у которой строгий минимум не устанавливается ни одним из трех правил исследования на экстремум. Функция**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left( 2 + \sin \frac{1}{x} \right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

имеет в точке  $x = 0$  минимум (строгий), так как  $f(0) = 0$ , а  $f(x) > 0$  при любом  $x \neq 0$  как произведение двух положительных чисел:  $x^2$

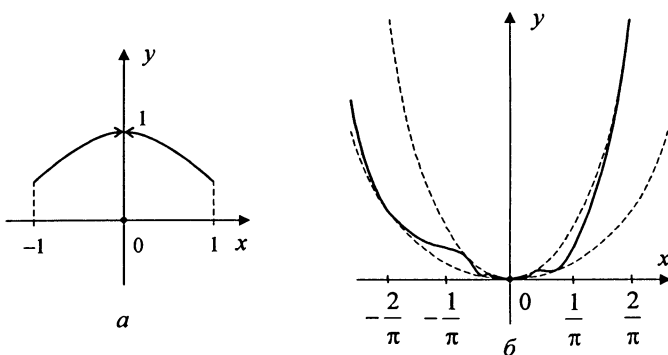


Рис. 5.4

и  $2 + \sin \frac{1}{x}$  (рис. 5.4, б). Эта функция всюду непрерывна. Непрерывность в точках  $x \neq 0$  очевидна, покажем непрерывность в нуле. Действительно, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \left( 2 + \sin \frac{1}{x} \right) \right) = 0 = f(0).$$

Функция имеет конечную производную в любой точке. При  $x \neq 0$  она равна

$$f'(x) = 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

а в нуле  $f'(0) = 0$ . Покажем справедливость последнего равенства. Рассмотрим по определению производной

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(0 + \Delta x)^2 \left( 2 + \sin \frac{1}{0 + \Delta x} \right) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \Delta x \left( 2 + \sin \frac{1}{\Delta x} \right) \right) = 0.$$

Заметим, что в точке  $x = 0$  производная имеет разрыв, так как

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 4x + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} \quad \text{не существует.}$$

Следовательно, второй и последующих производных в точке  $x = 0$  не существует, а значит, неприменимы второе и третье правила. Неприменимо и первое правило, так как и слева и справа от нуля производная в любой окрестности нуля меняет знак бесконечное число раз.

**5.19. Функции, к которым применимо только первое правило исследования на экстремум.** Непрерывные функции  $f(x) = |x|$  и  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  имеют минимум в точке  $x = 0$ . Но в нуле производной у этих функций не существует, следовательно, второе и третье правила для них неприменимы. У первой функции в нуле производные слева и справа равны  $-1$  и  $1$ , соответственно, к ней применимо первое правило, указывающее на минимум в точке  $x = 0$ . У второй функции в нуле слева производная  $-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} < 0$  при  $x < 0$ , справа

производная  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$  при  $x > 0$ , что позволяет применить первое

правило, которое показывает минимум функции в нуле.

**5.20. Функция, к которой применимы только первое и третье правила исследования на экстремум.** Функция  $f(x) = x^4$  имеет строгий минимум в нуле. Она бесконечно дифференцируема. Получаем  $f'(0) = 4x^3|_{x=0} = 0$ ,  $f'(x) < 0$  при  $x < 0$ ,  $f'(x) > 0$  при  $x > 0$ . Первое правило применимо и определяет строгий минимум. Второе правило не срабатывает, так как  $f''(0) = 12x^2|_{x=0} = 0$ . Третье правило применимо, так как  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = 0$ ,  $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ , и определяет строгий минимум в нуле.

**5.21. Всюду имеющая производную функция, к которой применимо только первое правило исследования на экстремум.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ 2x^2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

имеет строгий минимум в точке  $x = 0$ . Она в нуле имеет производную слева, равную  $2x$ , справа  $4x$ . Следовательно,  $f'(0) = 0$ , но вторая производная в нуле не существует. Второе и третье правила неприменимы. Первое применимо, так как  $f'(x) < 0$  при  $x < 0$ ,  $f'(x) > 0$  при  $x > 0$ , и указывает на строгий минимум в нуле.

**5.22. Имеющая производные до порядка  $2n$  включительно функция, к которой применимо только первое правило исследования на экстремум. Функция**

$$f(x) = \begin{cases} -x^{2n+1}, & \text{если } x \leq 0, \\ x^{2n+1}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

где  $n$  – натуральное число, имеет строгий минимум в нуле. Последовательно вычисляя в нуле производные функции слева и справа, мы убедимся, что существуют, непрерывны (в том числе в нуле) и равны нулю в точке  $x = 0$  производные до порядка  $2n$  включительно:  $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(2n)}(0) = 0$ . Но производная  $f^{(2n+1)}(x)$  в нуле не существует (как и все последующие). Следовательно, второе и третье правила не действуют. Однако первое правило применимо, так как выполняется  $f'(x) < 0$  ( $-(2n+1)x^{2n} < 0$ ) при  $x < 0$ ,  $f'(x) > 0$  ( $(2n+1)x^{2n} > 0$ ) при  $x > 0$ , и указывает на строгий минимум в нуле.

В примерах 5.18–5.22 функции имеют минимумы. Для получения примеров с максимумами, каждую из функций достаточно умножить на  $-1$ .

Заметим, что попутно мы получили интересный пример.

**5.23. Функция, производная которой всюду существует и конечна, но имеет разрыв. Это функция из примера 5.18.**

## 5.2. Наибольшее и наименьшее значения функции

**Правило отыскания наибольших и наименьших значений функции.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ . Для отыскания наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке нужно сравнить между собой все максимумы (минимумы) функции  $f(x)$  и ее значения в концах отрезка  $f(a)$  и  $f(b)$ . Наибольшее (наименьшее) из этих чисел и будет наибольшим (наименьшим) значением функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ .

Так как функция предполагается определенной и непрерывной на отрез-

ке, то по теореме Вейерштрасса наименьшее и наибольшее значения будут достигаться функцией в некоторых точках. Покажем, что снятие любого из предположений может привести к случаям несуществования наименьших и наибольших значений, при этом применение правила не дает результата.

**5.24. Не определенная во внутренней точке отрезка функция, не имеющая наибольшего и наименьшего значений.** Функция  $f(x) = x - \operatorname{sgn}(1/x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  не определена в точке

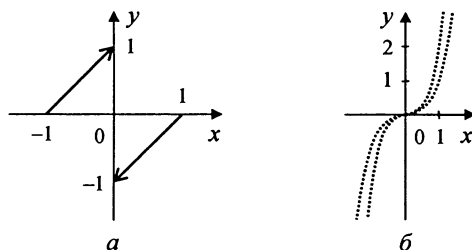


Рис. 5.5

$x = 0$  (рис. 5.5, а). Она непрерывна во всех точках своего определения. Наибольшее и наименьшее значения функцией не достигаются.

**5.25. Имеющая разрыв во внутренней точке отрезка функция, не имеющая наибольшего и наименьшего значений.** Функция  $f(x) = x - \operatorname{sgn} x$  определена на отрезке  $[-1, 1]$ , она имеет одну точку разрыва  $x = 0$ . Функцией не достигаются наибольшее и наименьшее значения.

**5.26. Определенная на бесконечном полуинтервале функция, не имеющая наибольшего и наименьшего значений.** Функция  $f(x) = x \sin x$  (рис. 5.6, а) на бесконечном полуинтервале  $[0, +\infty)$ . Она имеет бесконечное множество строгих максимумов и минимумов, но наибольшего и наименьшего из них не существует.

**5.27. Определенная на всей числовой оси ограниченная функция, не имеющая наибольшего и наименьшего значений.** Ограниченная функция  $f(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \sin x$  на всей числовой оси дает аналогичный пример (рис. 5.6, б).

**5.28. Определенная в полуинтервале ограниченная функция, не имеющая наибольшего и наименьшего значений.** Рассмотрим на полуинтервале  $(0, 1]$  функцию  $\cos x \cdot \sin \frac{1}{x}$ . Она имеет бесконечное множество строгих максимумов и минимумов, но наибольшего и наименьшего среди них нет.

Приведем известный пример функции, неограниченной сверху на любом отрезке.

**5.29. Всюду разрывная функция, которая не имеет максимального значения ни на одном, сколь угодно малом, отрезке числовой оси. Функция**

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x - \text{рациональное число } \frac{m}{n}, \\ 0, & \text{если } x - \text{число иррациональное,} \end{cases} \quad (5.1)$$

где  $\frac{m}{n}$  — несократимая дробь,  $m$  — целое число,  $n$  — натуральное число. Пусть  $x_0$  — середина произвольного отрезка  $[a, b]$ . Рассмотрим любое, сколь угодно малое, число  $\varepsilon > 0$ , такое, что  $\varepsilon$ -окрестность точки  $x_0$  целиком лежит в  $[a, b]$ . Зададимся произ-

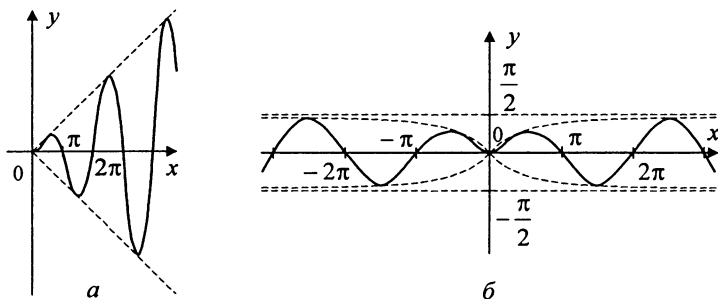


Рис. 5.6

вольным, сколь угодно большим, натуральным числом  $N$ . В  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x_0$  находится лишь конечное, или пустое, множество рациональных точек вида  $\frac{m}{n}$ , где  $n \leq N$ . Следовательно, существует меньшая ненулевая окрестность точки  $x_0$ , не содержащая точек вида  $\frac{m}{n}$ ,  $n \leq N$  (кроме разве что самой точки  $x_0$ , которая может быть рациональной), и соответственно в этой окрестности в рациональных точках  $x \neq x_0$  выполняется  $f(x) > N$ . Это доказывает то, что функция (5.1) на произвольном отрезке  $[a, b]$  не имеет максимального значения. Заметим, что функция имеет разрыв в любой точке  $x = x_0$ . Действительно,  $f(x_0)$  некоторое число (конечное), а в

любой окрестности точки  $x_0$  найдется точка  $x_1$ , такая, что выполнится  $f(x_1) > f(x_0) + 1$ .

Некоторая модификация функции (5.1) делает ее неограниченной сверху и снизу на любом отрезке.

**5.30. Всюду разрывная функция, которая не имеет максимального и минимального значений ни на одном, сколь угодно малом, отрезке числовой оси. Функция**

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n \cdot n, & \text{если } x - \text{рациональное число } \frac{m}{n}, \\ 0, & \text{если } x - \text{число иррациональное,} \end{cases} \quad (5.2)$$

где  $\frac{m}{n}$  – несократимая дробь,  $m$  – целое,  $n$  – натуральное число.

Убедиться в названном выше свойстве функции (5.2) предоставляем читателям.

### 5.3. Выпуклость функции, точки перегиба

**Определение выпуклой и вогнутой функций.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна в промежутке  $X$ , замкнутом или нет, конечном или бесконечном. Если для любых точек  $x_1, x_2 \in X$  выполняется неравенство

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2f(x_2), \quad (5.3)$$

для любых чисел  $q_1, q_2 > 0$ ,  $q_1 + q_2 = 1$ , то функция  $f(x)$  называется выпуклой (выпуклой вниз). Функция называется вогнутой (выпуклой вверх), если вместо (5.3) выполняется

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2). \quad (5.4)$$

Если в (5.3) и (5.4) выполняются строгие неравенства, то функция  $f(x)$  называется строго выпуклой (строго выпуклой вниз) и строго вогнутой (строго выпуклой вверх) соответственно.

Заметим, что предположение об определении функции во всех точках промежутка  $X$  естественно, так как неравенство (5.3) или (5.4), может рассматриваться только на связных множествах (для прямой – это промежуток, замкнутый или нет, конечный или бесконечный). Это объясняется тем, что при произвольных положительных значениях  $q_1$  и  $q_2$  ( $q_1 + q_2 = 1$ ) мы получаем в левой части неравенства все (сплошь) точки  $x = q_1x_1 + q_2x_2$  из интервала с концами  $x_1$  и  $x_2$ . Напомним, что  $x_1$  и  $x_2$  могут совпадать с концами промежутка  $X$ , или быть сколь угодно близки к этим концам.

В то же время предположение о непрерывности функции  $f(x)$  во всем промежутке  $X$  не является обязательным для корректности определения.



**5.31. Выпуклая (вогнутая) функция, имеющая точки разрыва на концах отрезка.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = -1, \\ 0, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1 \end{cases}$$

на отрезке  $[-1, 1]$  (рис. 5.7, а). Она не является непрерывной на этом отрезке, но для нее выполняется неравенство (5.3) для любых точек  $x_1$  и  $x_2$  из  $[-1, 1]$ , включая концы отрезка. Для случая определения вогнутой функции естественно рассмотреть функцию  $g(x) = -f(x)$

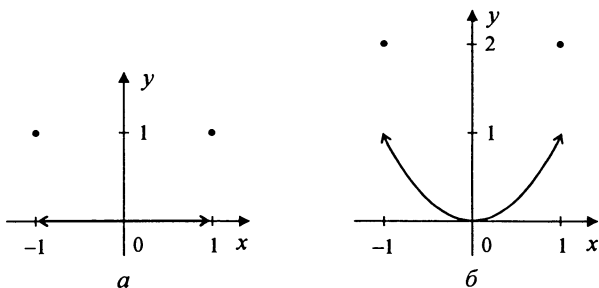


Рис. 5.7

на отрезке  $[-1, 1]$ . Эти две функции вполне можно назвать выпуклой и вогнутой соответственно при снятом предположении о непрерывности функции.

Следующие функции дают примеры строго выпуклой и строго вогнутой функций, при снятом предположении о непрерывности.

**5.32. Строго выпуклая (строго вогнутая) функция, имеющая точки разрыва на концах отрезка.** Функции

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x = -1, \\ x^2, & \text{если } -1 < x < 1, \\ 2, & \text{если } x = 1 \end{cases}$$

(рис. 5.7, б), и  $g(x) = -f(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$  могут быть названы строго выпуклой и строго вогнутой соответственно при снятом предположении о непрерывности.

**Теорема 1 о критерии выпуклости функции.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна в промежутке  $X$  и имеет на нем конечную производную  $f'(x)$ . Для того чтобы  $f(x)$  была выпуклой в  $X$ , необходимо и достаточно, чтобы производная  $f'(x)$  возрастала (строго или нестрого).

Сделаем попытки усилить теорему, снимая отдельные ее предположения. Приведем контрпримеры.

**5.33. Функция  $f(x)$ , не определенная во внутренней точке промежутка, для которой  $f'(x)$  возрастает, но не выпуклая.**  
Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ x^2 - 1, & \text{если } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

определена на отрезке  $[0, 2]$ , кроме точки  $x = 1$  (рис. 5.8, а); она непрерывна и имеет конечную производную во всех точках области

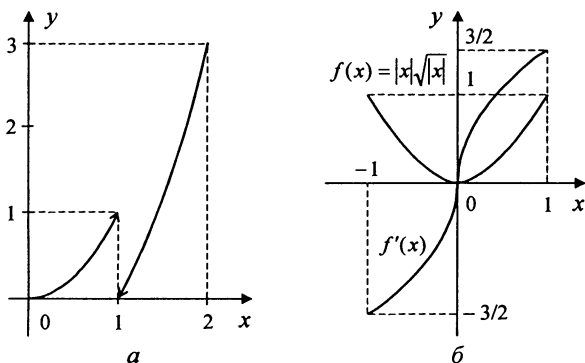


Рис. 5.8

своего определения. Производная  $f'(x)$  строго монотонно возрастает, т.е. для любых двух точек  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) ее области определения  $f'(x_1) < f'(x_2)$ . Функция  $f(x)$  не является выпуклой.

**5.34. Функция  $f(x)$ , имеющая разрыв во внутренней точке промежутка, для которой  $f'(x)$  возрастает, но не выпуклая.**

Функция  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2 - 1, & \text{если } 1 < x \leq 2 \end{cases}$  определена на всем отрезке

$[0, 2]$ ; она непрерывна и имеет строго монотонно возрастающую конечную производную  $f'(x)$  на отрезке  $[0, 2]$ , кроме точки  $x = 1$ . Функция не является выпуклой.

Покажем, что и при нарушении отдельных предположений теоремы функция может быть выпуклой. Примеры.

**5.35. Функция, не имеющая производной во внутренней**

**точке промежутка, но строго выпуклая.** Функция  $f(x) = |\operatorname{tg} x|$  в интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Функция определена и непрерывна в указанном интервале; имеет в нем конечную производную  $f'(x)$ , кроме точки  $x = 0$ ; ее производная  $f'(x)$  строго монотонно возрастает. При невыполнении одного из предположений теоремы функция все же является строго выпуклой в названном интервале.

**5.36. Функция, имеющая бесконечную производную на концах промежутка, но строго выпуклая.** Функция

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

на отрезке  $[-1, 1]$ . Эта функция определена и непрерывна на отрезке  $[-1, 1]$ ; имеет производную  $f'(x)$ , конечную, кроме точек  $-1$  и  $1$ , где производная равна  $f'(-1) = -\infty$ ,  $f'(1) = +\infty$ . Производная  $f'(x)$  строго монотонно возрастает. Одно из предположений теоремы нарушено, однако функция  $f(x)$  является строго выпуклой на отрезке  $[-1, 1]$ .

**Теорема 2 о критериях выпуклости и вогнутости функции.** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна в промежутке  $X$  вместе со своей производной  $f'(x)$  и имеет во всех внутренних точках  $X$  конечную вторую производную  $f''(x)$ . Для выпуклости (вогнутости) функции  $f(x)$  в  $X$  необходимо и достаточно, чтобы внутри  $X$  выполнялось неравенство  $f''(x) \geq 0$  ( $f''(x) \leq 0$ ), а для строгой выпуклости (строгой вогнутости) – строгое неравенство  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ).

И здесь можно использовать функции из контрпримеров 5.33 и 5.34, но несколько изменив пояснения.

**5.37. Функция  $f(x)$ , не определенная во внутренней точке промежутка, для которой  $f''(x) > 0$ , но не выпуклая.** Функция из контрпримера 5.33, помимо сказанного выше, во всех точках области своего определения имеет вторую производную  $f''(x) = 2 > 0$ . Однако функция  $f(x)$  не является строго выпуклой и даже просто выпуклой (см. рис. 5.8, а).

**5.38. Функция  $f(x)$ , имеющая разрыв во внутренней точке промежутка, для которой  $f''(x) > 0$ , но не выпуклая.** Функция из контрпримера 5.34, помимо ранее сказанного, имеет на отрезке  $[0, 2]$ , кроме точки  $x = 1$ , вторую производную  $f''(x) = 2 > 0$ . Но функция не является выпуклой.

Заметим, что функция может быть выпуклой и при нарушении отдельных предположений теоремы. Примеры.

**5.39. Строго выпуклая функция  $f(x)$ , для которой  $f''(x) > 0$  и существует всюду, кроме внутренней точки промежутка.**

Функция  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ 2x^2, & \text{если } 0 < x \leq 1 \end{cases}$  определена и непрерывна вме-

сте со своей производной  $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{если } -1 \leq x \leq 0, \\ 4x, & \text{если } 0 < x \leq 1 \end{cases}$  на отрезке

$[-1, 1]$ . Функция имеет внутри этого отрезка, кроме точки  $x = 0$ , ко-

нечную вторую производную  $f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ 4, & \text{если } 0 < x \leq 1, \end{cases}$  большую

нуля. Одно из условий теоремы нарушено, однако функция строго выпуклая. Интересно, что при этом функция удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. Ее производная строго монотонно возрастает на отрезке  $[-1, 1]$ .

**5.40. Строго выпуклая функция  $f(x)$ , для которой  $f''(x) > 0$  и конечна всюду, кроме внутренней точки промежутка.** Рассмотрим функцию  $f(x) = |x|\sqrt{|x|}$  на отрезке  $[-1, 1]$  (рис. 5.8, б). Она определена и непрерывна вместе со своей производной

$f'(x) = \frac{3}{2} \operatorname{sgn} x \sqrt{|x|}$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Функция имеет внутри этого отрезка, кроме точки  $x = 0$ , конечную вторую производную

$f''(x) = \frac{3}{4\sqrt{|x|}} > 0$ , в нуле  $f''(0) = +\infty$ . Заметим, что функция строго

выпуклая, хотя одно из условий теоремы 2 нарушено. При этом функция отвечает всем посылкам теоремы 1, ее производная строго монотонно возрастает на всем отрезке  $[-1, 1]$ .

**Теорема 3 о критерии выпуклости функции.** Пусть функция  $f(x)$  определена, непрерывна и имеет конечную производную  $f'(x)$  в промежутке  $X$ . Для выпуклости функции  $f(x)$  необходимо и достаточно, чтобы при любом  $x_0 \in X$  точка  $(x_0, f(x_0))$  графика функции лежала над (или на) касательной к графику функции, построенной в любой точке графика.

Отметим, что строго выпуклые функции примеров 5.39 и 5.40 удовлетворяют всем условиям теоремы 3, напомним, что они удовлетворяют также условиям теоремы 1, но не удовлетворяют условиям теоремы 2. Функция примера 5.35 (строго выпуклая) имеет конечную производную в интервале своего

определения, кроме точки  $x = 0$ . Ее график в точке  $(0, 0)$  не имеет касательной. Строго выпуклая функция примера 5.36 имеет производную  $f'(x)$ , конечную, кроме точек  $-1$  и  $1$ , где производная равна  $f'(-1) = -\infty$ ,  $f'(1) = +\infty$ . В точках  $(-1, 0)$  и  $(1, 0)$  графика касательные к нему существуют, но вертикальны. Нетрудно видеть, что функции примеров 5.31 и 5.32 (выпуклые и вогнутые, строго выпуклые и строго вогнутые) и строго выпуклые функции примеров 5.35, 5.36 не удовлетворяют ни одной из теорем 1, 2, 3.

**Определение точки перегиба (первое).** Точку  $M(x_0, f(x_0))$  кривой (графика функции  $f(x)$ ) называют точкой перегиба этой кривой, если существует такое число  $\delta > 0$ , что в интервале  $(x_0 - \delta, x_0)$  функция выпуклая (вогнутая), а в интервале  $(x_0, x_0 + \delta)$  функция вогнутая (выпуклая).

**Определение точки перегиба (второе).** Пусть в точке  $M(x_0, f(x_0))$  кривой (графика функции  $f(x)$ ) существует касательная. Точка  $M$  называется точкой перегиба кривой, если существует такое число  $\delta > 0$ , что в интервале  $(x_0 - \delta, x_0)$  кривая лежит по одну сторону касательной (в одной полуплоскости), а в интервале  $(x_0, x_0 + \delta)$  — по другую сторону касательной (в другой полуплоскости). Иными словами, кривая переходит в этой точке с одной стороны касательной на другую, т.е. кривая и касательная пересекаются.

Эти два определения не эквивалентны. Приведем различные примеры.

**5.41. Кривая, имеющая точку перегиба по первому определению, но не по второму.** Рассмотрим функцию  $f(x) = |e^x - 1|$  непрерывную всюду. Она дифференцируема всюду, кроме точки  $x = 0$ . Соответственно в точке  $(0, 0)$  касательная к графику функции не существует. На бесконечном интервале  $(-\infty, 0)$  функция  $f(x)$  вогнутая, на бесконечном интервале  $(0, +\infty)$  — выпуклая. Точка  $(0, 0)$  является точкой перегиба графика функции по первому определению, но не является таковой по второму определению.

**5.42. Кривая, имеющая точку перегиба по второму определению, но не по первому.** Функция  $f(x) = x^3(D(x) + 1)$ . Она всюду разрывна, кроме точки  $x = 0$ , где существует равная нулю производная и, соответственно, в точке  $(0, 0)$  графика существует касательная к нему (горизонтальная) (см. рис. 5.5, б). Все перечисленные свойства данной функции доказываются аналогично случаю функции  $x^2(D(x) + 1)$ , последовательно см. пример 4.2 и пример 3.1. Ни в одной, сколь угодно малой, левой или правой окрестности точки  $x = 0$  функция  $f(x)$  не является ни выпуклой, ни вогнутой. Однако график функции  $f(x)$  в его точке  $(0, 0)$  переходит с одной

стороны касательной на другую ( $f(x) < 0$  при  $x < 0$ ,  $f(x) > 0$  при  $x > 0$ ). Следовательно, в данном случае первое определение не применимо, но действует второе определение.

Советую читателям дополнительно рассмотреть пример, приведенный в [8], т. I, с. 305, выполнив необходимые выкладки и доказательства.

**Необходимое условие существования точки перегиба.** Пусть функция  $f(x)$  определена и имеет конечную производную  $f'(x)$  в промежутке  $X$ , и в некоторой внутренней точке  $x_0$  промежутка  $X$  существует конечная вторая производная  $f''(x)$ . Если точка  $(x_0, f(x_0))$  есть точка перегиба, то  $f''(x_0) = 0$ .

Отметим, что данное необходимое условие применимо далеко не во всех случаях. Примеры.

**5.43. Функции  $f(x)$  такие, что  $f''(x_0)$  не существуют, а графики функций имеют точки перегиба  $(x_0, f(x_0))$ .** Функции примеров 5.41, 5.42. Их графики имеют точки перегиба  $(0, 0)$ , но функции не имеют в точке  $x = 0$  вторых производных.

Заметим, что при сделанных предположениях о функции условие  $f''(x_0) = 0$  является только необходимым, но не достаточным. Приведем известный контрпример.

**5.44. Функция  $f(x)$  такая, что  $f''(0) = 0$ , но ее график не имеет точки перегиба.** Для функции  $f(x) = x^4$  выполняется условие  $f''(x) = 12x^2 \geq 0$  при любом  $x$  и, по теореме 2, функция  $f(x)$  выпуклая на всей числовой оси. Следовательно, ее график не имеет точек перегиба, хотя в точке  $x = 0$  выполняется  $f''(0) = 0$ .

**Первое правило исследования на точку перегиба.** Пусть функция  $f(x)$  определена и имеет конечную производную  $f'(x)$  в промежутке  $X$ , существует в любой внутренней точке  $X$  конечная вторая производная  $f''(x)$  и во внутренней точке  $x_0 \in X$  выполняется  $f''(x_0) = 0$ . Тогда если при переходе через точку  $x = x_0$  значение  $f''(x)$  меняет знак, то  $x_0$  – точка перегиба, если не меняет знака, то  $x_0$  не является точкой перегиба.

**Второе правило исследования на точку перегиба.** Пусть функция  $f(x)$  определена в промежутке  $X$  и  $x_0$  – некоторая внутренняя точка  $X$ . Пусть в окрестности, лежащей в  $X$ , точки  $x_0$  функция  $f(x)$  имеет  $n$  последовательных производных, и  $n$ -я производная в точке  $x_0$  непрерывна. Пусть при этом  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ , но  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Если число  $n$  четное,  $n \geq 2$ , то точка  $x_0$  не является точкой перегиба, если  $n$  нечетное,  $n \geq 3$ , то точка  $x_0$  есть точка перегиба.

Легко убедиться в неприменимости этих правил к функциям из примеров 5.41, 5.42. Приведем другие примеры их неприменимости.

**5.45, 5.46. Функции, к которым неприменимы оба правила исследования на точку перегиба.** Функция  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  определена на всей числовой оси. Всюду, кроме нуля, имеет конечную производную,  $f'(0) = +\infty$ . В точке  $(0, 0)$  ее график имеет вертикальную касательную и переходит с одной стороны касательной на другую. Отсюда точка  $(0, 0)$  есть точка перегиба. Правила неприменимы, так как предполагают конечность производной в некоторой окрестности этой точки.

Функция  $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x$  всюду определена и имеет конечную производную  $f'(x) = 2|x|$ . Однако вторая производная в нуле не существует. По этой причине исследовать точку  $(0, 0)$  графика функции на наличие перегиба с помощью указанных правил нельзя. Заметим, что точка  $(0, 0)$  графика является точкой перегиба.

**5.47. Функция, к которой применимо первое, но неприменимо второе правило исследования на точку перегиба.** Рассмотрим функцию  $f(x) = x^3 \operatorname{sgn} x$ . Она всюду определена и имеет первую производную  $f'(x) = 3x^2 \operatorname{sgn} x$ , и вторую производную  $f''(x) = 6|x|$ . Причем  $f''(0) = 0$  и при переходе через значение  $x = 0$  производная  $f''(x)$  знака не меняет, следовательно, точка  $(0, 0)$  графика не является точкой перегиба. Первое правило работает. Отметим, что  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$ , но данная функция не имеет в нуле третьей производной, а значит, всех последующих, что не отвечает предположениям второго правила. Здесь оно неприменимо.

Более сложные примеры функций, графики которых имеют в любом, сколь угодно малом интервале, бесконечное число точек перегиба приведены в дополнении (разд. 18).

## 5.4. Раскрытие неопределенностей

**Теорема 1 о раскрытии неопределенностей.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на отрезке  $[a, b]$ ;  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$ ; существуют конечные производные (правосторонние)  $f'(a)$  и  $g'(a)$ , причем  $g'(a) \neq 0$ . Тогда существует предел  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$ .

**Теорема 2 о раскрытии неопределенностей.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на отрезке  $[a, b]$ ;  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$ ; на отрезке  $[a, b]$  существуют конечные производные (в концах отрезка – односторонние)  $f'(x)$ ,  $f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$ ,  $g'(x)$ ,  $g''(x), \dots, g^{(n-1)}(x)$ , равные нулю при  $x = a$ ; существуют конечные производные (правосторонние)  $f^{(n)}(a)$  и  $g^{(n)}(a)$ , причем  $g^{(n)}(a) \neq 0$ . Тогда существует предел  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$ .

**Теорема 3 о раскрытии неопределенностей.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на интервале  $(a, b)$ ;  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$ ; на интервале  $(a, b)$  существуют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$ , причем  $g'(x) \neq 0$  для всех  $x \in (a, b)$ ; существует конечный, или равный  $+\infty$  или  $-\infty$ , предел  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ . Тогда существует предел  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ .

Рассмотрим различные случаи неопределенностей и применимость к ним трех приведенных теорем. Ниже учитываем, что из существования производной в точке следует существование равных ей односторонних производных.

В теореме 1 предполагается существование производных только в одной точке. Построим иллюстративный пример, не расширяющий предположений этой теоремы.

**5.48. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , имеющие производные только в точке  $x = a$ , для которых применима теорема 1 о раскрытии неопределенностей, но неприменимы теоремы 2 и 3.** Пусть

$$f(x) = x^2 D(x) + \sin x, \quad g(x) = x^2 D(x) + x, \quad a = 0.$$

Видим, что  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . Существуют конечные производные  $f'(0)$  и  $g'(0)$ , причем  $g'(0) \neq 0$ . Действительно, получим  $f'(0) = 0 + \cos 0 = 1$ ,  $g'(0) = 0 + 1 = 1$  (в примере 3.1 было показано, что в нуле существует производная функции  $x^2 D(x)$ , равная нулю). Найдем с использованием первого замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 D(x) + \sin x}{x^2 D(x) + x} = 1,$$

что равно отношению  $\frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1$ . Заметим, что функции  $f(x)$  и

$g(x)$  всюду разрывны, кроме точки  $x = 0$ , в которой они имеют производные, см. пример 3.1. Теоремы 2 и 3 к данному случаю неприменимы в виду несуществования у функций производных всюду, кроме точки  $x = 0$ .



**5.49.** Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , имеющие конечные производные в  $(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0$ , для которых неприменимы теоремы 1, 2 и 3 о раскрытии неопределенностей. Пусть

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = \sin x$$

в интервале  $(0, 1)$ ,  $a = 0$ . Видим, что  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . В  $(0, 1)$  существуют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$ , причем  $g'(x) \neq 0$ . В силу последнего теорема 2 неприменима. И теорема 3 неприменима, так как  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f'(x)$  не существует, [2], т. I, с. 160, а  $\lim_{x \rightarrow 0+0} g'(x)$  существует. Теорема 1 также неприменима, так как  $f(x)$  не определена в точке  $x = 0$ .

**5.50.** Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , имеющие конечные производные в  $[a, b]$ , для которых применима теорема 1 о раскрытии неопределенностей, но неприменимы теоремы 2 и 3. Если функцию  $f(x)$  из предыдущего примера доопределить, положив  $f(0) = 0$ , то в нуле будет существовать производная, см. пример 5.14,  $f'(0) = 0$ . Функцию  $g(x) = \sin x$  также будем рассматривать на отрезке  $[0, 1]$ . Все условия теоремы 1 выполняются и, несмотря на разрыв производной  $f'(x)$  у доопределенной функции  $f(x)$ , теорема 1 приме-

нима. Видим, что и  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$ , и  $\frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0$ .

**5.51.** Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , всюду бесконечно дифференцируемые, для которых неприменимы теоремы 1, 2 и 3 о раскрытии неопределенностей. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{-\frac{2}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

Видим, что  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ . На всей числовой оси существуют у обеих функций конечные производные всех порядков. Однако теорема 1 не применима, так как  $g'(0) = 0$ . Теоремы 2 и 3 также неприменимы, так как производная любого порядка функции  $g(x)$  при  $x = 0$  равна нулю, [8], т. I, с. 288. Предел отношения функций, однако, легко вычисляется,  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x)/g(x)) = 1$ .

**Теорема 4 о раскрытии неопределенностей.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на интервале  $(c, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ ; существуют на интервале  $(c, +\infty)$  конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$ , причем  $g'(x) \neq 0$  для всех  $x \in (c, +\infty)$ ; существует конечный, или равный  $+\infty$  или  $-\infty$ , предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ . Тогда существует предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ .

**5.52. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , всюду бесконечно дифференцируемые, для которых неприменима теорема 4 о раскрытии неопределенностей.** Пусть

$$f(x) = e^{-x}, \quad g(x) = e^{-x} + e^{-2x},$$

они определены всюду. Видим, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ .

На всей числовой оси существуют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$ , причем  $g'(x) \neq 0$ . Однако теорема 4 неприменима, так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-e^{-x} - 2e^{-2x}) = 0.$$

Любое многократное применение теоремы 4 не срабатывает, так как производные всех порядков функций  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют нулевой предел при  $x \rightarrow +\infty$ . Заметим, что предел отношения функций существует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{e^{-x} + e^{-2x}} = 1.$$

**Теорема 5 о раскрытии неопределенностей.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на интервале  $(a, b)$ ;  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \infty$ ; существуют на интервале  $(a, b)$  конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$ , причем  $g'(x) \neq 0$  для всех  $x \in (a, b)$ ; существует конечный, или равный  $+\infty$  или  $-\infty$ , предел  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$ . Тогда существует предел  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ .

**5.53. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , имеющие конечные производные в  $(a, b)$ ,  $g'(x) \neq 0$ , для которых неприменима теорема 5 о раскрытии неопределенностей.** Пусть

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \cos \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{x^2}, \quad a = 0.$$

Функции всюду определены, кроме точки  $x = 0$ . Видим, что  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ . Всюду, кроме точки  $x = 0$ , существ-

вуют конечные производные  $f'(x)$  и  $g'(x)$ . Но теорема 5 неприменима, так как предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  не существует. Действительно,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} + \sin \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3} \left( \sin \frac{1}{x^2} - 1 \right), \quad g'(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0,$$

$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 1 - \sin \frac{1}{x^2}$ . Это отношение в любой, сколь угодно малой, окрестности нуля при стремлении  $x \rightarrow 0$  будет бесконечное число раз принимать все значения от 0 до 2. Заметим, что предел отношения функций  $f(x)$  и  $g(x)$  существует и равен 1.

### Упражнения

5.1. В следствии из теоремы об условии постоянства функции снять предположение об определении функции  $g(x)$  во всех точках промежутка  $X$ . Привести контрпример, опровергающий полученное утверждение.

5.2. В следствии из теоремы об условии постоянства функции снять предположение о непрерывности функции  $g(x)$  в концах промежутка. Построить контрпример.

5.3. Привести пример двух строго монотонных функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , сумма которых не монотонна.

5.4. Дать пример всюду имеющей непрерывную производную функции  $f(x)$ , стационарная точка которой не является точкой экстремума. Однако в любой окрестности этой точки имеется бесконечно много строгих минимумов и максимумов функции  $f(x)$ .

5.5. Привести пример функции, для которой применимы все три правила исследования на экстремум.

5.6. Построить пример функции, имеющей строгие минимумы в точках  $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , но не имеющей ни одного максимума.

5.7. Дать пример функции, график которой имеет точку перегиба по второму определению, но не имеет ее по первому определению, при этом касательная в точке перегиба вертикальна.

5.8. Привести пример функции, для которой действует и первое, и второе правила исследования на точку перегиба.

5.9. Показать неприменимость теоремы 5 о раскрытии неопределенностей к

функциям  $f(x) = e^x + e^{-\frac{1}{x}}$  и  $g(x) = e^x - e^{-\frac{1}{x}}$  при  $x \rightarrow 0$ .

## РАЗДЕЛ 6

# ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 6.1. Предел функции

**Определение предела функции нескольких переменных.** Функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  имеет предел, равный числу  $A$ , при стремлении переменных  $x_1, x_2, \dots, x_m$  к  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , соответственно, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что неравенство  $|f(x_1, x_2, \dots, x_m) - A| < \varepsilon$  выполняется для всех  $x_1, x_2, \dots, x_m$  таких, что  $|x_1 - a_1| < \delta, \dots, |x_m - a_m| < \delta$ .

В определении предполагается произвольный «способ» стремления переменных  $x_1, x_2, \dots, x_m$  к значениям  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Пусть стремление пере-

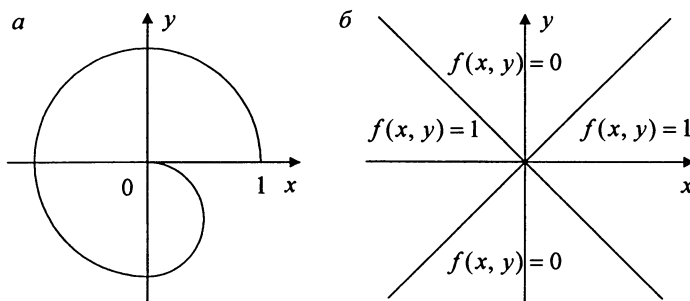


Рис. 6.1

менных к предельной точке происходит по любому направлению, т.е. по любому лучу, исходящему из точки  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ . Пусть полученные при этом пределы функции равны между собой. Означает ли это, что существует предел функции в точке  $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ? Построим контрпример.

**6.1. Функция, у которой существуют и равны пределы по всем направлениям в точке, но предела в ней не существует.**

Функция  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in L \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin L \end{cases}$ , где  $L$  – кривая, составлен-

ная из дуги единичной окружности с центром в точке  $(0, 0)$  – в первом, втором и третьем квадрантах и дуги окружности радиусом  $1/2$  с центром в точке  $(0, -1/2)$  – в четвертом квадранте (рис. 6.1, а). Эта кривая пересекается любым лучом  $l$ , исходящим из начала координат, ровно в одной точке, отличной от точки  $(0, 0)$ . Если приближаться к точке  $(0, 0)$  по любому такому лучу  $l$ , то получим:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), (x,y) \in l} f(x, y) = 0, \text{ т.е. по всем направлениям предел суще-}$$

ствует и равен нулю. Однако предела в смысле определения в точке  $(0, 0)$  не существует, так как в любой окрестности точки  $(0, 0)$  функция принимает значения 0 и 1.

**Теорема о связи между двойными и повторными пределами.** Если существует конечный, или равный  $+\infty$  или  $-\infty$ , двойной предел

$$A = \lim_{x \rightarrow a, y \rightarrow b} f(x, y)$$

и при любом  $y \in Y$  существует конечный предел по  $x$   $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ , то

существует повторный предел  $\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ , который равен

двойному. Здесь предполагается, что область определения  $M$  функции  $f(x, y)$  такова, что  $x$ , независимо от  $y$ , может принимать произвольное значение в некотором множестве  $X$  с предельной точкой  $a$ , которому она не принадлежит, и аналогично  $y$ , независимо от  $x$ , изменяется в множестве  $Y$  с предельной точкой  $b$ , не принадлежащей ему.

Интересные контрпримеры к данной теореме даны в [2], т. I, с. 233–234 и в [1], с. 149–151. Здесь мы дополним их, используя более простые функции. Сведем примеры функций в таблицу.

| Существование повторных пределов                | Двойной предел существует                          | Двойной предел не существует                                                                                               |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Существуют оба повторных предела и они равны    | Например, функция $f(x, y) \equiv 0$ в любой точке | $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y \end{cases}$ в точке $(0, 0)$              |
| Существуют оба повторных предела и они не равны | Такая функция не существует                        | $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если }  x  \geq  y , \\ 0, & \text{если }  x  <  y  \end{cases}$ в точке $(0, 0)$      |
| Существует один повторный предел                | $f(x, y) = yD(x)$ в точке $(0, 0)$                 | $f(x, y) = \begin{cases} D(x+y), & \text{если }  x  >  y , \\ 0, & \text{если }  x  \leq  y  \end{cases}$ в точке $(0, 0)$ |

|                                           |                                                      |                                       |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------|
| Не существуют<br>оба повторных<br>предела | $f(x, y) =$<br>$= xD(y) + yD(x)$<br>в точке $(0, 0)$ | $f(x, y) = D(x + y)$<br>в любой точке |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------------|---------------------------------------|

Является ли существование двойного предела достаточным для существования пределов повторных? Контрпримеры из первого столбца таблицы показывают, что нет. Является ли существование двойного предела необходимым для существования повторных пределов. Контрпримеры из второго столбца таблицы говорят, что нет. Последовательно, сначала для первого, затем для второго столбца таблицы, рассмотрим эти контрпримеры.

**6.2. Функция, у которой существует двойной предел и один повторный.** Функция  $f(x, y) = yD(x)$  имеет предел, равный нулю, в точке  $(0, 0)$ , это следует из неравенства  $|yD(x)| \leq |y|$ , так как  $0 \leq D(x) \leq 1$ . При любом фиксированном  $x$  существует (конечный) простой предел по  $y$   $\psi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} (yD(x)) = 0$ . Следовательно,

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} (yD(x)) = 0$ . Однако ни при каком фиксированном значении  $y$  ( $y \neq 0$ ) не существует простой предел по  $x$   $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow 0} (yD(x))$ ,

так как функция Дирихле не имеет предела ни в одной точке.

**6.3. Функция, у которой существует двойной предел, но не существуют оба повторных предела.** Функция

$$f(x, y) = xD(y) + yD(x)$$

имеет предел в точке  $(0, 0)$ , который равен нулю, так как выполняется  $|xD(y) + yD(x)| \leq |x| + |y|$ . Ни при каком фиксированном значении  $y$  ( $y \neq 0$ ) не существует простой предел по  $x$

$$\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow 0} (xD(y) + yD(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} (yD(x)),$$

см. контрпример 6.2. Отсюда, не существует и двойной предел  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ . В силу симметрии функции относительно переменных не существует также и  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ .

**6.4. Функция, у которой не существует двойного предела, но существуют и равны оба повторных предела.** Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y \end{cases}$$

не имеет предела в точке  $(0, 0)$ , так как в любой окрестности этой точки функция принимает значения 0 и 1. При любом фиксированном значении  $y = y_0$  ( $y_0 \neq 0$ ) для любого  $x \neq y_0$   $f(x, y_0) = 0$ . От-

сюда для любого  $y_0 \neq 0$   $\varphi(y_0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y_0) = 0$ , и получаем  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ . Аналогично, в силу симметрии функции по переменным, получаем  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ .

**6.5. Функция, у которой не существует двойного предела, но существуют и различны оба повторных предела.** Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \geq |y|, \\ 0, & \text{если } |x| < |y| \end{cases}$$

не имеет предела в точке  $(0, 0)$ , так как в любой окрестности этой точки функция принимает значения 0 и 1 (рис. 6.1, б). Ось  $Ox$  целиком лежит внутри области  $|x| \geq |y|$ , в которой  $f(x, y) = 1$ . Ось  $Oy$  целиком, кроме точки  $(0, 0)$ , лежит внутри области  $|x| < |y|$ , в которой  $f(x, y) = 0$ . Поэтому при любом фиксированном значении  $x$  ( $x \neq 0$ ) существует простой предел по  $y$   $\psi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$ , а при любом фиксированном значении  $y$  ( $y \neq 0$ ) существует простой предел по  $x$   $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ .

Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$ , а  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ . Этот пример показывает, что повторные пределы могут быть неравными.

**6.6. Функция, у которой не существует двойного предела, но существует один повторный предел.** Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} D(x + y), & \text{если } |x| > |y|, \\ 0, & \text{если } |x| \leq |y| \end{cases}$$

не имеет предела в точке  $(0, 0)$ , так как в любой окрестности точки  $(0, 0)$  принимает значения 0 и 1. Ось  $Ox$  целиком, кроме точки  $(0, 0)$ , лежит внутри области  $|x| > |y|$ , в которой  $f(x, y) = D(x + y)$ . Ось  $Oy$  целиком лежит внутри области  $|x| \leq |y|$ , в которой  $f(x, y) = 0$ . Поэтому при любом фиксированном значении  $x$  ( $x \neq 0$ ) не существует простого предела по  $y$ , так как функция  $D(x + y)$  нигде не имеет предела, а при любом фиксированном значении  $y$  ( $y \neq 0$ ) существует простой предел по переменной  $x$ , равный  $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ . Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  не существует, а  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ .

**6.7. Функция, у которой не существует двойного предела и не существуют оба повторных предела. Функция**

$$f(x, y) = D(x + y)$$

не имеет предела ни в какой точке  $(x, y)$ , так как в любой ее окрестности принимает значения 0 и 1. В любой точке  $(x_0, y_0)$  функция  $f(x_0, y) = D(x_0 + y)$  переменной  $y$  не имеет предела по  $y$ , а функ-

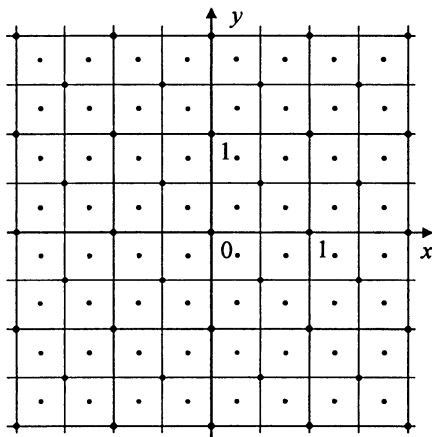


Рис. 6.2

ция  $f(x, y_0) = D(x + y_0)$  переменной  $x$  не имеет предела по  $x$ . Отсюда повторные пределы  $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$  и  $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$  не существуют ни в какой точке.

Построим функцию, определенную на всей плоскости  $Oxy$ , которая нигде не имеет предела, но в любой точке имеет равные повторные пределы.

**6.8. Функция, у которой нигде не существует двойного предела, но всюду существуют оба повторных равных предела.**

Функция  $f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in M, \\ 0, & \text{если } x \notin M, \end{cases}$  где  $M$  – множество точек, построенное следующим образом (рис. 6.2). На рис. 6.2 показаны шаги 0, 1 и 2 построения  $M$ . На шаге 0 относим к  $M$  точки с целыми координатами (назовем такие точки целыми). На шаге 1 относим к  $M$  точки, расположенные в центрах квадратов с вершинами в целых соседних точках (со сторонами длиной 1). Далее на каждом шаге  $k+1$  относим к  $M$  точки, расположенные в центрах квадратов с



вершинами в соседних, ранее построенных, точках (со сторонами длиной  $\frac{1}{2^k}$ ). Прделав данное построение для  $k = 1, 2, \dots$  получим множество точек  $M$ , обладающее двумя свойствами: 1) точки множества  $M$  располагаются в любой (сколь угодно малой) окрестности любой точки плоскости  $Oxy$ , так как при построении стороны квадратов становятся сколь угодно малыми; 2) любая прямая, параллельная координатным осям, либо не пересекает множество  $M$ , либо пересекает его в изолированных (отстоящих друг от друга на фиксированное расстояние) точках. Из первого свойства следует, что функция  $f(x, y)$  нигде не имеет предела, так как в любой окрестности любой точки принимает значения 0 и 1. Из второго свойства следует, что в любой точке  $(x_0, y_0)$  функция имеет повторные пределы, равные нулю. Действительно, каким бы ни было число  $y$ , приближаясь к прямой  $x = x_0$  по прямой  $y = \text{const}$ , мы в некоторой одномерной (на прямой  $y = \text{const}$ ) малой окрестности точки  $(x_0, y)$ , исключая, может быть, саму эту точку, получим  $f(x, y) = 0$ . Иными словами, предел  $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = 0$ , т.е.  $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = 0$ . В силу симметрии по переменным  $x$  и  $y$  множества  $M$ , а значит, и функции получаем также  $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = 0$ .

## 6.2. Непрерывность функции

**Определение непрерывности функции в точке.** Предположим, что функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  определена на некотором множестве  $M$  точек  $m$ -мерного пространства и  $M'(x'_1, \dots, x'_m)$  – предельная точка этого множества,  $M' \in M$ . Функция  $f(x_1, \dots, x_m)$  непрерывна в точке  $M'(x'_1, \dots, x'_m)$ , если выполняется равенство  $\lim_{x_1 \rightarrow x'_1, \dots, x_m \rightarrow x'_m} f(x_1, \dots, x_m) = f(x'_1, \dots, x'_m)$ ; иначе функция имеет разрыв в точке  $M'$ . Рассматривая разности  $x_1 - x'_1, \dots, x_m - x'_m$  как приращения  $\Delta x'_1, \dots, \Delta x'_m$  соответствующих независимых переменных, а разность  $f(x_1, \dots, x_m) - f(x'_1, \dots, x'_m)$  – как приращение функции, можно сказать, что если бесконечно малым приращениям независимых переменных отвечает бесконечно малое приращение функции, то функция непрерывна в точке  $M'$ .

Рассмотрим отвечающий определению пример функции, непрерывной только в одной точке.

## 6.9. Функция двух переменных, непрерывная только в одной

**точке.** Функция  $f(x, y) = (|x| + |y|)D(x + y)$  непрерывна только в точке  $(0, 0)$ . Действительно,  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} ((|x| + |y|)D(x + y)) = 0$  как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную и  $f(0, 0) = 0$ . Функция имеет разрыв в любой точке  $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ , так как в произвольной окрестности такой точки величина  $x + y$  принимает как иррациональные, так и рациональные значения, а функция  $f(x, y) = (|x| + |y|)D(x + y)$  принимает соответственно значения как равные 0, так и сколь угодно близкие к величине  $|x_0| + |y_0| \neq 0$ .

Заметим, что функция может быть непрерывной в точке по всем своим переменным в отдельности или по некоторым отдельным совокупностям переменных, но иметь разрыв в этой точке. Приведем контрпримеры.

**6.10. Функция двух переменных, непрерывная по каждому из них в отдельности в своей точке разрыва.** Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y \neq 0, \\ 0, & \text{в других точках,} \end{cases}$$

очевидно, непрерывна в точке  $(0, 0)$  по переменным  $x$  и  $y$  в отдельности, так как на координатных осях тождественно равна нулю:  $f(x, 0) \equiv 0$ ,  $f(0, y) \equiv 0$ . Но по совокупности переменных она разрывна, так как в любой окрестности нуля принимает значения 0 и 1, т.е. не имеет предела в точке  $(0, 0)$ .

**6.11. Функция трех переменных, непрерывная по каждому из них и по их парным совокупностям в своей точке разрыва.** Функция

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 y^2 z^2}{x^6 + y^6 + z^6},$$

доопределенная в точке  $(0, 0, 0)$ ,  $f(0, 0, 0) = 0$ , непрерывна в этой точке по всем отдельно взятым переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и по отдельным их совокупностям  $(x, y)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, z)$ , так как на всех координатных осях и на всех координатных плоскостях тождественно равна нулю. Однако на диагональной прямой  $x = y = z$  функция имеет

разрыв в точке  $(0, 0, 0)$ , а именно  $f(x, x, x) = \begin{cases} 1/3, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$  Следовательно, функция имеет разрыв в точке  $(0, 0, 0)$  по всей совокупности переменных  $(x, y, z)$ .

Сформулируем следующее утверждение, несколько видоизменив приведенное в определении. Если бесконечно малому приращению функции в точке  $M'$  отвечают бесконечно малые приращения независимых переменных в этой точке, то функция непрерывна в точке  $M'$ . Приведем контрпример.

**6.12. Непрерывная функция, бесконечно малому приращению которой соответствуют приращения переменных, большие единицы. Функция**

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x^2 + y^2 \leq 1, \\ x^2 + y^2 - 1, & \text{если } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$$

непрерывна на всей плоскости  $Oxy$  (рис. 6.3, а). Рассмотрим точку  $(0, 0)$ , приращению в ней (любому ненулевому) функции  $f(x, y)$

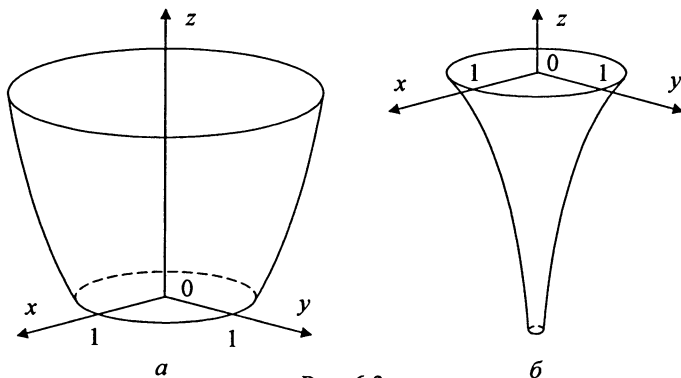


Рис. 6.3

соответствуют только приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  аргументов такие, что  $\Delta x^2 + \Delta y^2 > 1$ , т.е. не бесконечно малые.

**Теорема о суперпозиции непрерывных функций.** Предположим, что функция  $u = f(x_1, \dots, x_m)$  определена на множестве  $M$   $m$ -мерных точек  $M(x_1, \dots, x_m)$ , определены также  $m$  функций

$$x_1 = \varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, x_m = \varphi_m(t_1, \dots, t_k) \quad (6.1)$$

на некотором множестве  $P$   $k$ -мерных точек  $P(t_1, \dots, t_k)$ , причем при любой точке  $P \in P$ , точка  $M \in M$ , где  $M$  имеет координаты (6.1). Если все функции  $\varphi_i(P)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , непрерывны в точке  $P'(t'_1, \dots, t'_k)$  из  $P$ , а функция  $f(M)$  непрерывна в точке  $M'(x'_1, \dots, x'_m)$ ,  $x'_1 = \varphi_1(t'_1, \dots, t'_k)$ ,  $\dots$ ,  $x'_m = \varphi_m(t'_1, \dots, t'_k)$ , то и сложная функция  $u = f(\varphi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \varphi_m(t_1, \dots, t_k))$  также непрерывна в точке  $P'(t'_1, \dots, t'_k)$ .

Заметим, что в данной теореме сформулированы достаточные условия непрерывности сложной функции, которые не являются необходимыми.

**6.13. Непрерывная функция двух переменных, которая является суперпозицией непрерывной и двух всюду разрывных функций.** Рассмотрим функции

$$z = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2, \quad x = D(u - v), \quad y = D(u + v).$$

Функция переменных  $x, y$  является всюду непрерывной, а функции  $x = D(u - v)$  и  $y = D(u + v)$  переменных  $u$  и  $v$  всюду разрывны.

Сложная функция  $z = \left(D(u - v) - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(D(u + v) - \frac{1}{2}\right)^2 \equiv \frac{1}{2}$  тождественно равняется константе и является всюду непрерывной.

**6.14. Непрерывная функция двух переменных, которая является суперпозицией всюду разрывных функций.** Рассмотрим функцию  $z = D(x + y)$ , где  $x = D(u - v)$ ,  $y = D(u + v)$ . В этом случае каждая из заданных функций является всюду разрывной. Сложная функция  $z = D(D(u - v) + D(u + v)) \equiv 1$  как функция Дирихле от рациональных значений аргумента  $(D(u - v) + D(u + v))$  может равняться только 0, 1 или 2) и является всюду непрерывной.

**Теорема об ограниченности непрерывной функции.** Если функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области  $D$ , то она ограничена:  $m \leq f(x, y) \leq M$  для всех  $(x, y) \in D$ , где  $m$  и  $M$  – некоторые числа.

Покажем, что все отдельные предположения теоремы необходимы, т.е. их снятие дает ложные утверждения. Контрпримеры.

**6.15. Непрерывная функция двух переменных, не определенная в одной точке замкнутой области и неограниченная.** Пусть область  $D$  – замкнутый круг с единичным радиусом  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Функция  $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  определена во всей области  $D$ , кроме точки  $(0, 0)$ , и непрерывна во всей области своего определения (рис. 6.3, б). Функция не ограничена снизу.

**6.16. Функция двух переменных, имеющая одну точку разрыва в замкнутой области и неограниченная.** В предыдущем примере доопределим функцию в точке  $(0, 0)$ ,  $f(0, 0) = 1$ . В этом случае у функции будет одна точка разрыва  $(0, 0)$ . Функция не ограничена снизу.

**6.17. Непрерывная функция двух переменных, определенная в незамкнутой области и неограниченная.** Рассмотрим область и функцию из предыдущего примера, но удалим из области  $D$  точку

$(0, 0)$ . Получим незамкнутую ограниченную область  $D'$ . Функция  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$  будет в области  $D'$  всюду определена и непрерывна, однако не будет ограничена снизу.

**6.18. Непрерывная функция двух переменных, определенная в неограниченной области и неограниченная.** Пусть область — вся плоскость  $Oxy$ . Функция  $f(x, y) = x + y$  всюду определена и непрерывна, но не ограничена ни снизу, ни сверху.

**Теорема Кантора.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна в ограниченной замкнутой области  $D$ , то она равномерно непрерывна в  $D$ .

Попытаемся усилить теорему, снимая отдельные ее предположения. Контрпримеры.

**6.19. Непрерывная функция двух переменных, определенная в неограниченной области и не равномерно непрерывная.** Функция  $f(x, y) = e^{x+y}$  на всей плоскости  $Oxy$  не является равномерно непрерывной. Действительно, рассмотрим любое число  $\varepsilon > 0$ . Пусть для него найдено некоторое число  $\delta > 0$ , о котором говорится в определении равномерной непрерывности, [2], т. I, с. 241. Рассмотрим на оси  $Ox$  две различные точки  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_2 - x_1 = d > 0$ ), для которых  $|x_2 - x_1| = d < \delta$ , и величину

$$|f(x_2, 0) - f(x_1, 0)| = e^{x_2} - e^{x_1} = e^{x_1}(e^{x_2-x_1} - 1) = e^{x_1}(e^d - 1). \quad (6.2)$$

Для данного числа  $\delta > 0$  и константы  $0 < d < \delta$  второй множитель в правой части (6.2) есть постоянная, строго большая нуля. Отсюда, выбирая достаточно большие числа  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_2 - x_1 = d > 0$ ), можно сделать правую часть (6.2), а значит, величину  $|f(x_2, 0) - f(x_1, 0)|$  больше любого  $\varepsilon$ . На всей плоскости  $Oxy$  равномерной непрерывности у функции нет.

**6.20. Непрерывная функция двух переменных, определенная в незамкнутой области и не равномерно непрерывная.** Функция

$$f(x, y) = \operatorname{tg}(|x| + |y|) \text{ в области } D: |x| + |y| < \frac{\pi}{2} \text{ не является равномерно}$$

непрерывной. Область  $D$  ограниченная, но открытая. При стремлении точки изнутри области к ее границе функция стремится к бесконечности. Рассмотрим любое число  $\varepsilon > 0$ . Пусть для него найдено число  $\delta > 0$ , о котором говорится в определении равномерной непрерывности. Рассмотрим на оси  $Ox$  в интервале  $(\pi/4, \pi/2)$  две

различные точки  $x_1$  и  $x_2$  области  $D$  ( $x_2 - x_1 = d > 0$ ), для которых  $|x_2 - x_1| = d < \delta$ , и величину

$$\begin{aligned} |f(x_2, 0) - f(x_1, 0)| &= \operatorname{tg}(x_2) - \operatorname{tg}(x_1) = \\ &= \operatorname{tg}(x_2 - x_1)(1 + \operatorname{tg} x_2 \operatorname{tg} x_1) = \operatorname{tg} d(1 + \operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2). \end{aligned} \quad (6.3)$$

В (6.3) использовано известное тригонометрическое тождество. Для данного числа  $\delta > 0$  и константы  $0 < d < \delta$  первый множитель в правой части (6.3) есть постоянная, строго большая нуля. Так как  $x_1$  находится в интервале  $(\pi/4, \pi/2)$ , величина  $\operatorname{tg} x_1 > x_1 > \pi/4$ . Отсюда, выбирая число  $x_2$  достаточно близким к  $\frac{\pi}{2}$  при сохранении условия ( $x_2 - x_1 = d > 0$ ), можно сделать величину  $\operatorname{tg} x_2$  сколь угодно большой вместе с произведением  $\operatorname{tg} x_1 \operatorname{tg} x_2$ . Следовательно, вся правая часть (6.3) и соответственно величина  $|f(x_2, 0) - f(x_1, 0)|$  могут быть сделаны больше любого  $\varepsilon > 0$ . Это означает отсутствие равномерной непрерывности функции  $f(x, y)$ .

### Упражнения

6.1. Показать, что для функции  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \ln(x^2) \sin \ln(y^2)$  существует  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} f(x, y)$ , но не существуют повторные пределы  $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y))$  и  $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y))$ .

6.2. Показать, что для функции  $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$  существуют и равны повторные пределы  $\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$  и  $\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = 0$ , но не существует  $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} f(x, y)$ .

6.3. Привести пример функции  $f(x, y)$  непрерывной только в точках  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  и  $(-1, -1)$ .

6.4. Построить функцию четырех переменных, в своей точке разрыва непрерывную по каждому из этих переменных и по их совокупностям (парным и тройным).

6.5. Используя функции Римана и Дирихле, построить непрерывную функцию трех переменных, которая является суперпозицией разрывных функций.

6.6. Будет ли равномерно непрерывной функция  $f(x, y) = \sin \frac{2}{2 - x - y}$  в открытом квадрате  $0 < x, y < 1$ ?

## РАЗДЕЛ 7

### ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

#### 7.1. Частные производные, дифференцируемость, полный дифференциал

**Определение частной производной.** Пусть функция  $u = f(x, y, z)$  определена в некоторой открытой области  $D$  и точка  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ . Зафиксируем у переменных  $y$  и  $z$  значения  $y_0$  и  $z_0$ , тогда  $u = f(x, y_0, z_0)$  будет функцией одной переменной  $x$  в окрестности  $x_0$ . Придадим значению  $x_0$  приращение  $\Delta x$  такое, что  $x_0 + \Delta x \in D$ , тогда функция  $u = f(x, y_0, z_0)$  получит приращение

$$\Delta_x u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

которое называется ее частным приращением (по переменной  $x$ ). Рассмотрим предел отношения этого приращения к приращению  $\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}.$$

Этот предел, если он существует, называется частной производной функции  $f(x, y, z)$  по  $x$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  и обозначается  $u'_x$ ,  $f'_x(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}$ . Аналогично определяются частные производные функции

$f(x, y, z)$  по  $y$  и  $z$  в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ :  $f'_y(x_0, y_0, z_0)$  и  $f'_z(x_0, y_0, z_0)$ .

Приведем различные примеры существования и несуществования частных производных у функций.

**7.1. Функция, имеющая частные производные только в одной точке.** Функция  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)D(x + y + z)$  имеет все три частные производные в точке  $(0, 0, 0)$ , что следует из примера 3.1, и не имеет их в любой другой точке. Покажем последнее. Действительно, при фиксированных значениях  $y = y_0$ ,  $z = z_0$  функция аргумента  $x$   $f(x, y_0, z_0) = (x^2 + y_0^2 + z_0^2)D(x + y_0 + z_0)$  является

разрывной в любой точке  $x = x_0$ , если  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \neq 0$ , так как в произвольной окрестности точки  $x = x_0$  принимает значения как нулевые, так и сколь угодно близкие к  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \neq 0$ . Следовательно, частная производная  $f'_x(x_0, y_0, z_0)$  не существует. Не существуют и  $f'_y(x_0, y_0, z_0)$ , и  $f'_z(x_0, y_0, z_0)$  в силу симметрии функции по переменным.

**7.2. Функции, имеющие не все частные производные.** Функции  $f(x, y) = x + D(y)$  и  $g(x, y) = D(x) + y$  имеют в любой точке частные производные  $f'_x(x, y) = 1$  и  $g'_y(x, y) = 1$ , но не имеют ни в одной точке частных производных  $f'_y(x, y)$  и  $g'_x(x, y)$  соответственно, так как функции Дирихле  $D(y)$  и  $D(x)$  всюду разрывны, т.е. нигде не имеют производных. Заметим, что обе функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  являются всюду разрывными по совокупности аргументов.

**Достаточные условия дифференцируемости функции.** Если частные производные  $f'_x(x, y, z)$ ,  $f'_y(x, y, z)$ ,  $f'_z(x, y, z)$  существуют в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$  и непрерывны, как функции от  $x, y, z$  в этой точке, то справедлива формула

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) = \\ &= f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + \\ &\quad + \alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  зависят от  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  и стремятся к нулю при  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ . Формула (7.1) может быть представлена в виде

$$\Delta u = f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + o(\rho), \quad (7.2)$$

так как  $\alpha \Delta x + \beta \Delta y + \gamma \Delta z = o(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 0$ , где  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ . Выполнение (7.2) для функции  $f(x, y, z)$  означает по определению ее дифференцируемость в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ .

Снимем в утверждении предположение о непрерывности частных производных в точке. Приведем контрпример.

**7.3. Функция, частные производные которой разрывны в точке, недифференцируемая в этой точке.** Функция

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xy + xz + yz}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

В точке  $(0, 0, 0)$  существуют частные производные, равные нулю, это следует из того, что  $f(x, 0, 0) = f(0, y, 0) = f(0, 0, z) = 0$ . Оче-



видно, что и в других точках частные производные существуют. Ввиду симметрии функции по аргументам достаточно вычислить

$$f'_x(x, y, z) = \frac{(y+z)(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + xz + yz)2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Эта частная производная не имеет предела при  $x, y, z \rightarrow 0$ . Действительно, если рассматривать предел при стремлении точки к нулю

при условии  $x = 0, y = z$ , то  $\lim_{y \rightarrow 0} f'_x(0, y, y) = \frac{2y2y^2}{(2y^2)^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y}$  не су-

ществует, т.е. частные производные имеют разрыв в точке  $(0, 0, 0)$ .

Формула (7.2) в этом случае не имеет места. Учитывая, что сама функция и все ее частные производные равны нулю в точке  $(0, 0, 0)$ , из (7.2) получаем, что  $f(x, y, z) = o(\rho)$  в этой точке. Но это не так, потому что при стремлении  $x, y, z \rightarrow 0$  по диагональной прямой  $x = y = z$  функция вообще не стремится к нулю,  $f(x, x, x) = 1$  при всех  $x \neq 0$ .

Заметим, что сформулированные в утверждении достаточные условия не являются необходимыми для дифференцируемости функции в точке. Приведем контрпримеры.

**7.4\*. Всюду дифференцируемая функция, имеющая разрывные в точке частные производные.** Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{кроме } x^2 + y^2 = 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Во всех точках, кроме  $(0, 0)$ , функция дифференцируема как суперпозиция дифференцируемых функций. Покажем, что функция дифференцируема и в точке  $(0, 0)$ . Вычислим частные производные функции в точке  $(0, 0)$ , следуя определению частной производной. В силу симметрии функции по аргументам достаточно вычислить одну из частных производных:

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x^2} - 0}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x^2} = 0 \text{ как предел произведения функции бесконечно} \\ &\text{малой на ограниченную функцию. Аналогично, } f'_y(0, 0) = 0. \end{aligned}$$

Запишем приращение  $\Delta f(0, 0)$  и преобразуем его в выражение, которое по определению означает дифференцируемость в точке

$$\Delta f(0, 0) = (\Delta x^2 + \Delta y^2) \sin \frac{1}{\Delta x^2 + \Delta y^2} - f(0, 0) = \rho^2 \sin \frac{1}{\rho^2} = o(\rho),$$

где  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  при стремлении  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ . Учитывая, что  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ , делаем вывод о дифференцируемости функции в точке  $(0, 0)$ .

Покажем, что частные производные функции разрывны в точке  $(0, 0)$  и не ограничены в любой ее окрестности. В силу симметрии функции это достаточно выполнить только по переменной  $x$ . Вычислим частную производную по  $x$  в любой точке, кроме  $(0, 0)$ :

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} = \\ &= 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Попробуем найти предел этой частной производной при стремлении точки  $(x, y)$  к нулю по оси  $Ox$

$$\lim_{x \rightarrow 0, y=0} f'_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \right)$$

не существует, так как  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x \sin \frac{1}{x^2} \right) = 0$ , а предел  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$  не существует. Следовательно, и предел частной производной при произвольном стремлении  $(x, y)$  к точке  $(0, 0)$  не существует, т.е. частная производная разрывна в этой точке. Кроме того, из поведения функции  $\frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$  при  $x \rightarrow 0$  следует, что в любой окрестности точки  $(0, 0)$  частная производная не ограничена. Аналогичное справедливо и для частной производной по переменной  $y$ .

**7.5. Дифференцируемая в точке функция, про которую нельзя утверждать, что ее частные производные существуют в некоторой окрестности этой точки.** Функция  $f(x, y) = |xy|$  имеет, очевидно, в точке  $(0, 0)$  частные производные  $f'_x(0, 0) = 0$  и  $f'_y(0, 0) = 0$ . Кроме того, из верного неравенства  $(|\Delta x| - |\Delta y|)^2 \geq 0$  следует, что приращение функции в точке  $(0, 0)$  имеет оценку

$$|\Delta x \Delta y| \leq 2|\Delta x||\Delta y| \leq |\Delta x|^2 + |\Delta y|^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = o(\rho),$$

где  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ . Отсюда следует дифференцируемость функции в точке  $(0, 0)$ . Однако в любой окрестности точки  $(0, 0)$ , кроме нее самой, на координатных осях не существуют частные производные: в точках вида  $(0, y_0)$  – по переменной  $x$ , в точках вида  $(x_0, 0)$  – по переменной  $y$ , где  $x_0 > 0$ ,  $y_0 > 0$ .

**7.6. Функция, дифференцируемая в точке, не имеющая ни в какой другой точке частных производных.** Функция примера 7.1

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)D(x + y + z). \quad (7.3)$$

Как было показано, в любой точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , кроме  $(0, 0, 0)$ , функция (7.3) не имеет частных производных. В точке  $(0, 0, 0)$  функция имеет частные производные

$$f'_x(0, 0, 0) = 0; f'_y(0, 0, 0) = 0; f'_z(0, 0, 0) = 0,$$

см. пример 3.1. По определению функция  $f(x, y, z)$  дифференцируема в точке  $(x, y, z)$  тогда и только тогда, когда

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + o(\rho). \quad (7.4)$$

Применим (7.4) для данной функции в точке  $(0, 0, 0)$ , заметим, что при  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ ,  $x = \Delta x$ ,  $y = \Delta y$ ,  $z = \Delta z$ . Так как в этой точке значения функции и ее частных производных равны нулю, для установления дифференцируемости функции достаточно показать, что  $f(x, y, z) = f(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = o(\rho)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$ , т.е. при  $\rho \rightarrow 0$ . Заметим, так как  $0 \leq D(\Delta x + \Delta y + \Delta z) \leq 1$ , то

$$0 \leq f(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \leq \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \rho^2 = o(\rho) \text{ при } \rho \rightarrow 0.$$

Таким образом (7.4) выполняется в точке  $(0, 0, 0)$ , значит, функция в этой точке дифференцируема. Отметим, что в любой другой точке данная функция недифференцируема, хотя бы в силу несуществования у нее частных производных.

**Непрерывность дифференцируемой функции.** Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Адекватный иллюстративный пример к этому утверждению дает следующая функция.

**7.7. Функция, дифференцируемая только в одной точке и непрерывная только в ней.** Рассмотрим функцию из предыдущего

контрпримера. Там было показано, что она дифференцируема только в точке  $(0, 0, 0)$ . Покажем, что она также непрерывна только в этой точке. При  $x, y, z \rightarrow 0$  правая часть (7.3) стремится к нулю в силу ограниченности функции Дирихле. Следовательно, предел функции в точке  $(0, 0, 0)$  равен нулю. Он совпадает со значением функции в этой точке, следовательно, функция непрерывна в  $(0, 0, 0)$ . В любой другой точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , для которой  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \neq 0$ , функция имеет разрыв, так как в любой окрестности этой точки функция принимает как нулевые значения, так и сколь угодно близкие к  $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \neq 0$ .

Утверждение, обратное к данному, несправедливо. Контрпример.

**7.8. Функция двух переменных, непрерывная в точке, но недифференцируемая в ней.** Функция

$$f(x, y) = |x - y|$$

непрерывна в любой точке как суперпозиция всюду непрерывных функций. Однако в точках прямой  $y = x$  функция недифференцируема. На самом деле, при  $x > y$   $f(x, y) = x - y$ , и частная производная в точке  $(x_0, x_0)$  справа равна  $f'_{x+}(x_0, x_0) = 1$ , при  $x < y$   $f(x, y) = y - x$ , и частная производная в точке  $(x_0, x_0)$  слева равна  $f'_{x-}(x_0, x_0) = -1$ . Следовательно, частная производная по  $x$  не существует в точках вида  $(x_0, x_0)$ . Аналогично можно показать и несуществование в таких точках частной производной по  $y$ .

**Теорема о производной сложной функции.** Предположим, что функция  $u = f(x, y, z)$  определена в области  $D$ , а каждая из переменных  $x, y, z$  является функцией  $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  от переменной  $t$  в некотором промежутке  $T$ . И пусть при любом  $t \in T$  точка  $(x(t), y(t), z(t)) \in D$ . Имеем сложную функцию:  $u = f(x(t), y(t), z(t))$ . Если при этих предположениях функция  $u = f(x, y, z)$  имеет по  $x, y$  и  $z$  непрерывные частные производные  $u'_x, u'_y, u'_z$  и существуют производные  $x'_t, y'_t, z'_t$ , то существует производная сложной функции, и справедлива формула:

$$u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t. \quad (7.5)$$

Сформулированные в утверждении условия существования и непрерывности частных производных  $u'_x, u'_y, u'_z$  и существования производных  $x'_t, y'_t$  и  $z'_t$  являются только достаточными, но не являются необходимыми для существования производной  $u'_t$ . Контрпример.

**7.9. Всюду дифференцируемая функция, которая является суперпозицией всюду недифференцируемых функций.** Сложная функция  $u(x, y, z) = D(x + y + z)$ , где  $x = D(t)$ ,  $y = D(t)$ ,  $z = D(t)$ . Функция  $u(x, y, z)$  всюду разрывна как по совокупности своих аргументов, так и по каждому аргументу в отдельности, поэтому частные производные  $u'_x$ ,  $u'_y$ ,  $u'_z$  нигде не существуют. Каждая из трех других функций всюду разрывна, т.е. нигде не имеет производных. Однако суперпозиция функций всюду дифференцируема. Действительно, при любом  $t$  величины  $x = D(t)$ ,  $y = D(t)$ ,  $z = D(t)$  принимают значения 0 или 1. Отсюда аргумент функции  $u$ , равный  $x + y + z$ , будет принимать только рациональные значения: 0, 1, 2, 3 и, следовательно,  $u(t) \equiv 1$ , т.е. сложная функция является константой и всюду дифференцируема.

Заметим, что формула (7.5) в этом контрпримере не имеет смысла, так как все производные в правой ее части не существуют. Приведем пример, в котором все производные в (7.5) существуют и формула (7.5) выполняется, но частные производные  $u'_x$ ,  $u'_y$ ,  $u'_z$  существуют только в одной точке.

**7.10. Суперпозиция функции  $u(x, y, z)$ , имеющей частные производные только в одной точке, и функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , для которой  $u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t$ .** Сложная функция

$$u(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)D(x + y + z), \quad x = t, \quad y = t, \quad z = t.$$

Как было показано выше, в точке  $(0, 0, 0)$  функция  $u(x, y, z)$  имеет частные производные  $u'_x(0, 0, 0) = 0$ ,  $u'_y(0, 0, 0) = 0$ ,  $u'_z(0, 0, 0) = 0$ , а в других точках частных производных не имеет.

Полученная после подстановки  $x = t$ ,  $y = t$ ,  $z = t$  функция  $u(t) = 3t^2 D(3t) = (3t)^2 D(3t)/3$ , как было показано ранее, имеет нулевую производную при  $t = 0$ , и формула (7.5) выполняется

$$u'_t|_{t=0} = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t|_{x=y=z=t=0} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Снимем предположение о непрерывности частных производных  $u'_x$ ,  $u'_y$ ,  $u'_z$ , получим ложное утверждение. Контрпример.

**7.11. Суперпозиция функции  $u(x, y, z)$ , имеющей частные производные, разрывные в точке, и функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ , для которой  $u'_t \neq u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t$ .** Сложная функция

$$u(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x^2 + y^2 + z^2 = 0, \end{cases}$$

где  $x = t$ ,  $y = t$ ,  $z = t$ . Частные производные  $u'_x$ ,  $u'_y$ ,  $u'_z$  всюду существуют. В точке  $(0, 0, 0)$  они равны нулю, так как вдоль всех координатных осей функция  $u$  равна нулю. Но  $u'_x$ ,  $u'_y$ ,  $u'_z$  имеют разрыв в точке  $(0, 0, 0)$ , покажем это. В любой точке, кроме начала координат,

$$u'_x = \frac{yz(x^2 + y^2 + z^2) - xyz \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

Эта частная производная не имеет

предела при  $x, y, z \rightarrow 0$ . Действительно, если рассматривать предел при стремлении точки  $(x, y, z)$  к нулю при условии  $y = 0, z = 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} u'_x(x, 0, 0) = 0$ . Если же рассматривать предел при стремлении

точки  $(x, y, z)$  к нулю при условии  $x = y = z$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} u'_x(x, x, x) = \frac{1}{9}$ . Заметим, что в силу симметрии функции  $u$  по ее

аргументам частные производные  $u'_y$ ,  $u'_z$  также имеют разрывы в точке  $(0, 0, 0)$ . Полученная после подстановки  $x = t$ ,  $y = t$ ,  $z = t$

( $t \neq 0$ ) функция  $u(t) = \frac{1}{3}t$ , что верно и при  $t = 0$ , имеет производную

$u'_t = \frac{1}{3}$ . Формула (7.5) в точке  $(0, 0, 0)$  дает другое значение  $u'_t$ :

$$u'_t|_{t=0} = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t|_{x=y=z=t=0} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0.$$

**Теорема о частных производных сложной функции.** Предположим, что функция  $u = f(x, y, z)$  определена в области  $D$ , а каждая из переменных  $x, y, z$  является функцией  $x = x(t, v)$ ,  $y = y(t, v)$ ,  $z = z(t, v)$  от переменных  $t$  и  $v$  в некоторой области  $G$ . И пусть для любой точки  $(t, v) \in G$  отвечающая ей точка  $(x(t, v), y(t, v), z(t, v)) \in D$ . Имеем  $u = f(x(t, v), y(t, v), z(t, v))$  — сложную функцию от  $t$  и  $v$ . Если при этом функция  $u = f(x, y, z)$  имеет по  $x, y$  и  $z$  непрерывные частные производные  $u'_x, u'_y, u'_z$  и существуют частные производные  $x'_t, x'_v, y'_t, y'_v, z'_t, z'_v$ , то существуют частные производные по  $t$  и  $v$  сложной функции, и справедливы формулы:

$$u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t + u'_z z'_t; \quad u'_v = u'_x x'_v + u'_y y'_v + u'_z z'_v. \quad (7.6)$$

Для этого случая можно модифицировать контрпримеры 7.9, 7.10, 7.11, заменив, например, в функциях  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ , приведенных вы-

ше, аргумент  $t$  на  $t + v$ . Построение таких или аналогичных контрпримеров вынесем в упражнения к разделу, здесь же приведем другой контрпример.

**7.12. Суперпозиция функций, всюду имеющая частные производные по  $t$  и  $v$ , при которой частные производные от функций  $x, y, z$  по  $t$  и  $v$  существуют не всюду.** Функция

$$u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \text{ где } x = |t| + |v|, y = |t| - |v|, z = |t - v|.$$

После подстановки получаем  $u(t, v) = (|t| + |v|)^2 + (|t| - |v|)^2 - |t - v|^2 = 2t^2 + 2v^2 - t^2 + 2tv - v^2 = (t + v)^2$  — функцию, имеющую частные производные  $u'_t$  и  $u'_v$  всюду. При этом частные производные  $x'_t, y'_t$  и  $x'_v, y'_v$  не существуют на прямых  $t = 0$  и  $v = 0$  соответственно, а  $z'_t$  и  $z'_v$  — не существуют на прямой  $t = v$ . Формулы (7.6), очевидно, выполняются во всех точках, в которых существуют частные производные в их правых частях:  $x'_t, y'_t, z'_t$  и  $x'_v, y'_v, z'_v$  соответственно.

**Определение полного дифференциала функции.** Пусть  $u = f(x, y, z)$  дифференцируемая в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  функция, т.е. выполняется равенство

$$\Delta u = \Delta f(x_0, y_0, z_0) = f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z + o(\rho). \quad (7.7)$$

Тогда линейная однородная функция от переменных  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ :

$$u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + u'_z \Delta z = f'_x(x_0, y_0, z_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0, z_0)\Delta y + f'_z(x_0, y_0, z_0)\Delta z,$$

т.е. линейная часть приращения функции, называется ее полным дифференциалом в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  и обозначается символом  $du$  или  $df(x_0, y_0, z_0)$ .

Функция может не иметь дифференциала в точке. Пример.

**7.13. Функция, которая имеет частные производные всюду, но не имеет в точке полного дифференциала.** Функция из примера 7.3 всюду имеет частные производные, но не имеет дифференциала в точке  $(0, 0, 0)$ , так как в этой точке для нее не выполняется равенство (7.7).

Приведем адекватный определению пример функции. Для простоты рассмотрим функцию двух переменных.

**7.14. Функция двух переменных, имеющая полный дифференциал только в одной точке.** Функция

$$z = f(x, y) = (x - 1)^2 D(x + y) + (y - 2)^2 D(x + y) + 2x + 4y$$

имеет дифференциал только в точке  $(1, 2)$ . В этой точке ее частные

производные равны  $f'_x(1, 2) = 2$ ,  $f'_y(1, 2) = 4$ , а полный дифференциал равен  $dz = 2\Delta x + 4\Delta y$ . Покажем это.

Вычислим в точке  $(1, 2)$  частную производную функции  $f'_x$ , для этого запишем в этой точке отношение приращения функции к приращению аргумента  $x$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{(1 + \Delta x - 1)^2 D(1 + \Delta x + 2) + 2(1 + \Delta x) + 8 - 10}{\Delta x} = \\ &= \frac{\Delta x^2 D(3 + \Delta x) + 2\Delta x}{\Delta x} = \Delta x D(3 + \Delta x) + 2,\end{aligned}$$

отсюда  $f'_x(1, 2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 2$  ввиду ограниченности величины  $D(3 + \Delta x)$ . Аналогично получим  $f'_y(1, 2) = 4$ . Покажем выполнение формулы (7.7) в данном случае (для двух переменных).

$$\begin{aligned}\Delta f(1, 2) &= (1 + \Delta x - 1)^2 D(1 + \Delta x + 2) + (2 + \Delta y - 2)^2 D(1 + 2 + \Delta y) + \\ &\quad + 2(1 + \Delta x) + 4(2 + \Delta y) - 10 = \\ &= 2\Delta x + 4\Delta y + \Delta x^2 D(3 + \Delta x) + \Delta y^2 D(3 + \Delta y) = \\ &= 2\Delta x + 4\Delta y + o(\rho),\end{aligned}$$

так как  $0 \leq \Delta x^2 D(3 + \Delta x) + \Delta y^2 D(3 + \Delta y) \leq \Delta x^2 + \Delta y^2 = o(\rho)$ . Напомним, что в этом случае  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , т.е. в точке  $(1, 2)$  существует полный дифференциал  $dz = 2\Delta x + 4\Delta y$ . Во всех других точках функция  $z = f(x, y)$  дифференциала не имеет, так как она всюду, кроме точки  $(1, 2)$ , не имеет частных производных, см. пример 7.1, и не удовлетворяет условию (7.7).

**Геометрическая интерпретация дифференциала.** Для того чтобы график функции  $z = f(x, y)$  в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , где  $z_0 = f(x_0, y_0)$ , имел не параллельную оси  $z$  касательную плоскость, необходимо и достаточно, чтобы функция  $f(x, y)$  была дифференцируема в точке  $(x_0, y_0)$ . Уравнение этой касательной плоскости:  $z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ .

Вернемся к предыдущему примеру. Покажем, что график функции имеет в точке существования дифференциала касательную плоскость, а в любой другой точке ее не имеет.

В следующем примере и далее мы будем пользоваться понятием плотности множества точек  $A$  в множестве точек  $B$ :  $A$  плотно в  $B$ , если  $\bar{A} \supset B$ , где  $\bar{A}$  – замыкание  $A$ , иначе говоря, если в любой окрестности любой точки множества  $B$  имеется хотя бы одна точка из множества  $A$ . Если  $B$  – прямая, плоскость или пространство, то будем говорить о всюду плотности  $A$  в  $B$ .



**7.15. Функция двух переменных, график которой имеет касательную плоскость только в одной точке. Функция**

$$z = f(x, y) = (x-1)^2 D(x+y) + (y-2)^2 D(x+y) + 2x + 4y$$

имеет необычный график. А именно, точки графика этой функции располагаются в зависимости от рациональности или иррациональности значений  $x + y$  на двух поверхностях:

$$z = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2x + 4y = x^2 + y^2 + 5,$$

если сумма  $x + y$  рациональна (параболоид вращения),

$$z = 2x + 4y,$$

если сумма  $x + y$  иррациональна (плоскость).

Заметим, что точки графика располагаются на каждой из двух поверхностей плотно, т.е. на любом куске поверхности (сколь угодно малого диаметра) лежит бесконечно много точек графика. Это следует из всюду плотного расположения на плоскости  $Oxy$  точек с рациональными и иррациональными значениями суммы  $x + y$ . Легко проверить, что обе поверхности имеют общую точку  $M_0(1, 2, 10)$ . Частные производные по  $x$ ,  $y$  и  $z$  двух функций, определяющих поверхности и записанных в виде  $x^2 + y^2 + 5 - z = 0$ ,  $2x + 4y - z = 0$ , в точке  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 2$ ,  $z_0 = 10$  совпадают и равны 2, 4 и  $-1$  соответственно. Таким образом, в точке  $M_0(1, 2, 10)$  обе поверхности имеют общую касательную плоскость

$$2(x-1) + 4(y-2) - 1(z-10) = 0 \text{ или } z-10 = 2(x-1) + 4(y-2).$$

Следовательно, график функции  $z = f(x, y)$  имеет в точке  $M_0(1, 2, 10)$  касательную плоскость  $z-10 = 2(x-1) + 4(y-2)$ , что полностью отвечает утверждению, так как  $f'_x(1, 2) = 2$ ,  $f'_y(1, 2) = 4$ , см. предыдущий пример. Других общих точек, кроме  $M_0(1, 2, 10)$ , у двух поверхностей нет, так как параболоид (строго выпуклая поверхность) и плоскость, которая его касается, имеют только одну общую точку (точку касания). Отсюда следует, что в других, кроме  $M_0(1, 2, 10)$ , точках графика касательной плоскости к нему нет.

**Инвариантность формы первого дифференциала.** Пусть  $u = f(x, y, z)$  функция, определенная в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0, z_0)$ , и каждая из переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$  является функцией  $x = x(t, v)$ ,  $y = y(t, v)$ ,  $z = z(t, v)$ , определенной в некоторой окрестности точки  $(t_0, v_0)$ , и пусть  $x_0 = x(t_0, v_0)$ ,  $y_0 = y(t_0, v_0)$ ,  $z_0 = z(t_0, v_0)$ . Если функция  $u = f(x, y, z)$  дифференцируема в точке  $(x_0, y_0, z_0)$ , а функции  $x = x(t, v)$ ,  $y = y(t, v)$ ,  $z = z(t, v)$  дифференци-

руемы в точке  $(t_0, v_0)$ , то и сложная функция  $u = f(x(t, v), y(t, v), z(t, v))$  определена в некоторой окрестности точки  $(t_0, v_0)$  и дифференцируема в этой точке. При таких предположениях дифференциал  $du$  сложной функции в точке  $(t_0, v_0)$  может быть записан двумя способами:

$$\begin{aligned} du &= u'_t(x(t_0, v_0), y(t_0, v_0), z(t_0, v_0)) dt + u'_v(x(t_0, v_0), y(t_0, v_0), z(t_0, v_0)) dv; \\ du &= u'_x(x_0, y_0, z_0) dx + u'_y(x_0, y_0, z_0) dy + u'_z(x_0, y_0, z_0) dz, \text{ где} \\ dx &= x'_t(t_0, v_0) dt + x'_v(t_0, v_0) dv, \quad dy = y'_t(t_0, v_0) dt + y'_v(t_0, v_0) dv, \\ dz &= z'_t(t_0, v_0) dt + z'_v(t_0, v_0) dv. \end{aligned}$$

Приведем иллюстративные примеры, в которых инвариантность формы полного дифференциала имеет смысл только в одной точке.

**7.16. Функция двух переменных, имеющая полный дифференциал только в одной точке, при которой выполняется инвариантность формы первого дифференциала.** Используем функцию из предыдущих двух примеров

$$u(x, y) = (x-1)^2 D(x+y) + (y-2)^2 D(x+y) + 2x + 4y,$$

где  $x(t, v) = t + v + 1$ ,  $y(t, v) = t - v + 2$ . Как было показано выше, в точке  $(x=1, y=2)$  существуют частные производные функции  $u(x, y)$ , равные  $u'_x(1, 2) = 2$ ,  $u'_y(1, 2) = 4$ , и ее полный дифференциал

$$du = 2dx + 4dy. \quad (7.8)$$

В других точках функция недифференцируема и даже не имеет частных производных. Точке  $(x=1, y=2)$  однозначно соответствует точка  $(t=0, v=0)$ , и наоборот. Покажем, что сложная функция

$$u(x(t, v), y(t, v)) =$$

$$= (t+v)^2 D(2t+3) + (t-v)^2 D(2t+3) + 2(t+v+1) + 4(t-v+2)$$

дифференцируема в точке  $(t=0, v=0)$  и найдем ее частные производные  $u'_t(0, 0)$  и  $u'_v(0, 0)$ . Рассмотрим приращение  $\Delta u(0, 0)$  сложной функции в точке  $(t=0, v=0)$  при приращениях  $\Delta t$  и  $\Delta v$  аргументов  $t$  и  $v$ . Получим

$$\begin{aligned} \Delta u(0, 0) &= (\Delta t + \Delta v)^2 D(2\Delta t + 3) + (\Delta t - \Delta v)^2 D(2\Delta t + 3) + \\ &\quad + 2(\Delta t + \Delta v + 1) + 4(\Delta t - \Delta v + 2) - 10, \end{aligned} \quad (7.9)$$

где  $u(0, 0) = 10$ . Отсюда получаем выполнение в точке  $(t=0; v=0)$  условия (7.7) дифференцируемости функции, так как первые два слагаемых в (7.9) есть  $o(\rho)$ , где  $\rho = \sqrt{\Delta t^2 + \Delta v^2}$ , при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta v \rightarrow 0$ , а последующие три слагаемые в (7.9) определяют линейную часть приращения функции. Докажем сказанное. Учитывая, что функция Дирихле принимает только значения 0 и 1, получаем

$$0 \leq (\Delta t + \Delta v)^2 D(2\Delta t + 3) + (\Delta t - \Delta v)^2 D(2\Delta t + 3) \leq$$

$$\leq (\Delta t + \Delta v)^2 + (\Delta t - \Delta v)^2 = 2(\Delta t^2 + \Delta v^2) = o(\rho) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0.$$

С учетом этого, выполнив перегруппировку в последних трех слагаемых (7.9), получим (7.9) в виде  $\Delta u(0, 0) = 6\Delta t - 2\Delta v + o(\rho)$ . Следовательно, сложная функция  $u(x(t, v), y(t, v))$  дифференцируема в точке  $(t = 0, v = 0)$ , ее частные производные равны  $u'_t(0, 0) = 6$  и  $u'_v(0, 0) = -2$ , а полный дифференциал сложной функции в точке  $(t = 0, v = 0)$  равен

$$du = u'_t dt + u'_v dv = 6dt - 2dv. \quad (7.10)$$

Заметим, что в других точках полный дифференциал у нашей сложной функции не существует, так как она в таких точках разрывна. Действительно, в любой окрестности точки  $(t_0, v_0) \neq (0, 0)$  находятся точки с рациональными и иррациональными значениями  $2t + 3$ , достаточно близкие к точке  $(t_0, v_0)$ , в которых значения сложной функции будут отличаться на число, сколь угодно близкое к  $(t_0 + v_0)^2 + (t_0 - v_0)^2 = 2(t_0^2 + v_0^2) > 0$ .

В формуле (7.10)  $u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 6$ ,

$$u'_v = u'_x x'_v + u'_y y'_v = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -2.$$

Подставив эти значения в выражение (7.10) для  $du$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} du &= (u'_x x'_t + u'_y y'_t)dt + (u'_x x'_v + u'_y y'_v)dv = \\ &= (2 \cdot 1 + 4 \cdot 1)dt + (2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1))dv = \\ &= 2(1 \cdot dt + 1 \cdot dv) + 4(1 \cdot dt - 1 \cdot dv) = 2dx + 4dy = u'_x dx + u'_y dy. \end{aligned}$$

Получили ту же форму дифференциала, что и (7.8) в случае независимых переменных  $x$  и  $y$ , но смысл символов  $dx$  и  $dy$  здесь уже иной. Это и означает инвариантность полного дифференциала. Напомним, что инвариантность полного дифференциала показана и имеет место только в одной точке.

**7.17. Функции  $x(t, v)$ ,  $y(t, v)$ , имеющие полные дифференциалы только в одной точке, при которых выполняется инвариантность формы первого дифференциала. Функция**

$$u = x^2 + y^2, \text{ где } x = t^2 D(t) + v^2 D(v), y = t^2 D(t) - v^2 D(v).$$

Функция  $u = x^2 + y^2$ , в предположении независимости ее переменных, всюду имеет дифференциал, равный

$$du = u'_x dx + u'_y dy = 2x dx + 2y dy. \quad (7.11)$$

Учитывая, что  $(D(t))^2 = D(t)$ , так как функция Дирихле принимает значения только 1 и 0, получим сложную функцию

$$u(t, v) = 2t^4 D(t) + 2v^4 D(v).$$

Она имеет дифференциал только в точке  $(t = 0, v = 0)$  и он равен

$$du = u'_t dt + u'_v dv = 0 \cdot dt + 0 \cdot dv. \quad (7.12)$$

Покажем это. Рассмотрим приращение  $\Delta u(0, 0)$  сложной функции в точке  $(t = 0, v = 0)$  при приращениях  $\Delta t$  и  $\Delta v$  аргументов  $t$  и  $v$ :

$$\Delta u(0, 0) = 2(\Delta t)^4 D(\Delta t) + 2(\Delta v)^4 D(\Delta v) - 0, \text{ где } u(0, 0) = 0.$$

$$0 \leq 2(\Delta t)^4 D(\Delta t) + 2(\Delta v)^4 D(\Delta v) \leq 2((\Delta t)^4 + (\Delta v)^4) < \\ < 2((\Delta t)^2 + (\Delta v)^2) = o(\rho)$$

при  $\Delta t \rightarrow 0, \Delta v \rightarrow 0$ , где  $\rho = \sqrt{\Delta t^2 + \Delta v^2}$ , и последнее неравенство справедливо при  $\Delta t, \Delta v < 1$ . Отсюда получаем, что в точке  $(t = 0, v = 0)$  условие (7.7) выполняется, сложная функция дифференцируема, существуют частные производные  $u'_t = 0, u'_v = 0$ , и дифференциал (7.12). Во всех других точках сложная функция разрывна по совокупности переменных, т.е. недифференцируема (оставляем показать это читателям). Аналогично можно показать, что функции  $x = t^2 D(t) + v^2 D(v)$  и  $y = t^2 D(t) - v^2 D(v)$  имеют дифференциалы только в точке  $(t = 0, v = 0)$ , при этом

$$dx = x'_t dt + x'_v dv = 0 \cdot dt + 0 \cdot dv, \\ dy = y'_t dt + y'_v dv = 0 \cdot dt + 0 \cdot dv. \quad (7.13)$$

Заметим, что точке  $(t = 0, v = 0)$  взаимно-однозначно соответствует точка  $(x = 0, y = 0)$ . В формуле (7.12) в точках  $(t = 0, v = 0)$  и соответственно  $(x = 0, y = 0)$  получаем

$$u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0 \text{ и } u'_v = u'_x x'_v + u'_y y'_v = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

Подставив эти значения в (7.12) и учитывая (7.13), будем иметь:

$$du = (u'_x x'_t + u'_y y'_t) dt + (u'_x x'_v + u'_y y'_v) dv = \\ = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) dt + (0 \cdot 0 + 0 \cdot 0) dv = \\ = 0(0 \cdot dt + 0 \cdot dv) + 0(0 \cdot dt + 0 \cdot dv) = 0 \cdot dx + 0 \cdot dy = u'_x dx + u'_y dy.$$

Получили ту же форму дифференциала, что и (7.11) в случае независимых переменных  $x$  и  $y$ , но смысл символов  $dx$  и  $dy$  здесь уже другой. Напомним, что инвариантность полного дифференциала показана и имеет смысл только в одной точке.

**Теорема об условии постоянства функции нескольких переменных.** Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена и непрерывная в замкнутой связной области  $D$ , и в любой внутренней точке области  $D$  имеет частные производные, равные нулю:  $f'_x = f'_y = f'_z = 0$ . Тогда эта функция во всей области  $D$  является постоянной:  $f = \text{const}$ .

Возможно следующее ошибочное утверждение, необоснованно переносящее теорему об условии постоянства функции одного переменного на случай нескольких переменных: если  $f'_x(x, y, z) = 0$  внутри области  $D$ , то  $f(x, y_0, z_0) = \text{const}$ , где  $y_0$  и  $z_0$  фиксированы, а точки  $(x, y_0, z_0)$  лежат в  $D$ ; аналогичные утверждения формулируются и для переменных  $y$  и  $z$ . В контр-примере, для наглядности, ограничимся двумя переменными.

**7.18. Непрерывно дифференцируемая функция  $f(x, y)$  и область  $D$  такие, что  $f'_y(x, y) = 0$  внутри  $D$ , но функция меняется при изменении  $y$  в  $D$ .** Пусть замкнутая связная область  $D$  – квадрат  $-1 \leq x, y \leq 1$  с удаленной частью  $|x| > |y|$ ,  $x < 0$  (рис. 7.1, а).

Функция  $f(x, y) = \begin{cases} |x^3|, & \text{если } y \geq 0, \\ x^3, & \text{если } y < 0, \end{cases}$  где  $(x, y) \in D$  является непрерывно дифференцируемой во внутренних точках области  $D$ , так как

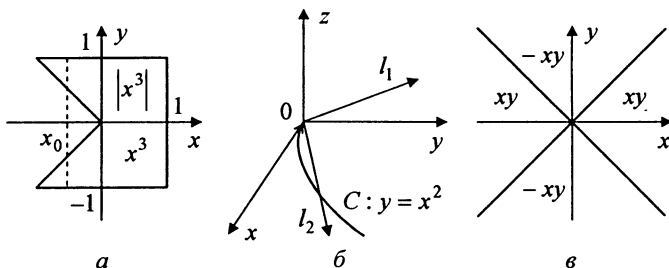


Рис. 7.1

имеет там непрерывные частные производные. Действительно, в части  $D$ , лежащей в 1, 4 и 3 квадрантах,  $f(x, y) = x^3$  и  $f'_x(x, y) = 3x^2$ ,  $f'_y(x, y) = 0$ ; в части  $D$ , лежащей в 1 и 2 квадрантах,  $f(x, y) = |x^3|$  и также функция имеет непрерывные частные производные:  $f'_x(x, y) = \text{sgn } x \cdot 3x^2$ ,  $f'_y(x, y) = 0$ . И хотя всюду внутри области  $D$  выполняется  $f'_y(x, y) = 0$ , функция  $f(x, y)$  меняется при

изменении аргумента  $y$ : при любом  $-1 \leq x_0 < 0$   $f(x_0, y)$  имеет различные значения при  $y < 0$  и  $y > 0$ ,  $(x_0, y) \in D$ .

**Определение производной по направлению.** Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена в открытой области  $D$  и точка  $M_0(x_0, y_0, z_0) \in D$ . Рассмотрим любую направленную прямую (ось)  $l$ , проходящую через точку  $M_0$ . Пусть  $M(x, y, z)$  – другая точка этой оси,  $M_0M$  – длина отрезка с концами  $M_0$  и  $M$ , взятая со знаком плюс, если направление  $M_0M$  совпадает с направлением оси  $l$ , или со знаком минус – в противном случае. Пусть  $M$  стремится к  $M_0$ . Предел  $\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M_0M}$ , если он существует, называется производной от функции  $f(x, y, z)$  по направлению  $l$  и обозначается  $\frac{\partial f(M_0)}{\partial l}$  или  $\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l}$ . Частные производные  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$  можно рассматривать как производные по направлению соответствующих координатных осей.

Опровергнем иногда возникающее заблуждение о том, что если в точке существуют и конечны производные функции по всем направлениям, то функция дифференцируема в этой точке. Построим контрпример.

**7.19. Функция трех переменных, для которой существует производная в точке по любому направлению, но функция недифференцируема в этой точке.** Функция

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, & \text{если } (x, y, z) \in C, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

где  $C$  – ветвь параболы  $y = x^2$ ,  $x > 0$ , лежащая в плоскости  $Oxy$ . Любой луч  $l$ , исходящий из точки  $(0, 0, 0)$ , либо не пересекается с  $C$ , либо пересекается с  $C$  только в одной точке, которая отлична от точки  $(0, 0, 0)$  (рис. 7.1, б). Отсюда следует, что для любого луча существует окрестность точки  $(0, 0, 0)$ , в которой на луче функция принимает только нулевые значения, т.е. в точке  $(0, 0, 0)$  по любому направлению существует производная, равная нулю. В том числе в точке  $(0, 0, 0)$  существуют частные производные, равные нулю. Отсюда, согласно формуле (7.7), для дифференцируемости функции в точке  $(0, 0, 0)$  требуется, чтобы выполнялось  $\Delta f(0, 0, 0) = o(\rho)$ , где  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ , при  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ . Но  $f(x, y, z)$  не удовлетворяет этому требованию, так как в любой, сколь угодно

малой, окрестности точки  $(0, 0, 0)$  приращение функции вдоль кривой  $C$  совпадает с  $\rho$ .

**Формула для производной по направлению.** Предположим, что функция  $f(x, y, z)$  имеет в области  $D$  непрерывные частные производные. Пусть ось  $l$  образует с осями координат углы  $\alpha, \beta, \gamma$ . Тогда производная по направлению  $l$  существует и выражается формулой

$$\frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma. \quad (7.14)$$

Попробуем снять предположение о непрерывности частных производных. Покажем, что полученное при этом усиленное утверждение ложно.

**7.20. Функция, у которой в данной точке частные производные имеют разрывы, и производная по направлению не выражается формулой (7.14).** Рассмотрим функцию  $u(x, y, z)$  из контр-примера 7.11 в окрестности точки  $(0, 0, 0)$ . Было показано, что частные производные  $u'_x, u'_y, u'_z$  у этой функции всюду существуют, что все они в точке  $(0, 0, 0)$  равны нулю, а также то, что в этой точке  $u'_x, u'_y, u'_z$  имеют разрывы. Вычислим в точке  $M_0(0, 0, 0)$  производную  $\frac{\partial u(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial u(0, 0, 0)}{\partial l}$  по направлению прямой  $x = y = z$ , ориентированной по возрастанию  $x$ . Получим

$$\frac{\partial u(0, 0, 0)}{\partial l} = \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{u(M) - u(M_0)}{M_0 M} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x/3 - 0}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}},$$

где  $M(x, x, x)$ ,  $u(M) - u(M_0) = \frac{x^3}{3x^2} - 0 = \frac{x}{3}$ ,  $M_0 M = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$ .

Видим, что равенство (7.14) не выполняется, так как его левая часть  $\frac{\partial u(0, 0, 0)}{\partial l}$  равна  $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ , а правая часть равна нулю, так как все частные производные в точке  $(0, 0, 0)$  равны нулю.

Однако производная по направлению может существовать, а формула (7.14) выполняться при более общих предположениях. Приведем пример.

**7.21. Всюду разрывная функция, имеющая во всех точках, за исключением счетного их множества, производную по всем направлениям, за исключением счетного их (направлений) множества.** Определим во всем пространстве функцию

$$f(x, y, z) = D(x)D(y)D(z). \quad (7.15)$$

Произведение функций Дирихле в (7.15) отлично от нуля (равно единице) только в точках, все три координаты которых рациональны. Для краткости будем называть такие точки рациональными, легко показать, что их множество счетно. Функция (7.15) всюду разрывна, так как в любой окрестности любой точки находятся как рациональные, так и иные точки, в которых значения функции (7.15) отличаются друг от друга на единицу.

Рассмотрим множество  $L_M$  прямых, проходящих через заданную точку  $M(x, y, z)$  (оно имеет мощность континуума), и пусть  $M(x, y, z)$  не является рациональной точкой. В этом случае у двух любых различных прямых из  $L_M$  нет общих рациональных точек. Таким образом, между множеством прямых из  $L_M$ , содержащих рациональные точки, и некоторым (бесконечным) подмножеством рациональных точек (оно счетно) можно установить взаимнооднозначное соответствие. Следовательно, в множестве  $L_M$ , где  $M(x, y, z)$  не является рациональной точкой, все прямые, за исключением счетного их множества, не содержат рациональных точек. Иными словами, прямые из множества  $L_M$ , не содержащие рациональных точек, располагаются по всем направлениям, за исключением счетного множества направлений. Далее для краткости будем называть все прямые в пространстве, не содержащие рациональных точек, ординарными. Очевидно, что на каждой ординарной прямой функция  $f(x, y, z) = 0$ . Следовательно, в точке  $(x, y, z)$  ординарной прямой по любому из двух взятых вдоль прямой направлений (обозначим определяющий это направление отрезок —  $l$ ) существует производная  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial l}$ . Таким образом, всюду разрывная, т.е. всюду

недифференцируемая, функция  $f(x, y, z)$  имеет во всех точках, за исключением счетного их множества, производную по всем направлениям, за исключением счетного их (направлений) множества.

Если точка  $(x, y, z)$  имеет две или три иррациональные координаты, то все три прямые, проходящие через нее параллельно осям координат, ординарные. Следовательно, в такой точке существуют все три частных производные  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$  и  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}$ , и производные  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial l}$  по всем направлениям  $l$ , исключая счетное их множество. Так как на прямых, проходящих через такую точку



$(x, y, z)$ , параллельно осям координат и в таких направлениях  $l$ , функция  $f(x, y, z) = 0$ , то выполняется формула (7.14).

## 7.2. Частные производные высших порядков

**Определение частных производных высших порядков.** Предположим, что функция  $u = f(x, y)$  определена в некоторой открытой области  $D$  и имеет в  $D$  частную производную (она называется частной производной первого порядка) по одной из переменных. Тогда названная производная сама является функцией от  $x$  и  $y$ , определенной в  $D$ , и может в некоторой точке  $(x_0, y_0) \in D$  иметь частные производные. Для функции  $u = f(x, y)$  эти производные называются частными производными второго порядка.

Частная производная  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  обозначается через  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}$ , или  $u''_{xx} = f''_{xx}(x_0, y_0)$ ;  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)$  через  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x}$ , или  $u''_{xy} = f''_{xy}(x_0, y_0)$ ;  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  через  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$ , или  $u''_{yx} = f''_{yx}(x_0, y_0)$ ;  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  обозначается через  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}$ , или  $u''_{yy} = f''_{yy}(x_0, y_0)$ .

Аналогично (по индукции) определяются частные производные любого порядка и для функций любого числа переменных.

В определении требуется существование частной производной по одной из переменных в некоторой открытой области  $D$ , однако это требование является достаточным, но не является необходимым. Приведем контрпример.

**7.22. Функция  $f(x, y)$ , имеющая:  $f'_x$  только на оси  $Oy$ ,  $f'_y$  только на оси  $Ox$ ,  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  только в точке  $(0, 0)$ .** Функция

$$f(x, y) = xy^2 D(y) + yx^2 D(x)$$

имеет частную производную по переменной  $x$  только на оси  $Oy$ , т.е. при  $x = 0$ , а не в некоторой открытой области  $D$ . Это объясняется тем, что, как это было показано выше, функция  $x^2 D(x)$  имеет производную только при  $x = 0$  (эта производная равна нулю), в других точках эта функция разрывна. При любом фиксированном значении  $y$  получаем  $f'_x(0, y) = y^2 D(y)$ . Полученная частная производная является функцией переменной  $y$ , имеющей производную, которая равна нулю, только в точке  $y = 0$ . Имеем  $f''_{xy}(0, 0) = 0$ . В силу симметрии функции  $f(x, y)$  по ее аргументам, аналогично по-

лучаем  $f''_{yx}(0, 0) = 0$ . Заметим, что данная функция имеет смешанные частные производные  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  только в одной точке, что отвечает определению частных производных именно в точке.

Приведем примеры несуществования частных производных.

**7.23, 7.24. Функции, иллюстрирующие различные случаи несуществования частных производных, повторных и смешанных.** Функция  $f(x, y) = x|y| + y|x|$  имеет повторные и смешанные частные производные всех порядков во всех точках, кроме точек координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ . Это следует из несуществования производной функции  $|t|$  только в точке  $t = 0$ .

Функция  $f(x, y) = x^2 D(y)$  имеет по переменной  $x$  повторную частную производную  $f''_{xx}(x, y) = 2D(y)$  во всех точках. Но данная функция не имеет смешанной частной производной  $f''_{xy}$  ни в одной точке, так как функция Дирихле всюду разрывна.

**Теорема о смешанных частных производных.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена в открытой области  $D$ , в  $D$  существуют частные производные  $f'_x$  и  $f'_y$ , а также смешанные частные производные второго порядка  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$ , которые (как функции  $x$  и  $y$ ) непрерывны в некоторой точке  $(x_0, y_0) \in D$ . Тогда в этой точке  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ .

Если отбросить в теореме предположение о непрерывности в точке  $(x_0, y_0)$  частных производных  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  как функций  $x$  и  $y$ , то получим ложное утверждение. Контрпримеры.

**7.25, 7.26. Функции, смешанные частные производные которых имеют разрывы в точке и не равны в этой точке.** Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0 \end{cases}$$

приводится в качестве контрпримера в [2], т. I, с. 260 и в [1], с. 153. Отсылаем читателей к этим источникам, здесь же заметим, что  $f''_{xy}(0, 0) = -1$ , а  $f''_{yx}(0, 0) = 1$ , т.е.  $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$ . При этом частные производные  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  имеют разрывы в точке  $(0, 0)$ .

Функция  $f(x, y) = \begin{cases} xy, & \text{если } |x| \geq |y|, \\ -xy, & \text{если } |x| < |y| \end{cases}$  (рис. 7.1, в), имеет сле-

дующие частные производные:

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} y, & \text{если } |x| > |y|, \\ -y, & \text{если } |x| < |y| \end{cases} \text{ и } f'_y(x, y) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| > |y|, \\ -x, & \text{если } |x| < |y|. \end{cases} \quad (7.16)$$

На прямых  $y = \pm x$ , кроме точки  $(0, 0)$ , функция разрывна, поэтому в выражениях (7.16) на этих прямых частные производные не определены. В точке  $(0, 0)$  функция  $f(x, y)$  имеет частные производные  $f'_x(0, 0) = 0$ ,  $f'_y(0, 0) = 0$ , так как равна нулю на координатных осях. Из (7.16) получаем: в точках оси  $Ox$ , включая точку  $(0, 0)$ ,  $f'_y = x$ ; в точках оси  $Oy$ , включая точку  $(0, 0)$ ,  $f'_x = -y$ . Отсюда имеем  $f''_{yx}(0, 0) = 1$ , а  $f''_{xy}(0, 0) = -1$ , т.е.  $f''_{yx}(0, 0) \neq f''_{xy}(0, 0)$ .

В точках, не лежащих на прямых  $y = \pm x$ , из (7.16) получаем

$$f''_{xy}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| > |y|, \\ -1, & \text{если } |x| < |y| \end{cases} \text{ и } f''_{yx}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| > |y|, \\ -1, & \text{если } |x| < |y|, \end{cases}$$

откуда следует, что  $f''_{xy}(x, y)$  и  $f''_{yx}(x, y)$  разрывны в точке  $(0, 0)$ .

Условия теоремы являются достаточными, но не являются необходимыми для равенства  $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$ . Приведем контрпримеры.

**7.27. Функция  $f(x, y)$ , имеющая:  $f'_x$  только на оси  $Oy$ ,  $f'_y$  только на оси  $Ox$ ,  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  только в точке  $(0, 0)$ ; и  $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$ .** Функция из примера 7.22

$$f(x, y) = xy^2 D(y) + yx^2 D(x)$$

имеет частные производные первого порядка  $f'_x$  и  $f'_y$  только на осях  $Oy$  и  $Ox$ , соответственно. Смешанные же частные производные второго порядка  $f''_{xy}$  и  $f''_{yx}$  существуют только в точке  $(0, 0)$ . Однако выполняется равенство  $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$ .

**7.28. Функция, у которой частные производные не везде существуют в любой окрестности точки, но существуют в этой точке и равны смешанные производные.** Функция

$$f(x, y) = |x^2 - y^2|.$$

В точках прямых  $x = \pm y$ , кроме точки  $(0, 0)$ , первые частные производные  $f'_x$  и  $f'_y$  не существуют, в том числе в любой окрестности точки  $(0, 0)$ . Покажем это. На рис. 7.2, а изображено сечение плоскости  $Oxy$  прямой  $y = y_0$ , где  $y_0$  — произвольно,  $y_0 \neq 0$ , а на рис. 7.2, б график функции, взятый в этом сечении. Видно, что у графика

в точках  $x = \pm y_0$  изломы, т.е. частная производная  $f'_x$  в точках  $(-y_0, y_0)$  и  $(y_0, y_0)$  не существует. Так как точки вида  $(-y_0, y_0)$  и  $(y_0, y_0)$  лежат сколь угодно близко к точке  $(0, 0)$ , то условия теоремы не выполнены в любой окрестности точки  $(0, 0)$ . Но из того же рисунка видно, что в точке  $(0, y_0)$  существует  $f'_x(0, y_0) = 0$ . На рис. 7.2, в показан график функции в сечении  $y = 0$ , который является параболой, отсюда частная производная функции по  $x$  в точ-

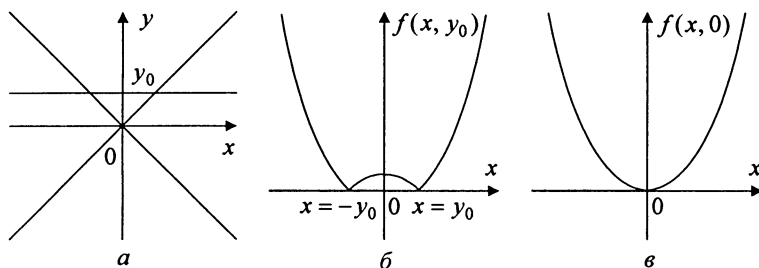


Рис. 7.2

ке  $(0, 0)$  существует и  $f'_x(0, 0) = 0$ . Следовательно, существует частная производная  $f'_x(0, y) = 0$  на всей оси  $Oy$ , а, значит, существует  $f''_{xy}(0, 0) = 0$ . В силу симметрии функции по ее аргументам получаем также  $f''_{yx}(0, 0) = 0$  и делаем вывод  $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$ .

### 7.3. Экстремумы, наибольшие и наименьшие значения

**Определение максимума и минимума функции.** Определенная в открытой области  $D$  функция  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  имеет в некоторой точке  $x^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in D$  максимум (минимум), если существует такое число  $\delta > 0$ , что  $\delta$ -окрестность  $U(x^0; \delta)$  точки  $x^0$  (сферическая или кубическая) целиком лежит в  $D$ , и для любого  $x \in U(x^0; \delta)$  выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x^0)$  ( $f(x) \geq f(x^0)$ ). Если при этих же предположениях выполняется строгое неравенство  $f(x) < f(x^0)$  ( $f(x) > f(x^0)$ ),  $x \neq x^0$ , то функция имеет в точке  $x^0$  строгий максимум (строгий минимум). При этом сама точка  $x^0$  называется точкой максимума (минимума), строгого максимума (строгого минимума) функции  $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  соответственно.

Для максимума и минимума применяется общий термин – экстремум.

Для иллюстрации понятий максимума и минимума обычно используют непрерывно дифференцируемые функции. Заметим, что само понятие экстре-

мама функции не использует предположения о существовании у нее производной и даже о ее непрерывности. Приведем примеры.

**7.29. Отличная от константы функция двух переменных, в любой точке имеющая нестрогий экстремум. Функция**

$$f(x, y) = D(x + y)$$

всюду разрывна. Максимумы функции (они равны единице) достигаются, когда величина  $x + y$  рациональна; минимумы (они равны нулю) достигаются, когда эта величина иррациональна. Так как в любой окрестности любой точки плоскости  $Oxy$  сумма  $x + y$  при-

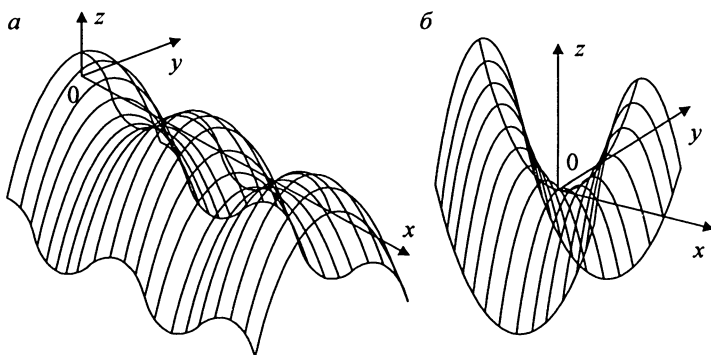


Рис. 7.3

нимает как рациональные, так и иррациональные значения, то максимумы и минимумы не являются строгими.

**7.30. Функция  $f(x, y)$ , имеющая всюду плотные на плоскости  $Oxy$  множества точек строгих максимумов и нестрогих минимумов. Функция  $f(x, y) = R(x) + R(y)$ , где  $R(x)$  и  $R(y)$  – функции Римана. В любой точке  $(x, y)$ , где  $x$  и  $y$  – рациональны, достигается строгий максимум функции. Если обе координаты точки иррациональны, то достигается нестрогий минимум, он равен нулю. Эти свойства функции следуют из рассуждений примера 5.12.**

В случае непрерывной функции одной переменной, у которой в произвольном конечном интервале либо нет точек экстремума, либо их конечное число, максимумы и минимумы чередуются. В случае функции двух переменных это может быть не так.

**7.31. Непрерывно дифференцируемая функция  $f(x, y)$ , имеющая бесконечно много строгих максимумов, но ни одного**

**минимума.** Функция  $f(x, y) = \cos x - y^2$  имеет максимумы в точках оси  $Ox$ , на которой достигается максимум второго слагаемого  $-y^2$  и в которых достигаются максимумы первого слагаемого, т.е.  $\cos x = 1$ . Это точки  $(x = 2\pi k, y = 0)$ , где  $k$  – любое целое число. Минимумов эта функция не имеет (рис. 7.3, а). График функции образуется параллельным перемещением параболы  $z = -y^2$  по синусоиде  $z = \cos x$  (вершина параболы движется по синусоиде).

**7.32. Ограниченная функция  $f(x, y)$ , не имеющая минимумов и максимумов.** Функция  $f(x, y) = \sin(xD(x)) + \sin(yD(y))$  не имеет минимумов и максимумов, так как синус принимает свои минимальное и максимальное значения ( $-1$  и  $1$  соответственно) при

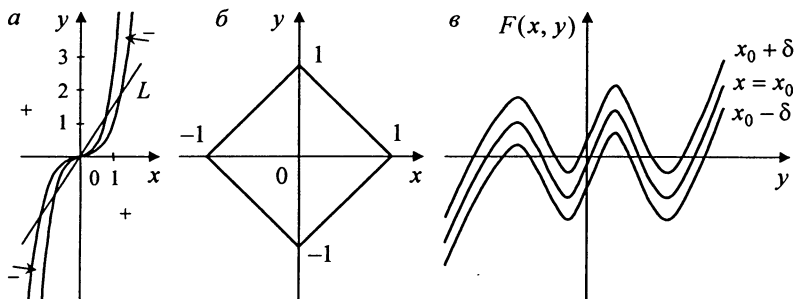


Рис. 7.4

некоторых иррациональных значениях аргумента, а величины  $xD(x)$  и  $yD(y)$  принимают только (и все) рациональные значения.

**7.33. Непрерывно дифференцируемая функция  $f(x, y)$ , не имеющая в точке экстремума, но на любой прямой, проходящей через эту точку, имеющая строгий минимум.** Функция

$$f(x, y) = (y - x^3)(y - 3x^3)$$

всюду определена и непрерывно дифференцируема (рис. 7.4, а). На рисунке показаны кривые, на которых функция принимает нулевые значения:  $y = x^3$  и  $y = 3x^3$ . Учитывая знаки множителей  $y - x^3$  и  $y - 3x^3$  в выражении, задающем функцию, видим, что между данными кривыми функция отрицательна, а вне их – положительна. Так как  $f(0, 0) = 0$ , а в любой окрестности точки  $(0, 0)$  функция принимает и отрицательные, и положительные значения – то в этой точке нет экстремума. Так как обе кривые касаются оси  $Ox$  в точке

$(0, 0)$ , то для любой прямой  $L$ , проходящей через эту точку, существует ее проколота окрестность, в которой на прямой  $L$  функция положительна. Следовательно, на этой прямой достигается в точке  $(0, 0)$  строгий минимум.

**Необходимое условие существования экстремума.** Пусть функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  определена в открытой области  $D$  и имеет в некоторой точке  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0) \in D$  экстремум. Если в этой точке существуют конечные частные производные  $f'_{x_1}(x_1^0, \dots, x_m^0), \dots, f'_{x_m}(x_1^0, \dots, x_m^0)$ , то все они равны нулю. Точки, в которых все частные производные первого порядка равны нулю, называются стационарными.

Приведем пример функции, удовлетворяющей всем предположениям утверждения и не обладающей избыточными свойствами (например, дифференцируемостью и даже непрерывностью в некоторой окрестности точки экстремума).

**7.34. Функция  $f(x, y)$ , непрерывная только в точке своего строгого минимума, в которой выполняется необходимое условие экстремума.** Функция

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)(D(xy) + 1)$$

является всюду разрывной, кроме точки  $(0, 0)$ . В точке  $(0, 0)$  она имеет строгий минимум, так как  $f(0, 0) = 0$ , а в любой другой точке  $f(x, y) > 0$ . У функции частные производные  $f'_x$  и  $f'_y$  существуют только на соответствующих координатных осях, на которых она принимает значения: на оси  $Ox$   $f(x, 0) = 2x^2$ , на оси  $Oy$   $f(0, y) = 2y^2$ . Отсюда  $f'_x(0, 0) = 0$ ,  $f'_y(0, 0) = 0$ . Таким образом, необходимое условие экстремума выполняется.

Покажем, что сформулированное необходимое условие не является достаточным для экстремума. Контрпримеры.

**7.35. Функция  $f(x, y)$ , непрерывная только в одной точке, в которой выполняется необходимое условие экстремума, но самого экстремума нет.** Функция

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \left( D(xy) - \frac{1}{2} \right)$$

имеет частные производные только на координатных осях, на них она принимает значения: на оси  $Ox$   $f(x, 0) = \frac{1}{2}x^2$ , на оси  $Oy$

$f(0, y) = \frac{1}{2}y^2$ . Отсюда  $f'_x(0, 0) = 0$ ,  $f'_y(0, 0) = 0$ . Таким образом, необходимое условие экстремума в точке  $(0, 0)$  выполняется, но самого экстремума в ней нет, так как  $f(0, 0) = 0$ , а в любой окрестности точки  $(0, 0)$  функция принимает как положительные (если  $x$  рационально), так и отрицательные (если  $x$  иррационально) значения.

**7.36. Функция  $f(x, y)$ , для которой выполняется необходимое условие экстремума, но самого экстремума нет. Функция**

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Частные производные функции:  $f'_x(x, y) = 2x$ ,  $f'_y(x, y) = -2y$ . В точке  $(0, 0)$  выполняется  $f'_x(0, 0) = 0$ ,  $f'_y(0, 0) = 0$ . Однако ни максимума, ни минимума в точке  $(0, 0)$  нет. Действительно, при  $x = 0$  функция  $f(0, y) = -y^2$  имеет в точке  $(0, 0)$  максимум, при  $y = 0$  функция  $f(x, 0) = x^2$  имеет в точке  $(0, 0)$  минимум. Такого типа точка не является точкой экстремума, а называется точкой минимакса, или седлообразной точкой (рис. 7.3, б). График функции образуется параллельным перемещением параболы  $z = -y^2$  по параболе  $z = x^2$ , при этом вершины парабол совпадают.

Сформулированное необходимое условие существования экстремума не всегда применимо. Например, когда функция не имеет в точке экстремума частных производных или они бесконечны.

**7.37, 7.38. Имеющие строгие минимумы функции двух переменных, к которым необходимое условие экстремума неприменимо.** Функция  $f(x, y) = |x| + |y|$  имеет в точке  $(0, 0)$  строгий минимум, но не имеет в этой точке частных производных.

Функция  $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2}$  имеет в точке  $(0, 0)$  строгий минимум. При этом  $f'_x(x, y) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$  и  $f'_y(x, y) = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$  обращаются в точке  $(0, 0)$  в бесконечность.

**Достаточные условия экстремума.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в окрестности точки  $(x_0, y_0)$ , которая является для нее стационарной, т.е.  $f'_x(x_0, y_0) = 0$ ,  $f'_y(x_0, y_0) = 0$ . Рассмотрим значения частных производных второго порядка в точке  $(x_0, y_0)$ :  $a_{11} = f''_{xx}(x_0, y_0)$ ,  $a_{12} = f''_{xy}(x_0, y_0)$ ,



$a_{22} = f''_{yy}(x_0, y_0)$ . Если  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ , то в стационарной точке  $(x_0, y_0)$  функция  $f(x, y)$  имеет экстремум, а именно, строгий максимум при  $a_{11} < 0$  и строгий минимум при  $a_{11} > 0$ . Если  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$ , то экстремума нет. В случае  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  вопрос о существовании экстремума в данной точке остается открытым.

Проиллюстрируем ограниченность применения данных достаточных условий экстремума. Примеры.

**7.39. Функция  $f(x, y)$ , имеющая строгий минимум, к которой неприменимы достаточные условия экстремума.** Функция

$$f(x, y) = x^4 + y^2$$

удовлетворяет всем предположениям утверждения. Точка  $(0, 0)$  для нее стационарная:  $f'_x(0, 0) = 4x^3|_{x=0} = 0$ ,  $f'_y(0, 0) = 2y|_{y=0} = 0$ . Вычислим  $a_{11} = 12x^2|_{x=0} = 0$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = 2$ . Отсюда  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$  и вывода об экстремуме в точке  $(0, 0)$  сделать нельзя. Однако в этой точке функция, очевидно, имеет строгий минимум.

**7.40. Функция  $f(x, y)$ , не имеющая экстремума, к исследованию которой неприменимы достаточные условия экстремума.** Функция  $f(x, y) = x^3 + y^2$  также соответствует всем предположениям, данным в утверждении. Для нее точка  $(0, 0)$  является стационарной:

$$f'_x(0, 0) = 3x^2|_{x=0} = 0, \quad f'_y(0, 0) = 2y|_{y=0} = 0,$$

$a_{11} = 6x|_{x=0} = 0$ ,  $a_{12} = 0$ ,  $a_{22} = 2$ . Получаем  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ , и об экстремуме в точке  $(0, 0)$  ничего сказать нельзя. Но непосредственно из анализа значений функции в окрестности точки  $(0, 0)$  получаем:  $f(0, 0) = 0$ , при  $x = 0, y > 0$   $f(x, y) > 0$ , а при  $y = 0, x < 0$   $f(x, y) < 0$ . Следовательно, экстремума в данной точке нет.

**Достаточные условия экстремума – общий случай.** Предположим, что функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков в окрестности стационарной точки  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ . Если второй дифференциал, т.е. квадратичная форма,  $\sum_{i,k=1}^m a_{ik} \Delta x_i \Delta x_k$  с коэффициентами  $a_{ik} = f''_{x_i x_k}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$ ,  $i, k = 1, 2, \dots, m$ , оказывается определенной положительной (отрицательной) формой, т.е.

$$a_{11} \begin{matrix} > \\ (<) \end{matrix} 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} > \\ (<) \end{matrix} 0, \dots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix} R 0, \quad (7.17)$$

где  $R$  – отношение «>», если  $m$  – четное, «<», если  $m$  – нечетное, то в точке  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  у функции строгий минимум (максимум).

Если квадратичная форма неопределенная (т.е. принимает значения противоположных знаков), то в точке  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0)$  у функции экстремума нет.

Если квадратичная форма полуопределенная (т.е. не принимает значения противоположных знаков, но обращается в нуль не только при нулевых значениях аргументов), то сделать вывод о наличии экстремума в данной точке нельзя.

Рассмотрим случаи, когда изложенные выше достаточные условия не могут быть применены к исследованию стационарных точек на экстремум.

**7.41. Функция  $f(x, y, z)$ , имеющая строгий минимум, к которой неприменимы достаточные условия экстремума.** Функция

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4.$$

Ее первые частные производные:  $f'_x = 4x^3$ ,  $f'_y = 4y^3$ ,  $f'_z = 4z^3$ . Следовательно, у функции существует единственная стационарная точка  $(0, 0, 0)$ . В ней все вторые частные производные (повторные и смешанные), очевидно, равны нулю. В этом случае получаем, что все определители в (7.17) равны нулю и сформулированные достаточные условия ответа о наличии (отсутствии) экстремума не дают. Однако непосредственно по самому заданию функции видно, что в точке  $(0, 0, 0)$  существует строгий минимум функции.

**7.42. Функция  $f(x, y, z)$ , имеющая строгий максимум, к которой неприменимы достаточные условия экстремума.** Функция

$$f(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^4$$

имеет частные производные первого порядка  $f'_x = -2x$ ,  $f'_y = -2y$ ,  $f'_z = -4z^3$ . У нее также существует единственная стационарная точка  $(0, 0, 0)$ . В ней вторые повторные производные равны:  $f''_{xx} = -2$ ,  $f''_{yy} = -2$ ,  $f''_{zz} = -12z^2 \Big|_{z=0} = 0$ , а все вторые смешанные производные равны нулю. Определители имеют следующие значения

$$a_{11} = -2, \delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4, \Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

И в этот раз получаем, что достаточные условия экстремума ответа не дают, хотя, очевидно, что в точке  $(0, 0, 0)$  достигается строгий максимум функции.

**7.43. Функция  $f(x, y, z)$ , имеющая нестрогий минимум, к которой неприменимы достаточные условия экстремума.** Функция  $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$ . Первые частные производные равны  $f'_x = f'_y = f'_z = 2(x + y + z)$ . Стационарные точки составляют целую плоскость  $x + y + z = 0$ . Вычислим вторые производные  $f''_{xx} = 2$ ,  $f''_{xy} = f''_{xz} = 2$ . В силу симметрии функции по всем ее аргументам все остальные вторые производные также равны двум. Имеем

$$a_{11} = 2, \delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Никакого вывода о достижении экстремума в точках плоскости  $x + y + z = 0$  сделать нельзя. Но, непосредственно исследуя поверхности (плоскости) уровня функции, можно сделать вывод, что в точках плоскости  $x + y + z = 0$  достигается нестрогий минимум функции.

**Наибольшее и наименьшее значения функции.** Предположим, что функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области  $D$  и имеет в  $D$  конечные частные производные. Для определения наибольшего (наименьшего) значения функции в области  $D$  необходимо найти все внутренние стационарные точки, вычислить значения функции в них и сравнить с наибольшим (наименьшим) значением функции на границе области  $D$ . Наибольшее (наименьшее) из этих значений будет наибольшим (наименьшим) значением функции в области.

Приведем примеры неприменимости данного правила отыскания наибольшего и наименьшего значений функции.

**7.44. Функция  $f(x, y)$ , не имеющая частных производных в точке своего строгого минимума.** Функция

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$

определенная в ограниченной замкнутой области  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ , не имеет в точке  $(0, 0)$  частных производных. Действительно, так как

на оси  $Ox$ ,  $y = 0$ ,  $f(x, 0) = \sqrt{x^2} = |x|$ , а  $|x|$  при  $x = 0$  не имеет производной, то в точке  $(0, 0)$   $f'_x$  не существует. В силу симметрии функции по ее аргументам получаем и несуществование  $f'_y$  в точке  $(0, 0)$ . Однако функция имеет в этой точке строгий минимум.

**7.45. Функция  $f(x, y)$ , имеющая бесконечные частные производные в точке своего строгого минимума.** Функция

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2},$$

определенная в ограниченной замкнутой области  $D: x^2 + y^2 \leq 1$ , имеет в точке  $(0, 0)$  бесконечные частных производные. Рассмотрим функцию на оси  $Ox$   $f(x, 0) = \sqrt[3]{x^2}$ . Частная производная  $f'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$  обращается в точке  $(0, 0)$  в бесконечность. То же самое можно сказать и о частной производной  $f'_y$ . Но функция имеет в точке  $(0, 0)$  строгий минимум.

## 7.4. Неявные функции, производные неявных функций

**Определение неявной функции от одной переменной.** Пусть две переменные  $x$  и  $y$  связаны между собой уравнением, имеющим вид

$$F(x, y) = 0, \quad (7.18)$$

где  $F(x, y)$  – функция двух переменных, определенная в некоторой области. Если для любого значения  $x$ , лежащего в каком-либо промежутке, существует одно (или несколько) значений  $y$ , которые вместе с  $x$  являются решениями уравнения (7.18), то таким образом определяется однозначная (или многозначная) функция  $y = f(x)$ , для которой относительно переменной  $x$  выполняется тождество  $F(x, f(x)) \equiv 0$ . Заданная при помощи неразрешенного относительно  $y$  уравнения (7.18) функция  $y = f(x)$  называется неявной.

В частном случае, в открытом прямоугольнике  $(a, b; c, d)$  уравнение (7.18) определяет  $y$  как однозначную функцию от  $x$ ,  $y = f(x)$ , если при любом значении  $x$  в интервале  $(a, b)$  уравнение (7.18) имеет один, и только один, корень  $y = f(x)$  в интервале  $(c, d)$ .

Заметим, что уравнение (7.18) может не иметь решений.

**7.46. Уравнение  $F(x, y) = 0$ , не определяющее функцию  $y = f(x)$ .** Уравнение  $F(x, y) = \sin x + \cos y + 3 = 0$ . При любом значении  $x$  не существует ни одного значения  $y$ , которое совместно с

$x$  удовлетворяло бы этому уравнению. Функция  $y = f(x)$  в данном случае не определяется.

Приведем примеры, в которых при решении уравнения (7.18) получаются многозначные функции  $y = f(x)$ .

**7.47. Уравнение  $F(x, y) = 0$ , определяющее две функции.** Уравнение  $F(x, y) = |x| + |y| - 1 = 0$  при каждом значении  $x$ ,  $-1 < x < 1$ , имеет два решения  $y = \pm(1 - |x|)$ , а при  $x = 1, -1$  одно решение  $y = 0$ . Соответственно получаем определенные на отрезке  $[-1, 1]$  две функции  $y = f_1(x) = 1 - |x|$ ,  $y = f_2(x) = |x| - 1$  (рис. 7.4, б).

**7.48. Уравнение  $F(x, y) = 0$ , определяющее  $n$  функций.** Уравнение  $F(x, y) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + x = 0$ , имеющее при некотором  $x = x_0$   $n$  различных (однократных) действительных корней  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , и в некоторой, достаточно малой, окрестности  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$  сохраняет это свойство. Получаем  $n$  функций  $y = f_i(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , определенных на интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . На рис. 7.4, в показан случай пяти корней.

**7.49. Уравнение  $F(x, y) = 0$ , определяющее бесконечное множество функций.** Уравнение  $F(x, y) = [xy] = 0$ , где  $[t]$  — целая часть числа  $t$ , при любом значении  $x$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , имеет континуум корней, а именно весь полуинтервал  $y \in \left[0, \frac{1}{x}\right)$ , если  $x \neq 0$ , или всю числовую ось  $-\infty < y < +\infty$ , если  $x = 0$ . Соответственно существует бесконечное множество функций  $y = f(x)$ , для каждой из которых равенство  $F(x, f(x)) = [x f(x)] = 0$  выполняется тождественно относительно  $x$ .

**Теорема о существовании однозначной неявной функции.** Предположим следующее: 1) функция  $F(x, y)$  определена и непрерывна в некоторой окрестности точки  $M_0(x_0, y_0)$  и в этой окрестности имеет непрерывные частные производные  $F'_x$  и  $F'_y$ ; в самой точке  $M_0(x_0, y_0)$  выполняется: 2)  $F(x_0, y_0) = 0$ ; 3)  $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ .

Тогда: а) существует окрестность  $D_0 = (x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \delta', y_0 + \delta')$  точки  $M_0(x_0, y_0)$ , в которой уравнение (7.18) определяет однозначную функцию  $y = f(x)$ ; б) выполняется  $f(x_0) = y_0$ ; в) в интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  функция  $y = f(x)$  непрерывна; г) в этом интервале существует и непрерывна производная  $f'(x)$ .

водная  $y'_x = f'(x)$ . При выполнении условий теоремы справедлива формула для производной неявной функции:  $y'_x = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$ .

Из теоремы нельзя убрать условия ее первого пункта. Контрпример.

**7.50. Функция  $F(x, y)$ , которая не является непрерывной в любой окрестности точки, при этом уравнение  $F(x, y) = 0$  определяет две функции в данной окрестности. Функция**

$$F(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y \end{cases}$$

(рис. 7.5, а) всюду определена, непрерывна в точке  $M_0(0, 0)$  и име-

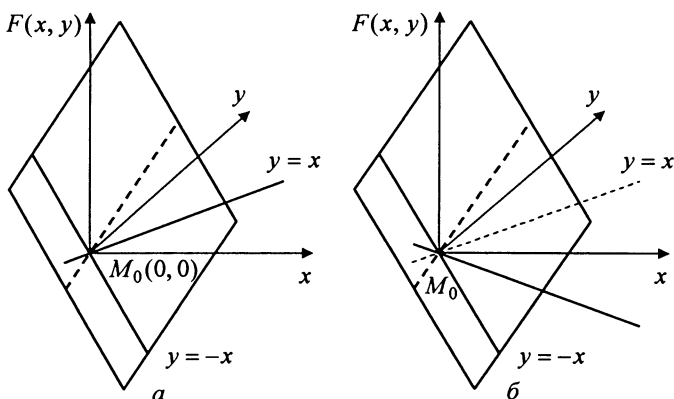


Рис. 7.5

ет в этой точке частные производные  $F'_x(0, 0) = 1$ ,  $F'_y(0, 0) = 1$ . При этом  $F(0, 0) = 0$ . Видим, что все предположения теоремы выполняются, исключая следующее. Функция  $F(x, y)$  ни в какой окрестности точки  $M_0(0, 0)$  не является непрерывной, так как имеет разрывы (и, заметим, не имеет частных производных  $F'_x$ ,  $F'_y$ ) в точках прямой  $x = y$ , кроме точки  $M_0(0, 0)$ .

Видим, что уравнение  $F(x, y) = 0$  при  $x = 0$  имеет одно решение  $y = 0$ , но при каждом  $x \neq 0$  — уже два решения  $y = \pm x$ .

Однако предположения первого пункта теоремы не являются необходимыми для существования, однозначности и непрерывности функции  $y = f(x)$ , непрерывности производной  $y'_x$  и применения формулы для ее вычисления. Контрпример.

**7.51.** Функция  $F(x, y)$ , которая не является непрерывной в любой окрестности точки, при этом уравнение  $F(x, y) = 0$  однозначно определяет функцию  $y = f(x)$  в данной окрестности. К

функции  $F(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{если } x \neq y, \\ -x, & \text{если } x = y \end{cases}$  (рис. 7.5, б) полностью отно-

сится все, что было сказано для аналогичной функции в предыдущем контрпримере. В то же время для каждого значения  $x$ , в данном случае, существует только одно значение  $y$  ( $y = -x$ ), которое совместно с  $x$  удовлетворяет уравнению  $F(x, y) = 0$ . Тем самым определяется однозначная функция  $y = f(x) = -x$ ; при этом  $f(0) = 0$ , функция  $y = f(x)$  непрерывна и имеет непрерывную производную. Так как частные производные  $F'_x = 1$ ,  $F'_y = 1$  не существуют только на прямой  $x = y$  ( $x \neq 0$ ), а  $y = f(x) = -x$ , то формула для вычисления производной применима. Проверим ее справедливость. Действительно,  $y'_x = (-x)' = -1$ ,  $-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{1}{1} = -1$ .

Из теоремы нельзя убрать предположение ее второго пункта.

**7.52.** Функция  $F(x, y)$ , которая ни в какой точке не обращается в нуль, при этом уравнение  $F(x, y) = 0$  не определяет функцию  $y = f(x)$ . Функция  $F(x, y) = x^2 + e^y$  определена и непрерывна всюду, вместе со своими частными производными  $F'_x$  и  $F'_y$ . Производная  $F'_y(x, y) = e^y$  всюду отлична от нуля. Однако  $F(x, y)$  ни в какой точке не обращается в нуль. Видим, что ни при каком значении  $x$  не существует значений  $y$ , которые совместно с  $x$  удовлетворяют уравнению  $F(x, y) = x^2 + e^y = 0$ , т.е. в данном случае функция  $y = f(x)$  не определяется.

Из теоремы нельзя убрать предположение ее третьего пункта.

**7.53.** Функция  $F(x, y)$ , у которой  $F'_y(0, 0) = 0$ , при этом уравнение  $F(x, y) = 0$  не определяет функцию  $y = f(x)$  ни в какой окрестности точки  $(0, 0)$ . Функция  $F(x, y) = x + y^2$  всюду определена и непрерывна вместе со своими частными производными  $F'_x$  и  $F'_y$ . В точке  $M_0(0, 0)$  функция  $F(x, y)$  обращается в нуль:  $F(0, 0) = 0$ . Однако производная  $F'_y(0, 0) = 2y|_{y=0} = 0$ . Видим, что

уравнение  $F(x, y) = x + y^2 = 0$  при  $x = 0$  имеет одно решение  $y = 0$ , но при каждом  $x < 0$  – уже два решения  $y = \pm\sqrt{-x}$ , а при любом  $x > 0$  решений нет. В окрестности точки  $M_0(0, 0)$  функция  $y = f(x)$  не определяется.

Но предположение третьего пункта теоремы не является необходимым для существования, однозначности и непрерывности функции  $y = f(x)$ , непрерывности производной  $y'_x$  (там, где она существует) и применения формулы для ее вычисления. Контрпример.

**7.54.** Функция  $F(x, y)$ , у которой  $F'_y(0, 0) = 0$ , при этом уравнение  $F(x, y) = 0$  однозначно определяет функцию  $y = f(x)$  в окрестности точки  $(0, 0)$ . К функции  $F(x, y) = x + y^3$  можно отнести все, сказанное об аналогичной функции в предыдущем контрпримере, включая то, что  $F'_y(0, 0) = 0$ .

Однако видим, что в этом случае уравнение  $F(x, y) = x + y^3 = 0$  при любом значении  $x$  имеет одно решение  $y = \sqrt[3]{-x}$ . Следовательно, определяется однозначная функция  $y = f(x) = \sqrt[3]{-x}$ , при этом  $f(0) = 0$ , и функция  $y = f(x)$  непрерывна.

Производная  $y'_x = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$  существует, конечна и непрерывна всюду, кроме точки  $x = 0$ . Проверим выполнение формулы для производной  $-\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} = -\frac{1}{3y^2} = -\frac{1}{3(\sqrt[3]{-x})^2} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ . Видим, что формула для производной справедлива при всех значениях  $x$ , при которых существует и конечна эта производная.

**Определение неявной функции от двух переменных.** Пусть три переменные  $x$ ,  $y$  и  $z$  связаны между собой уравнением, имеющим вид

$$F(x, y, z) = 0, \quad (7.19)$$

где  $F(x, y, z)$  – функция трех переменных, определенная в некоторой области. Уравнение (7.19) при некоторых условиях определяет  $z$  как функцию от двух переменных  $x$  и  $y$ :  $z = h(x, y)$ , которая, вообще говоря, может быть многозначной. При этом выполняется тождество  $F(x, y, h(x, y)) \equiv 0$  относительно переменных  $x$ ,  $y$ . Заданная при помощи неразрешенного относительно  $z$  уравнения (7.19) функция  $z = h(x, y)$  называется неявной.

В частном случае, в открытом параллелепипеде  $(a, b; c, d; e, f)$  уравнение (7.19) определяет  $z$  как однозначную функцию от  $x$  и  $y$ ,  $z = h(x, y)$ , ес-



ли для любой точки  $(x, y)$ , содержащейся в открытом прямоугольнике  $(a, b; c, d)$ , уравнение (7.19) имеет один, и только один, корень  $z = h(x, y)$  в интервале  $(e, f)$ .

Уравнение (7.19) может не иметь решений. Пример.

**7.55. Уравнение  $F(x, y, z) = 0$ , которое не определяет функцию  $z = h(x, y)$ .** Уравнение  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + e^z = 0$  для любой точки  $(x, y)$  не имеет ни одного корня  $z$ , т.е. функция  $z = h(x, y)$  не определяется.

Приведем пример определения уравнением (7.19) неоднозначной функции  $z = h(x, y)$ .

**7.56. Уравнение  $F(x, y, z) = 0$ , которое определяет две функции вида  $z = h(x, y)$ .** Уравнение эллипсоида

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

при любых значениях  $x$  и  $y$ :  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ , можно разрешить относительно переменной  $z$ :  $z = h(x, y) = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ . Получим две функции, задающие «верхнюю» и «нижнюю» части эллипсоида.

**Теорема о существовании однозначной неявной функции двух переменных.** Предположим следующее: 1) функция  $F(x, y, z)$  определена и непрерывна в некоторой окрестности точки  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  и в этой окрестности имеет непрерывные частные производные  $F'_x$ ,  $F'_y$  и  $F'_z$ ; в самой точке  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  выполняется: 2)  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ; 3)  $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ .

Тогда: а) существует некоторая окрестности  $E_0$  точки  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ :  $E_0 = (x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta'; z_0 - \Delta'', z_0 + \Delta'')$ , в которой уравнение (7.19) определяет однозначную функцию  $z = h(x, y)$ ; б) выполняется  $h(x_0, y_0) = z_0$ ; в) в прямоугольнике  $(x_0 - \Delta, x_0 + \Delta; y_0 - \Delta', y_0 + \Delta')$  функция  $h(x, y)$  непрерывна по совокупности своих аргументов; г) в этом прямоугольнике существуют и непрерывны частные производные  $h'_x$ ,  $h'_y$ . При выполнении условий теоремы справедливы формулы для частных производных неявной функции:  $z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}$ ,  $z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$ .

Ниже построим контрпримеры, аналогичные тем, которые были приве-

дены при рассмотрении теоремы о существовании однозначной неявной функции одной переменной.

**7.57. Функция  $F(x, y, z)$ , которая не является непрерывной в любой окрестности точки, при этом уравнение  $F(x, y, z) = 0$  определяет две функции в данной окрестности. Функция**

$$F(x, y, z) = \begin{cases} x + y + z, & \text{если } z \neq x + y, \\ 0, & \text{если } z = x + y \end{cases}$$

всюду определена, непрерывна в точке  $P_0(0, 0, 0)$ ,  $F(0, 0, 0) = 0$ . Она имеет в точке  $P_0$  частные производные  $F'_x(0, 0, 0) = 1$ ,  $F'_y(0, 0, 0) = 1$ ,  $F'_z(0, 0, 0) = 1$ . Все предположения теоремы выполняются, исключая предположения первого пункта. Функция  $F(x, y, z)$  ни в какой окрестности точки  $P_0(0, 0, 0)$  не является непрерывной, так как имеет разрывы (и, заметим, не имеет частных производных  $F'_x$ ,  $F'_y$ ,  $F'_z$ ) в точках плоскости  $z = x + y$ , кроме прямой  $z = 0$ ,  $x + y = 0$ .

Видим, что уравнение  $F(x, y, z) = 0$  при  $x$  и  $y$ ,  $x + y = 0$ , имеет одно решение  $z = 0$ , но при любых  $x$  и  $y$ ,  $x + y \neq 0$  — уже два решения  $z = \pm(x + y)$ . Получим две функции  $z = h_1(x, y) = x + y$  и  $z = h_2(x, y) = -x - y$ .

**7.58. Функция  $F(x, y, z)$ , которая не является непрерывной в любой окрестности точки, при этом уравнение  $F(x, y, z) = 0$  однозначно определяет функцию  $z = h(x, y)$  в этой окрестности.**

К функции  $F(x, y, z) = \begin{cases} x + y + z, & \text{если } z \neq x + y, \\ -x - y, & \text{если } z = x + y \end{cases}$  можно отнести все,

сказанное для аналогичной функции в предыдущем контрпримере. В то же время для каждого значения  $x$  и  $y$ , в данном случае, существует только одно значение  $z$  ( $z = -x - y$ ), которое совместно с  $x$  и  $y$  удовлетворяет уравнению  $F(x, y, z) = 0$ . Тем самым определяется однозначная функция  $z = h(x, y) = -x - y$ ; при этом  $h(0, 0) = 0$ , функция  $z = h(x, y)$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные.

Так как частные производные  $F'_x = 1$ ,  $F'_y = 1$ ,  $F'_z = 1$  не существуют только в точках плоскости  $z = x + y$ , кроме прямой  $z = 0$ ,  $x + y = 0$ , а  $z = h(x, y) = -x - y$ , то формулы для вычисления частных производных применимы. Проверим их справедливость. Дей-

ствительно, имеем  $z'_x = -1$ ,  $-\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{1}{1} = -1$ ;  $z'_y = -1$ ,  $-\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{1}{1} = -1$ .

**7.59.** Функция  $F(x, y, z)$ , которая ни в какой точке не обращается в нуль, при этом уравнение  $F(x, y, z) = 0$  не определяет функцию  $z = h(x, y)$ . Функция

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + e^z$$

определена и непрерывна всюду вместе со своими частными производными  $F'_x$ ,  $F'_y$  и  $F'_z$ . Производная  $F'_z(x, y) = e^z$  всюду отлична от нуля. Однако  $F(x, y, z)$  ни в какой точке не обращается в нуль. Видим, что при любых значениях  $x$  и  $y$  не существует значения  $z$  такого, чтобы  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + e^z = 0$ , т.е. в данном случае функция  $z = h(x, y)$  не определяется.

**7.60.** Функция  $F(x, y, z)$ , у которой  $F'_z(0, 0, 0) = 0$ , при этом уравнение  $F(x, y, z) = 0$  не определяет функцию  $z = h(x, y)$  ни в какой окрестности точки  $(0, 0, 0)$ . Функция  $F(x, y, z) = x + y + z^2$  всюду определена и непрерывна вместе со своими частными производными  $F'_x$ ,  $F'_y$  и  $F'_z$ . В точке  $P_0(0, 0, 0)$  функция  $F(x, y, z)$  равна нулю:  $F(0, 0, 0) = 0$ . Но производная  $F'_z(0, 0, 0) = 2z|_{z=0} = 0$ . Видим, что уравнение  $F(x, y, z) = x + y + z^2 = 0$  при  $x + y = 0$  имеет одно решение  $z = 0$ , но при любых  $x$  и  $y$ ,  $x + y < 0$  — уже два решения  $z = \pm\sqrt{-x-y}$ , а при любых  $x$  и  $y$ ,  $x + y > 0$ , решений нет. В окрестности точки  $P_0(0, 0, 0)$  функция  $z = h(x, y)$  не определяется.

**7.61.** Функция  $F(x, y, z)$ , у которой  $F'_z(0, 0, 0) = 0$ , при этом в окрестности точки  $(0, 0, 0)$  уравнение  $F(x, y, z) = 0$  однозначно определяет функцию  $z = h(x, y)$ . К функции  $F(x, y, z) = x + y + z^3$  можно отнести все, сказанное об аналогичной функции в предыдущем контрпримере, включая то, что  $F'_z(0, 0, 0) = 0$ . Видим, что в этом случае уравнение  $F(x, y, z) = x + y + z^3 = 0$  при любых значениях  $x$  и  $y$  имеет одно решение  $z = \sqrt[3]{-x-y}$ . Следовательно, определяется однозначная функция  $z = h(x, y) = \sqrt[3]{-x-y}$ ,  $h(0, 0) = 0$ , и функция  $z = h(x, y)$  непрерывна.

Частные производные  $z'_x = z'_y = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y)^2}}$  существуют, ко-

нечны и непрерывны всюду, кроме прямой  $x + y = 0$  плоскости  $Oxy$ . Проверим выполнение формул для частных производных:

$$-\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{1}{3z^2} = -\frac{1}{3(\sqrt[3]{-x-y})^2} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+y)^2}}.$$

Видим, что формулы для частных производных справедливы при всех значениях  $x$  и  $y$ , при которых существуют и конечны эти производные.

**Определение неявных функций, задаваемых системой уравнений.** Дана система двух уравнений с тремя переменными:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases} \quad (7.20)$$

где функции  $F(x, y, z)$  и  $G(x, y, z)$  определены в открытом параллелепипеде  $(a, b; c, d; e, f)$ . Если для каждого значения  $x$  в интервале  $(a, b)$  система уравнений (7.20) имеет одну, и только одну, систему решений  $(y, z)$  из прямоугольника  $(c, d; e, f)$ , то система (7.20) определяет  $y$  и  $z$  как однозначные функции от  $x$ :  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$ .

Рассмотрим примеры систем уравнений (7.20), которые не определяют функций  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$  или определяют их неоднозначно.

**7.62, 7.63. Системы уравнений, не определяющие функции  $y = f(x)$  и  $z = g(x)$  или одну из них.** Система уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = -e^x + e^y - e^z = 0, \\ G(x, y, z) = e^x - e^y + e^z + 1 = 0 \end{cases}$$

несовместна (почленно сложим уравнения), и функции  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$  из нее не определить.

Несколько измененная система уравнений

$$\begin{cases} 2e^x + e^y - e^z = 0, \\ e^x - e^y - e^z = 0 \end{cases}$$

уже разрешима:  $3e^x = 2e^z$ ,  $e^x = -2e^y$  (складываем и вычитаем уравнения). Но из нее получим (логарифмированием) только одну функцию  $z = x + \ln \frac{3}{2}$ , а вторая не определяется, так как уравнение

$e^x = -2e^y$  неразрешимо — левая и правая части положительная и отрицательная соответственно при любых значениях  $x$  и  $y$ .

**7.64, 7.65. Системы уравнений, определяющие функции  $y = f(x)$  и  $z = g(x)$  неоднозначно.** Система

$$\begin{cases} 2x + y^2 + z^2 = 0, \\ x + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

почленным сложением и вычитанием уравнений сводится к виду:

$$\begin{cases} 3x + 2y^2 = 0, \\ x + 2z^2 = 0. \end{cases} \text{ Полученные уравнения разрешаются неоднозначно:}$$

$$y = \pm \sqrt{-\frac{3}{2}x}, \quad z = \pm \sqrt{-\frac{1}{2}x}, \quad x \leq 0.$$

Система уравнений  $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ -x - y + z = 0 \end{cases}$  имеет бесконечно много ре-

шений и соответственно определяет бесконечно много функций  $y = f(x)$  и  $z = g(x)$ , а именно все, удовлетворяющие условию  $z - y = x$  или  $g(x) - f(x) = x$ . Например,  $y = \sin x$ ,  $z = x + \sin x$  или  $y = x^2 + x$ ,  $z = x^2 + 2x$ .

**Теорема о существовании однозначных неявных функций, задаваемых системой уравнений.** Предположим следующее: 1) функции  $F(x, y, z)$  и  $G(x, y, z)$  определены и непрерывны в некоторой окрестности точки  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , и в этой окрестности имеют непрерывные частные производные; в самой точке  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  выполняется: 2)  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ,  $G(x_0, y_0, z_0) = 0$ ; 3)  $J(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , где  $J(x, y, z) = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}$ .

Тогда: а) существует некоторая окрестности  $M$  точки  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ :  $M = (x_0 - \delta, x_0 + \delta; y_0 - \delta', y_0 + \delta'; z_0 - \delta'', z_0 + \delta'')$ , в которой система уравнений (7.20) определяет  $y$  и  $z$  как однозначные функции от  $x$ :  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$ ; б)  $f(x_0) = y_0$ ,  $g(x_0) = z_0$ ; в) в интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  функции  $f(x)$ ,  $g(x)$  непрерывны; г) в этом интервале существуют и непрерывны производные  $f'(x)$ ,  $g'(x)$ .

При выполнении условий теоремы производные  $y' = f'(x)$  и  $z' = g'(x)$  неявных функций определяются из системы линейных уравнений с отличным от нуля определителем  $J$ :  $\begin{cases} F'_x + F'_y y' + F'_z z' = 0, \\ G'_x + G'_y y' + G'_z z' = 0. \end{cases}$

Ниже приведем контрпримеры в той же последовательности, что и в предыдущих случаях рассмотрения теорем о существовании однозначных неявных функций.

**7.66. Функции  $F(x, y, z)$  и  $G(x, y, z)$ , которые не являются непрерывными в любой окрестности точки, и система уравнений неоднозначно определяет функции  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$  в данной окрестности. Рассмотрим систему уравнений**

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0, \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

и точку  $P_0(0, 0, 0)$ . Легко проверить, что все требования теоремы выполняются, в частности, определитель

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

не равен нулю. Соответственно существуют однозначные, непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ . Найдем их. Складывая и вычитая уравнения, получаем  $3x + 2y = 0$  и  $x + 2z = 0$ , т.е.  $y = -\frac{3}{2}x$ ,  $z = -\frac{1}{2}x$ .

Далее несколько изменим систему уравнений с целью: 1) сделать функции  $F(x, y, z)$  и  $G(x, y, z)$  разрывными в любой окрестности точки  $P_0(0, 0, 0)$ , 2) не нарушить предположений второго и третьего пунктов теоремы, 3) обеспечить неоднозначность получаемых функций  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$ . Введем функции

$$F^*(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{если выполняется } x = y = z, \\ 2x + y + z, & \text{для всех других } x, y, z, \end{cases}$$

$$G^*(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \text{если выполняется } x = y = z, \\ x + y - z, & \text{для всех других } x, y, z. \end{cases}$$

Они совпадают с функциями  $F$  и  $G$  всюду, кроме диагональной прямой  $x = y = z$ , соответственно имеют разрывы во всех ее точках, кроме точки  $P_0(0, 0, 0)$ . Очевидно, функции  $F^*$  и  $G^*$  имеют разрывы в любой окрестности точки  $P_0$ . Заметим, что не нарушаются предположения второго и третьего пунктов теоремы: точка  $P_0$  удовлетворяет системе:  $F^*(0, 0, 0) = 0$ ,  $G^*(0, 0, 0) = 0$ ; определитель  $J^*(x, y, z)$  по-прежнему в точке  $P_0$  отличен от нуля,  $J^*(0, 0, 0) = -2$ . Последнее объясняется тем, что величины частных производных функций  $F^*$  и  $G^*$  в точке  $P_0(0, 0, 0)$  определяются только значениями этих функций на координатных осях, а эти значения не переопределяются.

Видим, что новая система уравнений  $\begin{cases} F^*(x, y, z) = 0, \\ G^*(x, y, z) = 0 \end{cases}$  определяет неоднозначные функции  $y = f^*(x)$ ,  $z = g^*(x)$ :  $y = -\frac{3}{2}x$  и  $y = x$ ,  $z = -\frac{1}{2}x$  и  $z = x$ . В самом деле новой системе удовлетворяют как точки, лежащие на прямой пересечения плоскостей  $2x + y + z = 0$  и  $x + y - z = 0$ , так и точки диагональной прямой  $x = y = z$ .

**7.67. Функции  $F(x, y, z)$  и  $G(x, y, z)$ , которые не являются непрерывными в любой окрестности точки, при этом система уравнений однозначно определяет функции  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$  в данной окрестности.** Возьмем за основу предыдущий контрпример. Только переопределение функций  $F$  и  $G$  выполним иначе. Введем функции

$$F^*(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если выполняется } x = y = z, \\ 2x + y + z, & \text{для всех других } x, y, z, \end{cases}$$

$$G^*(x, y, z) = \begin{cases} x, & \text{если выполняется } x = y = z, \\ x + y - z, & \text{для всех других } x, y, z. \end{cases}$$

Как и раньше, они совпадают с функциями  $F$  и  $G$  всюду, кроме диагональной прямой  $x = y = z$ , т.е. имеют разрывы во всех ее точках, исключая точку  $P_0(0, 0, 0)$ . Следовательно, функции  $F^*$  и  $G^*$  имеют разрывы в любой окрестности точки  $P_0$ . При этом легко проверить, что не нарушаются предположения второго и третьего пунктов теоремы. Последнее объясняется прежними причинами.

Заметим, что новая система уравнений  $\begin{cases} F^*(x, y, z) = 0, \\ G^*(x, y, z) = 0 \end{cases}$  уже определяет однозначные функции  $y = f^*(x)$  и  $z = g^*(x)$ :  $y = -\frac{3}{2}x$  и  $z = -\frac{1}{2}x$ . Действительно, новой системе удовлетворяют только точки, лежащие на прямой пересечения плоскостей  $2x + y + z = 0$  и  $x + y - z = 0$ , так как равенство  $x = 0$ , при условии  $x = y = z$ , дает лишь одну точку  $P_0(0, 0, 0)$ . Видим, что полученные функции и их производные  $y' = -\frac{3}{2}$ ,  $z' = -\frac{1}{2}$  непрерывны.

Так как частные производные функций  $F^*$  и  $G^*$  не существуют только в точках диагональной прямой  $x = y = z \neq 0$ , а во всех других точках существует определитель  $J^*(x, y, z) = -2$ , то в таких точках система линейных уравнений невырожденная. Проверим правильность вычисления производных функций  $y = -\frac{3}{2}x$  и  $z = -\frac{1}{2}x$  с помощью этой системы. Действительно, система

$$\begin{cases} 2 + y' + z' = 0, \\ 1 + y' - z' = 0 \end{cases} \text{ имеет решения } y' = -\frac{3}{2}, z' = -\frac{1}{2}.$$

**7.68.** Функции  $F(x, y, z)$  и  $G(x, y, z)$ , для которых не существует точки  $P_0(x_0, y_0, z_0)$ , такой, что  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ,  $G(x_0, y_0, z_0) = 0$ , и система уравнений не определяет функций  $y = f(x)$  и  $z = g(x)$ . Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} 2e^x + e^y - e^z = 0, \\ e^x - e^y + 2e^z = 0. \end{cases}$$

Заметим, что предположения первого и третьего пунктов теоремы выполняются. Обе функции  $F(x, y, z) = 2e^x + e^y - e^z$  и  $G(x, y, z) = e^x - e^y + 2e^z$  всюду определены и непрерывны, вместе со всеми своими частными производными. Определитель

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^y & -e^z \\ -e^y & 2e^z \end{vmatrix} = 2e^{y+z} - e^{y+z} = e^{y+z} > 0$$

всюду. Однако не существует точки  $P_0$ , удовлетворяющей данной системе уравнений. Действительно, почленно складывая уравнения системы, получаем  $3e^x + e^z = 0$ , умножив на 2 обе части первого уравнения и сложив почленно со вторым, получаем  $5e^x + e^y = 0$ . Оба полученных уравнения неразрешимы в виду положительности входящих в них показательных функций, а значит, функции  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$  не определяются.

**7.69.** Функции  $F(x, y, z)$  и  $G(x, y, z)$ , для которых определитель  $J(0, 0, 0) = 0$ , при этом система уравнений неоднозначно определяет функции  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$  в любой окрестности точки  $(0, 0, 0)$ . Рассмотрим систему уравнений



$$\begin{cases} 2x + y^2 + z^2 = 0, \\ x + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

из примера 7.64 и точку  $P_0(0, 0, 0)$ . Предположения первого и второго пунктов теоремы выполняются, а именно: функции  $F(x, y, z) = 2x + y^2 + z^2$  и  $G(x, y, z) = x + y^2 - z^2$  всюду определены и непрерывны вместе со всеми своими частными производными; точка  $P_0(0, 0, 0)$  удовлетворяет данной системе. Однако в точке  $P_0(0, 0, 0)$  определитель

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & -2z \end{vmatrix} = -8yz$$

равен нулю. Из примера 7.64 известно, что данная система уравнений неоднозначно определяет функции  $y = f(x)$  и  $z = g(x)$  в любой окрестности точки  $P_0(0, 0, 0)$ .

**7.70.** Функции  $F(x, y, z)$  и  $G(x, y, z)$ , для которых определитель  $J(0, 0, 0) = 0$ , а система уравнений однозначно определяет функции  $y = f(x)$ ,  $z = g(x)$  в окрестности точки  $(0, 0, 0)$ . Рассмотрим систему уравнений  $\begin{cases} 2x + y^3 + z^3 = 0, \\ x + y^3 - z^3 = 0 \end{cases}$  и точку  $P_0(0, 0, 0)$ .

Очевидно, выполняются все предположения первого и второго пунктов теоремы. В то же время в точке  $P_0(0, 0, 0)$  определитель

$$J(x, y, z) = \begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y^2 & 3z^2 \\ 3y^2 & -3z^2 \end{vmatrix} = -18y^2z^2$$

равен нулю. Разре-

шим данную систему уравнений (почленно их складывая и вычитая), имеем  $3x + 2y^3 = 0$  и  $x + 2z^3 = 0$ , отсюда получаем однознач-

ные функции  $y = f(x) = \sqrt[3]{-\frac{3}{2}x}$  и  $z = g(x) = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}x}$ . Заметим, что

при  $x = x_0 = 0$  эти функции принимают соответственно значения  $y_0 = 0$  и  $z_0 = 0$ :  $f(0) = 0$ ,  $g(0) = 0$ ; функции  $f(x)$  и  $g(x)$  всюду определены и непрерывны. Производные

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{18}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad z' = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{54}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

существуют и непрерывны всюду, кроме точки  $x = 0$ . Решим систе-

му линейных уравнений 
$$\begin{cases} 2 + 3y^2y' + 3z^2z' = 0, \\ 1 + 3y^2y' - 3z^2z' = 0 \end{cases}$$
 с определителем

$J(x, y, z) = -18y^2z^2$ , предполагая, что  $y, z \neq 0$  и соответственно  $J(x, y, z) \neq 0$ . Почленно складывая и вычитая уравнения, получаем  $3 + 6y^2y' = 0$  и  $1 + 6z^2z' = 0$ . Отсюда

$$y' = -\frac{1}{2y^2} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{9x^2}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{18}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}, \quad z' = -\frac{1}{6z^2} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{6\sqrt[3]{x^2}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{54}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},$$

где  $x, y, z \neq 0$ . Видим, что там, где  $J(x, y, z) \neq 0$ , решение системы уравнений дает правильный результат.

### Упражнения

7.1. Привести пример функции  $f(x, y)$ , которая имеет частные производные  $f'_x$  и  $f'_y$  только в точке  $(1, 2)$ , и  $f'_x(1, 2) = 3$ ,  $f'_y(1, 2) = 4$ .

7.2. Показать, что функция  $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$  имеет обе частные производные в точке  $(0, 0)$ , но недифференцируема в этой точке. Сравнить с примером 7.5.

7.3. Построить всюду дифференцируемую сложную функцию  $u(t, v)$  из всюду дифференцируемой функции  $u(x, y, z)$  и всюду недифференцируемых функций  $x = x(t, v)$ ,  $y = y(t, v)$ ,  $z = z(t, v)$ .

7.4. Построить контрпримеры, аналогичные контрпримерам 7.9, 7.10 и 7.11, но для случая теоремы о частных производных сложной функции.

7.5. Дана функция  $z = (x + 2)^2 D(x) + (y - 3)^2 D(y) - 7x - 5y + 4$ . Показать, что ее график имеет касательную плоскость только в одной точке. Найти уравнение этой касательной плоскости.

7.6. Построить пример функции  $f(x, y)$ , имеющей всюду плотные на плоскости  $Oxy$  множества точек строгих максимумов и строгих минимумов.

7.7. Показать, что функция  $f(x, y) = (y - x^3)(y - 3x^3)$  из примера 7.33 не достигает на плоскости  $Oxy$  своих наименьшего и наибольшего значений, но на любой прямой этой плоскости достигает минимального значения.

7.8. Построить пример уравнения  $F(x, y, z) = 0$ , которое определяет три функции вида  $z = h(x, y)$ , см. пример 7.56.

## РАЗДЕЛ 8

# ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 8.1. Первообразная и неопределенный интеграл

**Определение первообразной функции.** Функция  $F(x)$  называется первообразной функцией функции  $f(x)$  на промежутке  $X$ , если для любого  $x \in X$   $f(x)$  является производной функции  $F(x)$  или  $f(x)dx$  является дифференциалом  $F(x)$ :  $F'(x) = f(x)$  или  $dF(x) = f(x)dx$ .

Далеко не для всякой функции  $f(x)$  существует первообразная.

#### 8.1. Функция, не имеющая первообразной. Функция

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

на отрезке  $[-1, 1]$ . Она не имеет на всем отрезке  $[-1, 1]$  первообразной. На полуинтервале  $[-1, 0)$  ее первообразной будет функция  $F(x) = -x + C_1$ , так как  $F'(x) = -1$ ; на отрезке  $[0, 1]$  ее первообразной будет  $F(x) = x + C_2$ , так как  $F'(x) = 1$ . При любых значениях  $C_1, C_2$  функция  $F(x)$ , рассматриваемая на всем отрезке  $[-1, 1]$ , не будет иметь в точке  $x = 0$  производной, так как для  $F(x)$  это точка разрыва (при  $C_2 \neq C_1$ ), или излома (при  $C_2 = C_1$ ). Следовательно, первообразная для функции  $f(x)$  на  $[-1, 1]$  не существует.

Данная функция имеет разрыв первого рода. Известно, что производная некоторой функции может иметь разрыв только второго рода, [2], т. I, с. 182, поэтому рассмотрим функцию  $f(x)$  с таким разрывом.

**8.2. Функция с разрывом второго рода, не имеющая первообразной.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{1}{x}$ , если  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Во всех точках отрезка  $[-1, 1]$ , кроме нуля, выполня-

ется  $(\ln|x| + C)' = \frac{1}{x}$ . При  $x = 0$  функция  $\ln|x|$  не определена и производной в нуле у нее нет. Доопределить функцию  $\ln|x|$  при  $x = 0$  некоторым значением  $y_0$  так, чтобы существовала производная доопределенной функции  $F(x) = \begin{cases} \ln|x|, & \text{если } x \neq 0 \\ y_0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$  нельзя, так как при любом  $y_0$  функция  $F(x)$  оказывается разрывной в точке  $x = 0$  и не имеет в нуле производной.

**Теорема о первообразной.** Пусть на некотором, конечном или бесконечном, замкнутом или нет, промежутке  $X$  функции  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  имеют производные  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  соответственно. Для того чтобы  $f(x) = \varphi(x)$  для всех  $x \in X$ , необходимо и достаточно, чтобы для всех  $x \in X$   $\Phi(x) = F(x) + C$ , где  $C = \text{const}$ . Иными словами, две функции являются первообразными данной функции тогда и только тогда, когда они отличаются на постоянную.

В теореме существенно предположение о связности множества, в котором  $F(x)$  есть первообразная для функции  $f(x)$ . Снимем это предположение. Для несвязных множеств теорема уже не имеет силы. Приведем контрпример.

**8.3. Функции  $F(x)$  и  $f(x)$ ,  $F'(x) = f(x)$ , заданы на несвязном множестве, и первообразными для  $f(x)$  являются не только функции  $F(x) + C$ .** Пусть функции  $F(x)$  и  $f(x)$  заданы на множестве  $M$  — всей числовой оси, кроме точки  $x = 0$ , и на этом множестве  $F'(x) = f(x)$ , тогда любая функция вида  $F(x) + \varphi(x)$ , где

$\varphi(x) = \begin{cases} C_1, & \text{если } x < 0, \\ C_2, & \text{если } x > 0, \end{cases}$  также будет первообразной на этом множестве

в том смысле, что при любом  $x \in M$  будет выполняться  $(F(x) + \varphi(x))' = f(x)$ . Обратно, любая первообразная на этом множестве может быть представлена в таком виде. Это следует из раздельного применения теоремы к двум интервалам  $(-\infty, 0)$  и  $(0, +\infty)$ , составляющим множество определения  $M$  функций  $F(x)$  и  $f(x)$ .

**Определение неопределенного интеграла.** Совокупность всех первообразных для функции  $f(x)$ , определенной на промежутке  $X$ , называется неопределенным интегралом от этой функции на  $X$  и обозначается  $\int f(x) dx$ . Если  $F(x)$  любая первообразная для функции  $f(x)$ , то в соответствии с теоремой  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , где  $C$  не одна конкретная постоянная, а произвольная (любая) постоянная.

Заметим, что из предыдущего контрпримера следует не только необходимость определения (рассмотрения) отдельно взятой первообразной функции на некотором промежутке  $X$ , но необходимость того же самого для неопределенного интеграла как множества таких первообразных.

**8.4. Промежутки, на которых справедливы некоторые табличные интегралы.** Множеству  $M$ , заданному в предыдущем контрпримере, отвечает табличный интеграл  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ . На самом деле любая первообразная  $\ln|x| + C$  (соответственно и подынтегральная функция) определена на двух промежутках (интервалах)  $(-\infty, 0)$  и  $(0, +\infty)$ , отдельно. Если требуется записать табличный интеграл сразу для всей области определения первообразной функции, то необходима формула:

$$\int \frac{dx}{x} = \begin{cases} \ln(-x) + C_1, & \text{если } x < 0, \\ \ln x + C_2, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Аналогично интеграл  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$  необходимо отдельно рассматривать на трех промежутках (интервалах)  $(-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(1, +\infty)$ , а интеграл  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$  — отдельно на интервалах  $(\pi k, \pi(k+1))$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Несколько забегаю вперед, заметим, что сказанное особенно важно при использовании формулы Ньютона–Лейбница.

**Интегрирование путем замены переменных.** Предположим, что функции  $f(x)$  и  $\omega(t)$  определены на промежутках  $X$  и  $T$  соответственно и выполняется  $\omega(t) \in X$  при любом  $t \in T$ . Пусть функция  $f(x)$  имеет на  $X$  первообразную  $F(x)$ , т.е.  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , а функция  $\omega(t)$  дифференцируема (имеет конечную производную) на  $T$ . Тогда функция  $f(\omega(t))\omega'(t)$  имеет на  $T$  первообразную  $F(\omega(t))$ , т.е. выполняется:

$$\int f(\omega(t))\omega'(t)dt = F(\omega(t)) + C = \int f(x) dx \Big|_{x=\omega(t)}.$$

Конечность производной у функции  $\omega(t)$  на  $T$  не всегда является необходимой для корректности замены переменных. Приведем контрпример.

**8.5. Имеющая бесконечную производную функция  $\omega(t)$ , при которой оказалась справедлива замена переменных в интеграле.** Функции  $f(x) = 3x^2$ ,  $\omega(t) = \sqrt[3]{t}$  определены обе на всей числовой оси. Заметим, что  $\omega'(0) = +\infty$ . Тогда  $F(x) = x^3$  и  $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ .

Рассмотрим функцию  $f(\omega(t))\omega'(t) = 3(\sqrt[3]{t})^2 \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} = 1$ , она имеет первообразную  $t$ . Это соответствует тому, что  $F(\omega(t)) = (\sqrt[3]{t})^3 = t$ . Видим, что  $\int f(\omega(t))\omega'(t)dt = F(\omega(t)) + C = \int f(x) dx \Big|_{x=\omega(t)}$ , а именно, получаем  $\int dt = t + C = \int 3x^3 dx \Big|_{x=\sqrt[3]{t}} = x^3 + C \Big|_{x=\sqrt[3]{t}}$ .

В другом случае та же замена переменной оказывается некорректной.

**8.6. Имеющая бесконечную производную функция  $\omega(t)$ , при которой замена переменной в интеграле некорректна.** В качестве первообразной примем определенную на всей числовой оси функцию  $F(x) = x^3 \sin \frac{1}{x^3}$ ,  $x \neq 0$ ,  $F(0) = 0$ . Эта функция всюду имеет производную: в любой точке  $x \neq 0$  как суперпозиция всюду дифференцируемых функций, а при  $x = 0$  непосредственно по определению производной, причем  $F'(0) = 0$ . Показать последнее предоставляем читателям. Обозначим  $F'(x)$  через  $f(x)$ . Как и в предыдущем контрпримере, используем подстановку  $\omega(t) = \sqrt[3]{t}$ . Однако в данном случае функция  $f(\omega(t))\omega'(t)$  не имеет первообразной, равной  $F(\omega(t))$ . Действительно, выполнив подстановку  $x = \omega(t) = \sqrt[3]{t}$ , получим  $F(\omega(t)) = t \sin \frac{1}{t}$ ,  $t \neq 0$ ,  $F(\omega(0)) = 0$ , т.е. функцию, не имеющую производной в точке  $x = 0$ , см. контрпример 3.10.

## 8.2. Определение и существование определенного интеграла

**Определение определенного интеграла по Риману.** Пусть функция  $f(x)$  задана на отрезке  $[a, b]$ . Назовем разбиением (неразмеченным) этого отрезка конечное множество  $T$  точек  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ,  $n > 1$ , таких, что  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Величину  $\lambda_T = \max_{i \in \overline{1, n}} \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , т.е. наибольшую из длин отрезков разбиения  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , назовем диаметром разбиения  $T$ .

Выберем на каждом из отрезков разбиения  $[x_{i-1}, x_i]$  точку  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i \in \overline{1, n}$ . Совокупность точек  $\{x_0, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n\}$  назовем размеченным разбиением  $V$  отрезка  $[a, b]$ . Соответствующее  $V$  неразмеченное разбиение  $T$

обозначим через  $T(V)$ . Сумму  $\sigma(V) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  назовем интегральной суммой функции  $f(x)$ , отвечающей размеченному разбиению  $V$ .

Число  $I$  называется определенным интегралом (по Риману) от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если для каждого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что для любого размеченного разбиения  $V$  отрезка  $[a, b]$ , при котором  $\lambda_{T(V)} < \delta$ , выполняется неравенство  $|I - \sigma(V)| < \varepsilon$ .

Интеграл обозначают  $I = \int_a^b f(x) dx$ , числа  $a$  и  $b$  носят соответственно названия нижнего и верхнего пределов интеграла.

Подробное и строгое определение определенного интеграла через последовательности интегральных сумм дано в [3], т. I, с. 561.

Приведем некоторые примеры несуществования определенного интеграла (по Риману), которые можно рассматривать как контрпримеры к утверждениям, необоснованно расширяющим его применимость.

**8.7. Несуществование интеграла  $\int_{-1}^1 f(x) dx$  от неограниченной на отрезке  $[-1, 1]$  функции.** Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

$\int_{-1}^1 f(x) dx$  не существует, так как она неограниченная на отрезке  $[-1, 1]$ . Действительно, при любом разбиении отрезка  $[-1, 1]$  на отрезке разбиения, содержащем нуль, может быть так выбрана точка, что значение функции в этой точке, а следовательно, и значение соответствующего слагаемого в интегральной сумме и вся интегральная сумма  $\sigma(V)$  могут быть сделаны сколь угодно большими или сколь угодно малыми. Следовательно, при любом разбиении  $T$  для  $\varepsilon = 1$  и любого конечного значения  $I$  можно, выбирая одну из точек  $\xi_i$ , получить такое большое по абсолютной величине значение  $\sigma(V)$ , что  $|I - \sigma(V)| > 1 = \varepsilon$ . Это будет означать несуществование интеграла.

**8.8. Несуществование интеграла  $\int_a^b f(x) dx$  от всюду разрывной на отрезке  $[a, b]$  функции.** Рассмотрим функцию Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x - \text{рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x - \text{иррациональное число.} \end{cases} \quad (8.1)$$

Она ограничена, но на любом отрезке  $[a, b]$  функция (8.1) не имеет определенного интеграла по Риману, так как при любом разбиении отрезка  $[a, b]$  на отрезки, в каждом из них существуют точки со значениями функции и 0, и 1. Соответственно нижняя и верхняя суммы Дарбу, см. [2], т. I, с. 323, на каждом шаге разбиения равны 0 и  $b - a$  и не могут иметь один и тот же предел.

Необходимость сделанных в определении предположений, обеспечивающих его корректность, подчеркнем контрпримерами. Сначала отвлечемся от произвольности разбиения отрезка и произвольности выбора точки в каждом отрезке разбиения. Предположим, что в определении интеграла достаточно рассматривать разбиения отрезка  $[a, b]$  на  $n$  равных отрезков, а значения функции брать в серединах отрезков разбиения. Такое определение будем называть упрощенным. Так как для интегрируемой по Риману функции любая последовательность интегральных сумм, при стремлении максимальной длины отрезков разбиения к нулю, имеет один и тот же предел, то любая интегрируемая по Риману функция будет интегрируема и в смысле упрощенного определения. Однако при интегрировании некоторых неинтегрируемых по Риману функций могут возникнуть некорректности. Контрпример.

**8.9. Некорректность определения интеграла, при котором отрезок разбивается на равные отрезки, а значения функции берутся в серединах отрезков разбиения.** Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 D(x) dx, \text{ который по обычному определению не существует, см.}$$

предыдущий пример. Будем разбивать отрезок  $[0, 1]$  на  $n$  равных частей и брать значения функции в серединах полученных отрезков разбиения. Все получаемые точки (числа) будут рациональными и соответственно значения нашей подынтегральной функции будут во всех таких точках равны единице. Полученный предельным переходом, при  $n \rightarrow \infty$ , интеграл будет также равен единице.

Заметим, что интеграл  $\int_0^{\sqrt{2}} D(x) dx$  по упрощенному определению

будет равен нулю, так как серединам отрезков разбиения в этом случае всегда будут отвечать иррациональные числа. Заметим, что  $[0, 1] \subset [0, \sqrt{2}]$  и подынтегральная функция неотрицательна, однако

$$\text{получаем } \int_0^1 D(x) dx > \int_0^{\sqrt{2}} D(x) dx. \text{ Наше определение некорректно.}$$



**8.10. Некорректность определения интеграла, при котором не требуется стремления максимума длин отрезков разбиения к нулю.** Пусть при каждом разбиении длина хотя бы одного отрезка разбиения будет больше некоторого числа  $\alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Предположим, что подынтегральная функция не является константой ни на одном отрезке, лежащем в отрезке интегрирования  $[a, b]$ . Тогда на любом из отрезков разбиения  $l$  с длиной больше  $\alpha$  разность максимального и минимального значений функции не будет меньше числа  $\beta = \min_{d \subset [a, b]} \left( \max_{x \in d} f(x) - \min_{x \in d} f(x) \right) > 0$ , где минимум берется по всем отрезкам  $d$  с длиной  $\alpha$ , лежащим в отрезке  $[a, b]$ . Действительно, неравенство  $\beta < 0$  невозможно, так как  $\beta$  – минимальное из положительных чисел, равенство  $\beta = 0$  означало бы, что в  $[a, b]$  существует отрезок длиной  $\alpha$ , на котором подынтегральная функция – константа, это противоречит предположению. Следовательно,  $\beta > 0$ . При этом две интегральные суммы, отличающиеся только выбором двух различных точек в отрезке разбиения  $l$ , будут (при подходящем выборе этих точек) отличаться больше чем на  $\alpha\beta$ . В таком случае предела последовательности интегральных сумм мы не получим.

**Теорема об интегрируемости непрерывной функции.** Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то она интегрируема на нем.

Предположение о непрерывности функции только достаточно, но не является необходимым. Контрпример.

**8.11. Функция, имеющая разрыв во внутренней точке отрезка, интегрируемая на этом отрезке. Функция**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

имеет разрыв только в точке  $x = 0$ . Докажем существование

$\int_{-1}^1 f(x) dx$ . Рассмотрим любую интегральную сумму (ее величину

обозначим  $\sigma$ ) с максимальной длиной  $\lambda$  отрезков разбиения. Точка  $x = 0$  попадает в один или два смежных отрезка разбиения, обозначим его, или их объединение –  $p$ , а суммарную длину  $p$  через  $\mu$ ,  $\mu \leq 2\lambda$ . Суммарные длины  $l_1$  и  $l_2$  отрезков разбиения, целиком лежащих на отрезках  $[1, 0]$  и  $[0, 1]$  и отличающихся от отрезков, образующих  $p$ , отвечают неравенствам  $1 - \lambda \leq l_1 \leq 1$  и  $1 - \lambda \leq l_2 \leq 1$ . Сле-

довательно,  $\sigma = 0 \cdot l_1 + f(\xi)\mu + 1 \cdot l_2$ , где  $\xi$  – произвольная точка  $p$ . Так как  $0 \leq f(\xi) \leq 1$ , то  $1 - \lambda \leq \sigma \leq 2\lambda + 1$ . Таким образом, при

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = 1, \text{ т.е. существует } \int_{-1}^1 f(x) dx = 1.$$

**Интегрируемость функции, имеющей конечное число точек разрыва.** Если ограниченная функция  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  имеет конечное число точек разрыва, то она интегрируема на  $[a, b]$ .

Многочисленные примеры интегрируемых функций, имеющих конечное множество точек разрыва, даны в [9], с. 309–311. Однако предположение утверждения о конечности числа точек разрыва также является только достаточным. Контрпример.

**8.12. Функция, имеющая разрывы в счетном множестве точек отрезка, интегрируемая на этом отрезке.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{при других } x \end{cases}$$

имеет бесконечное число точек разрыва на отрезке  $[0, 1]$ . Однако

интеграл  $\int_0^1 f(x) dx$  существует. Возьмем произвольное число

$0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ . Для этого числа  $\varepsilon$  существует натуральное число  $m$  та-

кое, что  $\frac{1}{2^m} < \varepsilon \leq \frac{1}{2^{m-1}}$ . Отсюда следует, что в полуинтервале  $\left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$

будут содержаться все точки вида  $\frac{1}{2^n}$ , где  $n > m$ , а вне этого полу-

интервала останется ровно  $m$  точек  $\frac{1}{2^n}$ , где  $n = \overline{1, m}$ . Рассмотрим

произвольное разбиение отрезка  $[0, 1]$  на отрезки с максимальной длиной

$$\lambda < \frac{1}{2m} \cdot \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.2)$$

Каждая из  $m$  указанных точек  $\frac{1}{2^n}$ , где  $n = \overline{1, m}$ , попадает в один и

два смежных отрезка разбиения общей длиной не больше

$2\lambda < \frac{1}{m} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ . Следовательно, все  $m$  точек находятся в отрезках раз-

биения (их максимум  $2m$ ) с суммарной длиной меньше  $\frac{\varepsilon}{2}$ . Напомним, что все остальные точки вида  $\frac{1}{2^n}$ , где  $n > m$ , содержатся в полуинтервале  $\left[0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$  длиной  $\frac{\varepsilon}{2}$ , т.е. в первых слева отрезках разбиения общей длиной меньше  $\frac{\varepsilon}{2} + \lambda < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}$ , что следует из (8.2) и того, что  $m \geq 1$ . Таким образом, все точки

$$\frac{1}{2^n}, \text{ где } n = 1, 2, \dots, \quad (8.3)$$

находятся в отрезках разбиения суммарной длиной меньше  $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon}{4} = \frac{5}{4}\varepsilon$ . Отсюда так как только в точках (8.3) функция равна

единице, а во всех других – нулю, то интегральная сумма  $\sigma < \frac{5}{4}\varepsilon$ .

Следовательно, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\lambda \rightarrow 0$ ) получаем  $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = 0$ .

Ниже для установления интегрируемости по Риману разрывных функций будем использовать критерий Лебега, см. [3], т. I, с. 590. А именно, ограниченная на отрезке функция  $f(x)$  интегрируема на нем по Риману тогда и только тогда, когда множество всех ее точек разрыва имеет лебегову меру нуль, т.е. при любом  $\varepsilon > 0$  может быть покрыто конечной или счетной совокупностью интервалов с суммарной длиной меньше  $\varepsilon$ . Если утверждение справедливо для множества точек  $A$ , за исключением некоторого его подмножества  $B$  меры нуль, будем говорить, что утверждение справедливо почти всюду в  $A$ .

Приведем пример функции, имеющей в любой окрестности любой точки разрывы, но интегрируемой по Риману.

**8.13. Функция, имеющая точки разрыва плотно на отрезке, интегрируемая на нем.** Функция Римана  $R(x)$ , см. ее определение в примере 2.3, ограничена. Там же показано, что функция Римана непрерывна в иррациональных и разрывна в рациональных точках. Покажем, используя критерий Лебега, существование на любом отрезке  $[a, b]$  интеграла  $\int_a^b R(x) dx$ . Так как множество точек разрыва

функции (множество рациональных чисел) в отрезке  $[a, b]$  счетно, то перенумеруем его элементы (точки разрыва) натуральными числами и соответственно обозначим их  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Последова-

тельно покроем точки разрыва  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) интервалами длины  $l_n < \frac{\varepsilon}{2^n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), где  $\varepsilon > 0$  произвольно. Тогда суммарная длина интервалов  $l$  будет подчиняться неравенству

$$l = \sum_{n=1}^{\infty} l_n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon,$$

что соответствует требованию критерия Лебега. Отсюда следует существование интеграла  $\int_a^b R(x) dx$ . Так как функция Римана равна нулю всюду, за исключением лишь счетного множества точек  $x$ , то на любом отрезке  $[a, b]$   $\int_a^b R(x) dx = 0$ .

Функция Римана имеет счетное множество точек разрыва и является интегрируемой. Приведем пример интегрируемой функции, имеющей множество точек разрыва мощности континуума.

**8.14\*. Функция, множество точек разрыва которой на отрезке имеет мощность континуума, интегрируемая на этом отрезке.** Характеристическая функция канторового множества  $C$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in C, \\ 0, & \text{если } x \notin C. \end{cases} \quad (8.4)$$

Определим канторово множество  $C$ . Рассмотрим отрезок  $[0, 1]$ . На первом шаге удалим из отрезка  $[0, 1]$  его среднюю треть, т.е. интервал  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ . Останутся  $m_1 = 2$  отрезка длиной  $l_1 = \frac{1}{3}$  каждый (рис. 8.1). На втором шаге удалим из каждого оставшегося отрезка его среднюю треть, т.е. интервалы  $\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right)$  и  $\left(\frac{7}{3^2}, \frac{8}{3^2}\right)$ . Останутся

$m_2 = 2^2$  отрезка длиной  $l_2 = \frac{1}{3^2}$  каждый. Процесс удаления средних третей оставшихся отрезков продолжим. На рис. 8.1 показаны четыре первых шага построения. На шаге  $n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) из каждого, оставшегося после выполнения шага  $n-1$ , отрезка удалим его среднюю треть. Останутся  $m_n = 2^n$  отрезка длиной  $l_n = \frac{1}{3^n}$  каждый. В результате выполнения бесконечного числа шагов мы удалим из от-

резка  $[0, 1]$  объединение счетного множества интервалов, т.е. некоторое открытое множество  $M$ . Оставшееся замкнутое множество  $[0, 1] \setminus M$  называется канторовым множеством  $C$ , подробнее о нем см. в [1], с. 111–113. Здесь только используем то, что множество  $C$  имеет мощность континуума и, непосредственно по его построению, любая окрестность любой точки множества  $C$  содержит некоторые удаленные интервалы, т.е. точки отрезка  $[0, 1]$ , не принадлежащие множеству  $C$ . Отсюда следует, что функция (8.4) в каждой точке канторова множества разрывна, и множество ее точек разрыва имеет мощность континуума. Заметим, что во всех точках, не принадлежащих  $C$ , т.е. на удаленных из  $[0, 1]$  интервалах функция  $f(x)$  непрерывна ( $f(x) \equiv 0$  на  $M$ ). Покажем, что существует

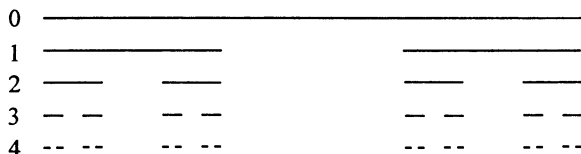


Рис. 8.1

$\int_0^1 f(x) dx$ . Согласно критерию Лебега достаточно показать, что при любом  $\varepsilon > 0$  множество  $C$  (множество точек разрыва функции  $f(x)$ ) может быть покрыто системой интервалов с суммарной длиной меньше  $\varepsilon$ . Действительно, пусть  $\varepsilon > 0$  произвольно. Для него найдется такой номер шага  $n$  описанного выше процесса построения  $C$ , что суммарная длина  $m_n l_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$  оставшихся после него отрезков будет меньше  $\varepsilon/2$ , т.е.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (8.5)$$

После шага  $n$  покроем каждый из  $m_n = 2^n$  отрезков длиной  $l_n = \frac{1}{3^n}$  интервалом длиной  $L_n = \frac{2}{3^n}$ . Получим систему интервалов суммарной длиной  $L = \frac{2}{3^n} \cdot 2^n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Из самого выбора  $n$  (неравенства

(8.5)) следует, что  $L < \varepsilon$ . При всех следующих за шагом  $n$  шагах множество точек остающихся отрезков, содержащее в себе  $C$ , будет только сужаться, поэтому оценка  $L < \varepsilon$  сохранится.

**Теорема об интегрируемости сложной функции.** Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , а функция  $\varphi(y)$  непрерывна на отрезке  $[c, d]$  и при любом  $x \in [a, b]$   $f(x) \in [c, d]$ , то сложная функция  $\varphi(f(x))$  также интегрируема на  $[a, b]$ .

Иногда возникает заблуждение, что (в контексте утверждения) для интегрируемости сложной функции  $\varphi(f(x))$  достаточно интегрируемости обеих функций  $f(x)$  и  $\varphi(y)$ . Приведем известный контрпример.

**8.15. Две функции, каждая из которых интегрируема, но их суперпозиция не интегрируема.** Рассмотрим функции

$$f(x) = R(x) \text{ и } \varphi(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < y \leq 1, \\ 0, & \text{если } y = 0 \end{cases}$$

на отрезках  $[0, 1]$ :  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Обе эти функции интегрируемы на  $[0, 1]$ . Они удовлетворяют всем предположениям теоремы, кроме непрерывности функции  $\varphi(y)$ , которая имеет разрыв только в одной точке  $y = 0$ . Нетрудно установить, что сложная функция представляет собой функцию Дирихле  $\varphi(f(x)) = \varphi(R(x)) = D(x)$  на отрезке  $[0, 1]$ . Действительно, при иррациональных значениях  $x$  функция Римана  $R(x) = 0$  и  $\varphi(0) = 0 = D(x)$ , при рациональных  $x$   $0 < R(x) \leq 1$  и  $\varphi(R(x)) = 1 = D(x)$ . Но функция Дирихле неинтегрируема на любом отрезке.

Заметим, что требования утверждения являются только достаточными, но не являются необходимыми для интегрируемости сложной функции. Приведем контрпример.

**8.16. Две функции:  $f(x)$  – интегрируемая и  $\varphi(y)$  – разрывная на отрезке, суперпозиция  $\varphi(f(x))$  которых интегрируема на этом отрезке.** В предыдущем контрпримере заменим функцию  $f(x) = R(x)$  на  $f(x) = x$ . Отметим, что функция  $\varphi(y)$  не является непрерывной на отрезке  $[0, 1]$ , что не отвечает условиям утверждения. Однако сложная функция  $\varphi(f(x)) = \varphi(x)$  просто совпадет с функцией  $\varphi(x)$  и будет интегрируемой на отрезке  $[0, 1]$ .

Приведем более интересный контрпример.

**8.17. Две функции:  $f(x)$  – интегрируемая и  $\varphi(y)$  – имеющая**

точки разрыва плотно на отрезке, суперпозиция  $\varphi(f(x))$  которых интегрируема на этом отрезке. В предыдущем контрпримере положим  $\varphi(y) = R(y)$ , оставив  $f(x) = x$ , тогда сложная функция  $\varphi(f(x)) = R(f(x)) = R(x)$  и является интегрируемой на отрезке  $[0, 1]$ . Отличие от предыдущего контрпримера заключается в том, что функция  $\varphi(y) = R(y)$  имеет на  $[0, 1]$  уже не одну точку разрыва, она разрывна при всех рациональных значениях  $x$ .

### 8.3. Свойства определенного интеграла

**Теорема о среднем значении.** Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и пусть при любом  $x \in [a, b]$  выполняется  $m \leq f(x) \leq M$ , где  $m$  и  $M$  – некоторые числа; тогда  $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$ , где  $m \leq \mu \leq M$ .

Предлагаем читателям в качестве упражнения показать, что, если функция  $f(x)$  не является константой и непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и выполняется  $m < M$ , то  $m < \mu < M$ . Приведем другие примеры.

**8.18. Функции, отличные от констант, для которых на отрезке средние значения равны их минимальному (максимальному) значениям:  $\mu = m$  ( $\mu = M$ ).** Функция Римана  $R(x)$  ограничена и интегрируема на любом отрезке  $[a, b]$ , в частности на отрезке  $[0, 1]$ ,  $0 \leq R(x) \leq 1$ , т.е.  $m = 0$ ,  $M = 1$ . Функция  $R(x)$  минимальные значения  $m = 0$  принимает во всех иррациональных точках, а максимальные значения  $M = 1$  – в точках 0 и 1. Из сказанного в примере 8.13 следует, что  $\int_0^1 R(x)dx = 0$ , откуда  $\mu = 0 = m$ . Для функции

$f(x) = 1 - R(x)$  получим  $\int_0^1 f(x)dx = 1$  и выполнится  $\mu = 1 = M$ .

**Обобщенная теорема о среднем значении.** Пусть  $g(x)$  и  $f(x)g(x)$  интегрируемы на отрезке  $[a, b]$ ; при любом значении  $x \in [a, b]$  выполняется:  $m \leq f(x) \leq M$ ,  $g(x) \geq 0$  (или  $g(x) \leq 0$ ). Тогда  $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ , где  $m \leq \mu \leq M$ .

Отбросим в теореме предположение о постоянстве во всем отрезке  $[a, b]$  знака функции  $g(x)$ . Получим ложное утверждение, опровергаемое следующим контрпримером.

**8.19. Знакопеременная функция  $g(x)$ , при которой не выполняется заключение обобщенной теоремы о среднем значении.** Рассмотрим функции

$$f(x) = x \text{ и } g(x) = \operatorname{sgn} x$$

на отрезке  $[-1, 1]$ . Функция  $g(x) = \operatorname{sgn} x$  ограничена и имеет только одну точку разрыва ( $x = 0$ ), поэтому интегрируема. Произведение  $f(x)g(x) = x \operatorname{sgn} x = |x|$  является непрерывной, а значит, интегрируемой функцией. На отрезке  $[-1, 1]$  выполняется  $-1 \leq f(x) \leq 1$ .

Однако  $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 |x|dx = 1$ , а  $\int_{-1}^1 g(x)dx = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx = 0$ , и равенство  $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \mu \int_{-1}^1 g(x)dx$  не выполняется ни при каком значении  $\mu$ .

Покажем, что предположение об ограниченности  $f(x)$  на отрезке не является необходимым для выполнения равенства  $\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ .

**8.20. Неограниченная снизу и сверху функция  $f(x)$  ( $m = -\infty$ ,  $M = +\infty$ ), при которой выполняется заключение обобщенной теоремы о среднем значении.** Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases} \text{ и } g(x) = x^2$$

на отрезке  $[-1, 1]$ . Заметим, что выполняются все требования теоремы, кроме неравенств  $m \leq f(x) \leq M$ , которые, однако, мы заменим справедливыми неравенствами  $-\infty < f(x) < +\infty$ . Имеем

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 x dx = 0, \quad \int_{-1}^1 g(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3},$$

и равенство  $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \mu \int_{-1}^1 g(x)dx$  выполняется при  $\mu = 0$ . Заметим, что для  $\mu$  справедливы неравенства  $-\infty < \mu < +\infty$ .

**8.21. Неограниченная сверху функция  $f(x)$  ( $M = +\infty$ ), при которой выполняется заключение обобщенной теоремы о среднем значении.** Функции

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad g(x) = \cos x$$



на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  удовлетворяют всем требованиям теоремы за исключением ограниченности функции  $f(x) = \operatorname{tg} x$  сверху. Запишем справедливые неравенства  $0 \leq f(x) < +\infty$ . Выполняется

$$\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1,$$

$$\int_0^{\pi/2} g(x)dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 1$$

и соотношение  $\int_0^{\pi/2} f(x)g(x)dx = \mu \int_0^{\pi/2} g(x)dx$  выполняется при  $\mu = 1$ .

Следовательно,  $\mu$  подчиняется неравенствам  $0 \leq \mu < +\infty$ .

**Теорема об определенном интеграле как функции верхнего предела интегрирования.** Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , то она интегрируема и на отрезке  $[a, x]$ , где  $x \in [a, b]$ . Подставив  $x$  вместо предела  $b$  определенного интеграла, получим функцию от  $x$   $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ , определенную на отрезке  $[a, b]$ . Эта функция обладает следующими свойствами: если функция  $f(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то функция  $\Phi(x)$  непрерывна на этом отрезке; если функция  $f(t)$  непрерывна в точке  $t = x$ , то в этой точке функция  $\Phi(x)$  имеет производную, равную  $\Phi'(x) = f(x)$ . Последнее означает, что для непрерывной на отрезке  $[a, b]$  функции  $f(x)$  всегда существует первообразная, ей является определенный интеграл  $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$  с переменным верхним пределом.

Приведем пример, достаточно всесторонне иллюстрирующий данное утверждение.

**8.22. Интегрируемая функция, имеющая точки разрыва плотно на отрезке, иллюстрирующая теорему об определенном интеграле как функции верхнего предела интегрирования.** Функция Римана  $R(x)$ , которая непрерывна в иррациональных точках и разрывна в рациональных точках  $x$ , и в то же время является интегрируемой на любом конечном отрезке. Рассмотрим функцию  $\Phi(x) = \int_a^x R(t)dt$ , где  $x$  есть любое значение из  $[a, b]$ . В силу интегрируемости функции Римана функция  $\Phi(x)$  определена на  $[a, b]$ .

Как было сказано выше, на любом отрезке  $[a, b]$   $\int_a^b R(t)dt = 0$ , откуда

$\Phi(x) \equiv 0$  на  $[a, b]$ . Как видим, оба названных в теореме свойства функции  $\Phi(x)$  выполняются: так как функция  $R(x)$  интегрируема на  $[a, b]$ , то  $\Phi(x)$  непрерывная функция от  $x$  на том же отрезке; так как функция  $R(t)$  непрерывна в точке  $t = x$ , где  $x$  иррационально, то в этой точке функция  $\Phi(x)$  имеет производную  $\Phi'(x) = R(x) = 0$ .

Заметим, что, так как  $\Phi(x) \equiv 0$  на всем  $[a, b]$ , то  $\Phi'(x) = 0$  и в рациональных точках, в которых  $R(x) > 0$ . Следовательно, функция  $\Phi(x)$  не есть первообразная для функции  $R(x)$  на  $[a, b]$ . Это объясняется тем, что  $R(x)$  не является непрерывной функцией на  $[a, b]$ , она имеет разрывы во всех рациональных точках.

Если в последней части теоремы снять требование непрерывности функции  $f(x)$ , то сформулированная связь между первообразной и определенным интегралом может отсутствовать. Сошлемся на пример 8.1, где функция имеет одну точку разрыва на отрезке, т.е. интегрируема, и не имеет первообразной на этом отрезке. Приведем обратный пример.

**8.23. Функция, имеющая первообразную на отрезке, но неинтегрируемая на нем.** Рассмотрим в качестве первообразной

функцию  $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ , доопределенную в нуле,  $F(0) = 0$ . Она

дифференцируема на  $[-1, 1]$ , следовательно, может рассматриваться первообразной для своей производной (обозначим ее  $f(x)$ ) на этом отрезке. Дифференцируемость функции  $F(x)$  при  $x \neq 0$  очевидна, и ее производная равна

$$F'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}. \quad (8.6)$$

Дифференцируемость в нуле следует из определения производной. Запишем предел отношения приращения функции к приращению аргумента в точке  $x = 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(0 + \Delta x) - F(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x^2} \right) = 0,$$

как предел произведения бесконечно малой функции на функцию ограниченную, т.е.  $F'(0) = 0$ . Полученная на  $[-1, 1]$  производная  $F'(x) = f(x)$  имеет разрыв в нуле и неограниченна в любой окрест-

ности нуля, что определяется вторым слагаемым в правой части (8.6). Следовательно, она неинтегрируема на  $[-1, 1]$ .

**Первая формула Бонне.** Если на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  монотонно убывает (возможно, нестрого) и неотрицательна, а  $g(x)$  интегрируема, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx, \quad (8.7)$$

где  $\xi$  есть некоторое число из данного отрезка,  $\xi \in [a, b]$ .

Попробуем усилить утверждение, снимая его отдельные предположения. Приведем контрпримеры.

**8.24, 8.25. Не удовлетворяющие отдельным предположениям функции  $f(x)$ , при которых первая формула Бонне не выполняется.** Пусть  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x$  на  $[0, 1]$ . Заметим, что функция  $f(x)$  неотрицательна на  $[0, 1]$ , но не убывает. Тогда при любом

$$0 \leq \xi \leq 1 \text{ получаем } \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \text{ а } f(0)\int_0^\xi g(x)dx = 0$$

Пусть  $f(x) = -x$ ,  $g(x) = x$  на  $[0, 1]$ . Функция  $f(x) = -x$  монотонно убывает, но отрицательна на  $[0, 1]$ . Тогда при любом  $0 \leq \xi \leq 1$

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = -\int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{3}, \text{ а } f(0)\int_0^\xi g(x)dx = 0.$$

Заметим, что предположения являются достаточными, но не являются необходимыми для выполнения равенства (8.7). Контрпримеры.

**8.26, 8.27. Не удовлетворяющие отдельным предположениям функции  $f(x)$ , при которых первая формула Бонне выполняется.** Пусть  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Тогда

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0 \text{ и } f(-1)\int_{-1}^\xi g(x)dx = \int_{-1}^\xi x dx = 0$$

при  $\xi = 1$ . Заметим, что функция  $f(x) = x^2$  на отрезке  $[-1, 1]$  неотрицательная, но не является монотонно убывающей.

Пусть  $f(x) = -x^3$ ,  $g(x) = \cos x$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = -\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x dx = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетная, и

$$f(-\pi) \int_{-\pi}^{\xi} g(x) dx = \pi^3 \int_{-\pi}^{\xi} \cos x dx = 0 \text{ при } \xi = \pi.$$

Заметим, что функция  $f(x) = -x^3$  монотонно убывает, но не является неотрицательной на  $[-\pi, \pi]$ .

**Вторая формула Бонне.** Если на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  монотонно возрастает (возможно, нестрого) и неотрицательна, а  $g(x)$  интегрируема, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b) \int_{\xi}^b g(x)dx,$$

где  $\xi$  есть некоторое число из данного отрезка,  $\xi \in [a, b]$ .

В этом случае построение контрпримеров может быть выполнено по аналогичной схеме (с точностью до «зеркального» задания функций на отрезке).

**Вторая теорема о среднем значении.** Если на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  монотонна (возможно, нестрого), а  $g(x)$  интегрируема, то

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x)dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x)dx, \quad (8.8)$$

где  $\xi \in [a, b]$ .

Приведем контрпримеры.

**8.28. Немонотонная на отрезке функция  $f(x)$ , при которой заключение второй теоремы о среднем значении не выполняется.** Пусть  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = -x^2$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Тогда

$$\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = - \int_{-1}^1 (x^2 - 1)x^2 dx = \left( -\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{15},$$

а правая часть (8.8) равна нулю при любом  $-1 \leq \xi \leq 1$ , так как  $f(-1) = f(1) = 0$ .

**8.29. Немонотонная на отрезке функция  $f(x)$ , при которой заключение второй теоремы о среднем значении выполняется.** Пусть  $f(x) = x^2/\pi^2$ ,  $g(x) = \sin x$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Тогда получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx = 0,$$

так как подынтегральная функция нечетная, и

$$f(-\pi) \int_{-\pi}^{\xi} \sin x dx + f(\pi) \int_{\xi}^{\pi} \sin x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0.$$

Равенство (8.8) выполняется, хотя функция  $f(x)$  не является монотонной на отрезке.

## 8.4. Вычисление определенных интегралов

**Основная формула интегрального исчисления.** Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и пусть на этом отрезке функция  $F(x)$  – любая первообразная функции  $f(x)$ . Тогда выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (8.9)$$

В данном случае предполагаем, что  $F(x)$  есть первообразная для функции  $f(x)$  на всем отрезке  $[a, b]$ . Приведем примеры неприменимости формулы Ньютона – Лейбница (8.9) именно в этой редакции утверждения.

**8.30. Две функции  $f(x)$ , к которым по разным причинам неприменима формула Ньютона–Лейбница при обычных предположениях.** Формула (8.9) применима для непрерывной на  $[a, b]$  функции  $f(x)$ , для которой на всем отрезке  $[a, b]$  существует первообразная. Если функция в некоторой точке имеет разрыв первого рода, то для нее в окрестности этой точки первообразная не существует, см. [2], т. I, с. 182. Этот факт иллюстрируется приведенным выше примером 8.1. Если у функции в некоторой точке разрыв второго рода, то для такой функции в окрестности точки разрыва может существовать первообразная. Это показывает пример 8.23.

И в примере 8.1, и в примере 8.23 формула (8.9) неприменима: в первом случае не существует первообразная, во втором случае не существует интеграл.

**Основная формула интегрального исчисления при более общих предположениях.** Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$  и пусть на этом отрезке функция  $F(x)$  непрерывна, и  $F'(x) = f(x)$  на интервале  $(a, b)$ , возможно, исключая конечное число точек. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Приведем иллюстративный пример.

**8.31. Функция  $f(x)$ , имеющая разрыв второго рода, к которой применима формула Ньютона–Лейбница при более общих предположениях.** Функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

на отрезке  $[-1, 1]$  имеет разрыв второго рода в точке  $x = 0$ , см. рис. 2.2, б. Так как функция  $f(x)$  ограниченная и имеет на  $[-1, 1]$  только

одну точку разрыва, то существует интеграл  $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ , он равен

нулю, так как функция  $f(x)$  нечетная. По тем же причинам существ-

ует интеграл  $F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$  для любого  $-1 \leq x \leq 1$ . В силу интег-

рируемости функции  $f(x)$  на  $[-1, 1]$  функция  $F(x)$  непрерывна на этом отрезке. Так как функция  $f(x)$  непрерывна в любой точке  $x$  ( $x \neq 0$ ), то в этой точке существует  $F'(x) = f(x)$ . Все предположения утверждения выполняются, отсюда

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = F(1) - F(-1) = 0 - 0 = 0.$$

Попробуем применить данное, более общее, утверждение к функциям из примеров 8.1 и 8.23.

**8.32. Функция  $f(x)$ , имеющая разрыв первого рода, к которой применима формула Ньютона–Лейбница при более общих предположениях.** Функция из примеров 8.1 и 8.30 ограничена, имеет только одну точку разрыва и, следовательно, интегрируема на

отрезке  $[-1, 1]$ ,  $\int_{-1}^1 f(x)dx = 0$ . Рассмотрим функцию

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt = \begin{cases} -x - 1, & \text{если } -1 \leq x < 0, \\ x - 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Так как функция  $f(x)$  интегрируема на  $[-1, 1]$ , то функция  $F(x)$  непрерывна на этом отрезке. Функция  $f(x)$  непрерывна во всех точках отрезка  $[-1, 1]$ , кроме  $x = 0$ . Отсюда  $F'(x) = f(x)$  всюду в  $[-1, 1]$ , кроме этой точки. Требования утверждения выполнены, по-

этому  $\int_{-1}^1 f(x)dx = F(1) - F(-1) = 0$ . Заметим, что здесь функция  $F(x)$

не является первообразной для  $f(x)$  на всем отрезке  $[-1, 1]$ .

**8.33. Функция  $f(x)$ , имеющая разрыв второго рода, к которой неприменима формула Ньютона–Лейбница и при более общих предположениях.** Функция  $f(x)$  из примеров 8.23 и 8.30 имеет разрыв второго рода в точке  $x = 0$ . Для нее существует на всем отрезке  $[-1, 1]$  первообразная функция  $F(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ , доопределенная в нуле,  $F(0) = 0$ , т.е.  $F'(x) = f(x)$  всюду на  $[-1, 1]$ . Следовательно,  $F(x)$  всюду непрерывна на  $[-1, 1]$ . Все требования утверждения выполнены, кроме интегрируемости функции  $f(x)$ , и в этом случае формула  $\int_{-1}^1 f(x)dx = F(1) - F(-1)$  не имеет смысла.

Покажем, что предположения этого, более общего, утверждения являются только достаточными, но не являются необходимыми для справедливости рассматриваемой формулы.

**8.34. Функция  $f(x)$ , для которой условие  $F'(x) = f(x)$  не выполняется в счетном множестве точек, расположенных всюду плотно, однако применима формула Ньютона–Лейбница.** При любых  $a$  и  $b$  для функции Римана  $R(x)$  существует интеграл  $\int_a^b R(x)dx = 0$ , что показано в примере 8.13. Следовательно, существует

функция  $F(x) = \int_a^x R(t)dt \equiv 0$ , где  $x$  есть любое значение из  $[a, b]$ . Очевидно, функция  $F(x)$  всюду непрерывна на  $[a, b]$ . Заме-

чаем, что выполняется формула  $\int_a^b R(x)dx = F(b) - F(a)$ . Однако

функция Римана имеет счетное и плотное на  $[a, b]$  множество точек разрыва (это множество рациональных чисел на  $[a, b]$ ). Кроме того,

функция  $F(x) = \int_a^x R(t)dt$  не является первообразной для функции  $R(x)$  на  $[a, b]$ , ибо  $F'(x) = R(x)$  только при иррациональных значениях  $x$ , так как при рациональных значениях  $x$  функция  $R(x) > 0$ . Таким образом, условие  $F'(x) = R(x)$  не выполняется в бесконечном числе точек, к тому же расположенных плотно на  $[a, b]$ .

**Формула замены переменной в определенном интеграле.** Рассмотрим

интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ , где  $f(x)$  непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция. Пусть

$x = \varphi(t)$  и выполняется следующее:

1)  $\varphi(t)$  определена и непрерывна на некотором отрезке  $[\alpha, \beta]$  и при любом  $t \in [\alpha, \beta]$   $\varphi(t) \in [a, b]$ ; возможно, функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[A, B] \supset [a, b]$ , тогда при любом  $t \in [\alpha, \beta]$   $\varphi(t) \in [A, B]$ ;

2)  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ;

3) существует на отрезке  $[\alpha, \beta]$  непрерывная производная  $\varphi'(t)$ .

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (8.10)$$

Попробуем усилить утверждение, отбросив предположение о непрерывности функции  $\varphi(t)$ . Очевидно, придется также отказаться в точках разрыва этой функции от существования производной  $\varphi'(t)$ . Контрпримеры.

**8.35, 8.36. Интегралы, к которым при замене переменной  $x = \varphi(t)$ , где функция  $\varphi(t)$  имеет разрывы, неприменима формула**

**мула**  $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ . Интеграл  $\int_0^2 x dx = 2$ . Произведем

подстановку  $x = \varphi(t) = [t]$ , где  $[t]$  – целая часть числа  $t$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\beta = 2,5$ , см. рис. 2.1, а. Запишем интеграл в правой части (8.10) в виде суммы интегралов так, чтобы внутри каждого отрезка интегрирования соблюдалась непрерывность функций  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$ , получим

$$\int_{0,5}^1 0 \cdot \varphi'(t) dt + \int_1^2 1 \cdot \varphi'(t) dt + \int_2^{2,5} 2 \cdot \varphi'(t) dt = 0,$$

так как производная  $\varphi'(t) \equiv 0$  в каждом из интервалов  $(0,5; 1)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(2; 2,5)$ . Видим, что формула (8.10) не соблюдается.

Интеграл  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ . Произведем подстановку

$$x = \varphi(t) = \begin{cases} \{t\}, & \text{если } 0 \leq t < 2, \\ 1, & \text{если } t = 2, \end{cases}$$

где  $\{t\}$  – дробная часть числа  $t$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ , см. рис. 2.1, б. Интеграл в правой части (8.10) запишем в виде суммы интегралов таким образом, чтобы внутри каждого отрезка интегрирования соблюдалась непрерывность функций  $\varphi(t)$  и  $\varphi'(t)$ ,

$\int_0^1 t dt + \int_1^2 t dt = 2$ , так как



производная  $\varphi'(t) \equiv 1$  в каждом из интервалов  $(0, 1)$  и  $(1, 2)$ . Формула (8.10) не соблюдается.

Покажем, что отдельные перечисленные в утверждении предположения являются только достаточными, но не являются необходимыми для выполнения формулы (8.10). Контрпримеры.

**8.37, 8.38. Интегралы, в которых функция  $f(x)$  имеет разрывы и к которым при замене переменной  $x = \varphi(t)$  применима**

**формула  $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ .** Пусть функция  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ,

т.е. имеет разрыв первого рода в точке  $x = 0$ . Рассмотрим интеграл

$\int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x dx = 1$ . Выполним подстановку  $x = \varphi(t) = t^2 - 1$ ,  $\alpha = 0$ ,

$\beta = \sqrt{3}$  и вычислим

$$\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{sgn}(t^2 - 1) 2t dt = - \int_0^1 2t dt + \int_1^{\sqrt{3}} 2t dt = -t^2 \Big|_0^1 + t^2 \Big|_1^{\sqrt{3}} = 1.$$

Видим, что формула (8.10) справедлива и в этом случае.

Пусть функция  $f(x) = R(x)$ , т.е. имеет всюду плотно точки разрыва,  $\int_0^2 R(x) dx = 0$ . Выполним подстановку  $x = 2t - 4$ ,  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$ ,

получим  $\int_2^3 R(2t - 4) 2 dt = 0$ . Это справедливо, так как подынтегральная

функция интегрируема и равна нулю всюду, за исключением лишь счетного множества значений  $t$ . Формула (8.10) выполняется.

**8.39. Интеграл, к которому при замене переменной  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi'(t)$  не существует во внутренней точке отрезка  $[a, b]$ , при-**

**менима формула  $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ .** Интеграл  $\int_1^2 x dx = 1,5$ .

Выполним подстановку  $x = \varphi(t) = |t|$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$ . Заметим, что подынтегральная функция  $f(x) = x$  определена и непрерывна всюду, в частности, и при всех тех значениях, которые принимает функция  $x = |t|$ . Запишем интеграл, стоящий в правой части формулы (8.10) в виде суммы интегралов, взятых на отрезках, внутри которых существует и непрерывна производная  $\varphi'(t)$ , а именно,  $\varphi'(t) = -1$  на

$[-1, 0]$  и  $\varphi'(t)=1$  на  $[0, 2]$ , в точке  $t=0$  рассматриваются производные левая и правая соответственно. Получаем

$$\int_{-1}^0 (-t)(-1) dt + \int_0^2 t \cdot 1 dt = \int_{-1}^0 t dt + \int_0^2 t dt = 1,5.$$

Видим, что формула (8.10) соблюдается, хотя функция  $\varphi(t)=|t|$  не имеет производной при  $t=0$ .

**Формула замены переменной в определенном интеграле при измененных предположениях.** Предположим, что  $f(x)$  интегрируемая на отрезке  $[a, b]$  функция. Пусть  $x = \varphi(t)$  и выполняется следующее:

- 1)  $\varphi(t)$  определена и непрерывна на некотором отрезке  $[\alpha, \beta]$ ;
- 2)  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  и на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функция  $\varphi(t)$  монотонна;
- 3) существует на отрезке  $[\alpha, \beta]$  непрерывная производная  $\varphi'(t)$ .

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (8.11)$$

Сначала просмотрим контрпримеры, относящиеся к предыдущему утверждению. Контрпримеры 8.35, 8.36 и 8.39 остаются контрпримерами в том же контексте, но в 8.36 и 8.39 следует дополнительно отметить еще и нару-

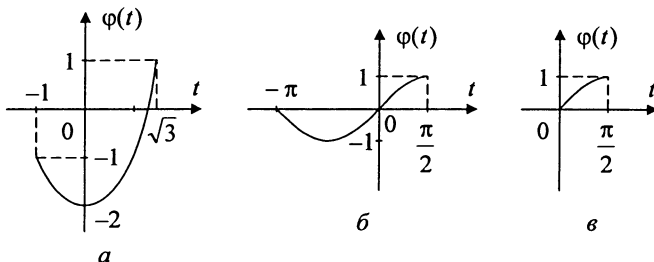


Рис. 8.2

шение условия монотонности функции  $\varphi(t)$ . Контрпримеры 8.37 и 8.38 превращаются в иллюстративные примеры к новому утверждению, так как функции  $f(x)$  в них интегрируемые, функции  $\varphi(t)$  монотонные, выполняются и все другие предположения нового утверждения.

Откажемся в утверждении от условия монотонности функции  $\varphi(t)$ , оставив все остальные условия в силе. Построим контрпример, показывающий, что это условие не является необходимым для выполнения формулы (8.11).

**8.40. Интеграл, к которому при замене переменной  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  немонотонная на  $[\alpha, \beta]$  функция, применима формула**

$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ . Несколько модифицируем контрпример

8.37, введя в него немонотонную функцию  $\varphi(t)$ . Пусть функция  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ , т.е. является интегрируемой. Интеграл  $\int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx = 0$ .

Выполним подстановку  $x = \varphi(t) = t^2 - 2$ ,  $\alpha = -1$ ,  $\beta = \sqrt{3}$  (рис. 8.2, а). Вычислим интеграл

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \operatorname{sgn}(t^2 - 2)2t dt = - \int_{-1}^{\sqrt{2}} 2t dt + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2t dt = -t^2 \Big|_{-1}^{\sqrt{2}} + t^2 \Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = 0.$$

Отметим, что формула (8.11) справедлива и в этом случае.

Построим усиленное утверждение, отказавшись только от условия монотонности функции  $\varphi(t)$ . Построим контрпример, опровергающий такое утверждение.

**8.41. Интеграл, к которому при замене переменной  $x = \varphi(t)$ , где  $\varphi(t)$  немонотонная на  $[\alpha, \beta]$  функция, неприменима формула**

**ла**  $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ . Пусть  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0, 1], \\ D(x), & \text{если } x \notin [0, 1], \end{cases}$

где  $D(x)$  — функция Дирихле. Интеграл  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$ . Вы-

полним замену переменной  $x = \varphi(t) = \sin t$ ,  $\alpha = -\pi$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  (рис. 8.2,

б). Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi/2} f(\sin t) \cos t dt &= \int_{-\pi}^0 f(\sin t) \cos t dt + \int_0^{\pi/2} f(\sin t) \cos t dt = \\ &= \int_{-\pi}^0 D(\sin t) \cos t dt + \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Но функция  $D(\sin t) \cos t$  в (8.12) неинтегрируема, следовательно, формула (8.11) в этом случае неприменима.

Заметим, что подстановка  $x = \varphi(t) = \sin t$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{\pi}{2}$  (рис. 8.2, в)

е) полностью отвечала бы утверждению, так как на отрезке  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  соблюдалась бы монотонность функции  $x = \varphi(t) = \sin t$ . В этом слу-

чае при выкладках, аналогичных выкладкам (8.12), не возникал бы несуществующий интеграл  $\int_{-\pi}^0 D(\sin t) \cos t dt$ .

**Интегрирование по частям в определенном интеграле.** Если функции  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  непрерывны на отрезке  $[a, b]$  вместе с производными  $u'$  и  $v'$ , то справедлива формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (8.13)$$

Требование непрерывности производной  $u'$  не является необходимым для применения формулы (8.13). Контрпример.

**8.42. Интеграл, к которому при нарушении непрерывность  $u'$  во внутренней точке отрезка  $[a, b]$  применима формула интегрирования по частям:**  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ . Вычислим, приме-

няя формулу (8.13), интеграл  $\int_{-1}^1 |x| e^x dx$ . Пусть  $u(x) = |x|$ ,  $v(x) = e^x$ .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| d(e^x) &= \int_{-1}^0 (-x) d(e^x) + \int_0^1 x d(e^x) = -xe^x \Big|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^x dx + xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \\ &= \left( -xe^x \Big|_{-1}^0 + xe^x \Big|_0^1 \right) - \int_{-1}^1 \operatorname{sgn}(x) e^x dx = |x|e^x \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 e^x d|x|, \end{aligned} \quad (8.14)$$

где условно обозначено  $d|x| = d(\operatorname{sgn}(x)x) = \operatorname{sgn}(x)dx$ , что справедливо только по отдельности на полуинтервалах  $[-1, 0]$  и  $(0, 1]$ , на которых функция  $\operatorname{sgn}(x)$  есть константа, а функция  $|x|$  дифференцируема. И это надо понимать как необходимость вычисления последнего интеграла в виде суммы интегралов на отрезках  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$ . С учетом этой оговорки равенство первого и последнего выражений в (8.14) соответствует формуле (8.13).

### Упражнения

**8.1.** Показать, что функции  $f(x) = \operatorname{sgn} x$  и  $f(x) = x^{-1/3}$ ,  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ , не имеют первообразных на любом отрезке  $[a, b]$ ,  $a < 0$ ,  $b > 0$ , но первая интегрируема, а вторая неинтегрируема на этом отрезке.

**8.2.** Пусть  $F(x)$  и  $f(x)$  заданы на  $M$  — объединении конечного, или счетного, множества непересекающихся интервалов, и на множестве  $M$  выполняется  $F'(x) = f(x)$ . Выразить все функции  $\Phi(x)$  такие, что  $\Phi'(x) = f(x)$  на  $M$ .

8.3. Обеспечивает ли упрощенное определение интеграла, данное в контр-примере 8.9, существование (несуществующего в смысле Римана) интеграла

$$\int_0^1 \ln x \, dx \text{ от неограниченной функции?}$$

8.4. Существует ли на отрезке  $[0, 1]$  интеграл от функции  $f(x) = \sin[1/x]$ ,  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ , где  $[t]$  — целая часть  $t$ ?

8.5. Известно, что монотонная ограниченная функция  $f(x)$  всегда интегрируема на отрезке. Привести пример ограниченной нигде не монотонной, но интегрируемой на любом отрезке функции.

8.6. Построить для любой заранее заданной величины  $\mu_0$  функцию, для которой выполнялось бы равенство  $\int_a^b f(x) dx = \mu_0(b-a)$ ,  $m \leq \mu_0 \leq M$ , в соответствии с теоремой о среднем значении.

8.7. Является ли корректным следующее применение формулы Ньютона–

Лейбница:  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2$ ?

## РАЗДЕЛ 9

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

### 9.1. Площадь фигуры

**Определение площади фигуры.** Рассмотрим некоторую ограниченную замкнутую область  $(P)$  на плоскости, назовем ее фигурой. Пусть ее граница, или контур,  $(K)$  представляет собой замкнутую кривую (или несколько замкнутых кривых). Рассмотрим всевозможные многоугольники  $(A)$ , содержащиеся в  $(P)$ , и многоугольники  $(B)$ , содержащие в себе  $(P)$  (рис. 9.1, а). На рисунке граница  $(K)$  фигуры  $(P)$  выделена жирной линией. Пусть  $A$  и  $B$  – их площади, соответственно тогда  $A \leq B$ . Множество чисел  $\{A\}$  ограничено сверху любым числом  $B$  и имеет точную верхнюю грань  $P_*$ , причем  $P_* \leq B$ . Аналогично, множество чисел  $\{B\}$  ограничено снизу числом  $P_*$  и имеет точную нижнюю грань  $P^* \geq P_*$ . Числа  $P_*$  и  $P^*$  можно назвать внутренней и внешней площадью фигуры  $(P)$  соответственно. Если обе точные грани  $P_* = \sup\{A\}$  и  $P^* = \inf\{B\}$  равны, то их общее значение  $P$  называется площадью фигуры  $(P)$ , а фигура  $(P)$  квадратуемой.

Обычно понятие площади плоской фигуры иллюстрируют на примере фигур (ограниченных замкнутых областей на плоскости), которые имеют границы в виде гладких или кусочно-гладких замкнутых кривых конечной длины. Приведем иные примеры.

**9.1. Область с границей бесконечной длины, но квадратуемая.** Построим на плоскости  $Oxy$  область, граница которой состав-

лена из графика функции  $y = f_1(x) = \begin{cases} 1 + x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$

$-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ ; отрезка  $\left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$  оси  $Ox$ ; двух отрезков, параллельных

оси  $Oy$ :  $x = -\frac{1}{\pi}$ ,  $0 \leq y \leq 1$  и  $x = \frac{1}{\pi}$ ,  $0 \leq y \leq 1$  (рис. 9.1, б). Описанная

граница ( $K$ ) является замкнутой, так как функция  $y = f_1(x)$  непрерывна на всем отрезке  $-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ . Заметим, что и три другие участка границы, очевидно, могут быть заданы непрерывными функциями аргументов  $x$  и  $y$ , они являются константами:  $y = f_2(x) \equiv 0$  на отрезке  $-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ ;  $x = g_1(y) \equiv -\frac{1}{\pi}$  и  $x = g_2(y) \equiv \frac{1}{\pi}$  на отрезке  $0 \leq y \leq 1$ . Множество точек, находящихся внутри замкнутой и непрерывной границы ( $K$ ), представляет собой открытое связное множество, т.е. область. Замыкание ее будет ограниченной замкну-

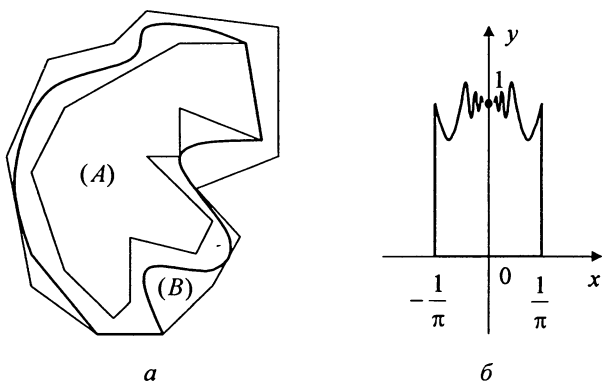


Рис. 9.1

той областью ( $P$ ). Построенная область квадратуема, что будет установлено ниже. Интересно, что длина граничной кривой ( $K$ ) бесконечна. Это будет показано далее при рассмотрении понятия длины дуги. Здесь лишь заметим, что бесконечную длину имеет только часть графика функции  $y = f_1(x)$ , заключенная в полосе  $-\delta \leq x \leq \delta$  при любом, сколь угодно малом, числе  $\delta > 0$ .

Приведем несколько более сложный пример квадратуемой области.

**9.2. Квадатуемая область, граница которой имеет бесконечную длину, а граничная кривая задана функцией, не имеющей предела в точке.** Зададим область на плоскости  $Oxy$ , граница которой составлена из графика функции  $y = 2 + \sin \frac{1}{x}$ ,  $-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$

( $x \neq 0$ ); отрезка  $\left[-\frac{1}{\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$  оси  $Ox$ ; двух отрезков, параллельных оси

$Oy$ :  $x = -\frac{1}{\pi}$ ,  $0 \leq y \leq 2$  и  $x = \frac{1}{\pi}$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ; отрезка  $[1, 3]$  оси  $Oy$  (рис. 9.2, а). Заметим, что описанная граница ( $K$ ) является замкнутой: отрезок  $[1, 3]$  оси  $Oy$ , принадлежащий границе, представляет собой множество предельных точек графика функции  $y = 2 + \sin \frac{1}{x}$  при  $x \rightarrow 0$ . Множество точек, находящихся внутри описанной замкнутой границы, представляет собой открытое связное множество, т.е. область. Замыкание ее и будет нашей фигурой, ограниченной замкнутой областью ( $P$ ). Части фигуры, лежащие вне полосы

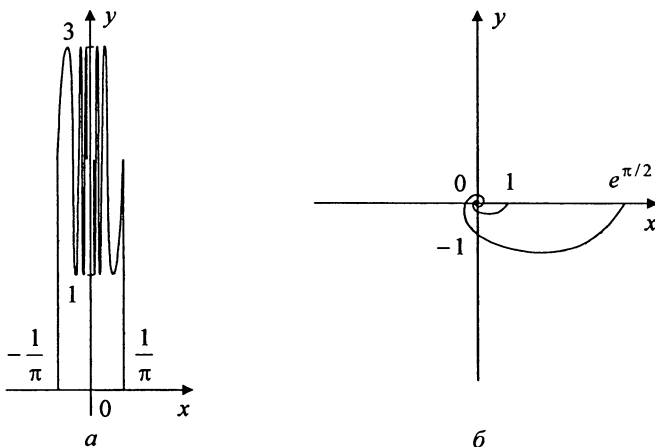


Рис. 9.2

$-\delta < x < \delta$ , где число  $\delta$ ,  $1/\pi > \delta > 0$ , сколь угодно мало, самые обычные: их границы кусочно-гладкие замкнутые кривые, имеющие конечную длину. Однако попадающая в полосу  $-\delta < x < \delta$  часть границы фигуры (соответствующий участок графика функции  $y = 2 + \sin \frac{1}{x}$  и отрезок  $[1, 3]$  оси  $Oy$ ) имеет, как легко показать, бесконечную длину, так как число колебаний функции от значений, равных 1, до значений, равных 3, бесконечно. В то же время фигура ( $P$ ) является квадратуемой, это позднее установим исходя из различных критериев.

Построим другой необычный пример квадратуемой фигуры, имеющей границу уже конечной длины.



**9.3. Квадрируемая область с граничными кривыми – спиралями, совершающими бесконечное число оборотов вокруг своей асимптотической точки.** Пусть граница  $(K)$  фигуры  $(P)$  будет состоять из двух дуг логарифмических спиралей  $\rho = e^\varphi$  и  $\rho = e^{\varphi+\pi/2}$ , где  $\varphi \leq 0$ , заданных в полярной системе координат; отрезка  $[1, e^{\pi/2}]$  оси  $Ox$  и точки  $(0, 0)$  (рис. 9.2, б). Так как функции  $\rho = e^\varphi$  и  $\rho = e^{\varphi+\pi/2}$  строго монотонны и отличаются только смещением аргумента на  $\frac{\pi}{2}$ , а это меньше  $2\pi$ , то дуги спиралей не пересекаются между собой. Можно показать, это мы сделаем ниже при рассмотрении понятия длины дуги, что длины рассматриваемых дуг спиралей конечны. Однако они совершают бесконечное число оборотов вокруг своей асимптотической точки  $(0, 0)$ . Описанная граница  $(K)$  является замкнутой кривой, так как точка  $(0, 0)$ , принадлежащая ей, является предельной точкой обеих дуг спиралей при  $\varphi \rightarrow -\infty$ . Множество точек, лежащих внутри описанной границы, открыто и связно, его замыкание – замкнутая область  $(P)$ . Область  $(P)$  квадрируема. Это вытекает из квадрируемости ее части, лежащей вне  $\varepsilon$ -окрестности точки  $(0, 0)$ , где число  $\varepsilon$ ,  $1 > \varepsilon > 0$ , произвольно и сколь угодно мало. Доказательство квадрируемости  $(P)$  выполним позже. Здесь обратим внимание на следующее. В данном случае построенные нами (согласно определению) многоугольники  $(A)$ , целиком содержащиеся в  $(P)$ , не могут проникнуть (попасть) в часть фигуры  $(P)$ , содержащую бесконечное число витков вокруг точки  $(0, 0)$ . Это связано с конечностью числа сторон многоугольников  $(A)$ . По той же причине многоугольники  $(B)$ , целиком содержащие в себе  $(P)$ , обязаны охватывать (целиком) некоторую конечную окрестность точки  $(0, 0)$ .

Приведем теперь примеры множеств точек на плоскости, которые не являются квадрируемыми.

**9.4. Ограниченное неквадрируемое множество точек.** Пусть  $M$  это множество точек замкнутого единичного квадрата  $0 \leq x, y \leq 1$ , имеющих обе иррациональные координаты. Очевидно, многоугольник  $(B)$  с минимальной площадью, целиком содержащий в себе множество  $M$ , это квадрат  $0 \leq x, y \leq 1$ . Любой меньший многоугольник (лежащий в этом квадрате) уже не будет содержать

всех точек множества  $M$ . Попытка же построить любой невырожденный многоугольник, целиком содержащийся в  $M$ , невыполнима. Действительно, предположим, что такой многоугольник  $(A_1)$  построен. Возьмем любую его внутреннюю точку  $C$ , она, как и все другие точки  $(A_1)$ , по предположению принадлежит  $M$ . Возьмем любую окрестность точки  $C$ , целиком лежащую в  $(A_1)$ . В ней находятся точки с рациональными координатами, которые плотно располагаются в квадрате  $0 \leq x, y \leq 1$ , но эти точки не принадлежат  $M$ . Приходим к противоречию. Отсюда следует неквадрируемость построенного множества. Другая неквадрируемая фигура приводится в примере 9.5.

**Критерий 1 квадрируемости фигуры.** Для существования площади фигуры необходимо и достаточно, чтобы для любого числа  $\varepsilon > 0$  нашлись (в обозначениях определения) два таких многоугольника  $(A)$  и  $(B)$ , что  $B - A < \varepsilon$ .

В критерии предполагается, что фигура – замкнутая область. Приведем два примера множеств точек на плоскости: первое, для которого условие  $B - A < \varepsilon$  не выполняется ни для каких многоугольников  $(A)$  и  $(B)$ ; второе, для которого условие  $B - A < \varepsilon$  выполняется. Оба множества не являются замкнутыми областями.

**9.5. Ограниченное неквадрируемое множество точек, заданное всюду разрывной функцией.** Рассмотрим множество точек  $M: (x, y) \in M$ , если  $0 \leq x \leq 1$  и  $0 \leq y \leq D(x) + 1$ , где  $D(x)$  – функция Дирихле (рис. 9.3, а). Множество  $M$  является объединением отрезков, нижний конец которых совпадает с точкой  $(x, 0)$  оси  $Ox$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , а верхний конец: для рациональных значений  $x$  есть точка  $(x, 2)$ , для иррациональных значений  $x$  есть точка  $(x, 1)$ . На рисунке показаны эти отрезки для значений  $x_1$  – рационального и  $x_2$  – иррационального. Границей  $\Gamma$  множества  $M$ , т.е. множеством  $\Gamma$  точек, в любой окрестности каждой из которых находятся как точки, принадлежащие, так и точки не принадлежащие  $M$ , является весь замкнутый прямоугольник  $CDKL$  и отрезки  $OC$ ,  $OF$  и  $FD$ . Многоугольником  $(B)$ , содержащим целиком все множество  $M$  и имеющим минимальную площадь, будет, очевидно, прямоугольник  $OFKL$  с площадью  $B = 2$ . Многоугольником  $(A)$ , целиком содержащимся в  $M$  и имеющим максимальную площадь, будет, очевидно, прямоугольник  $OFDC$  с площадью  $A = 1$ . Как видим, для  $1 > \varepsilon > 0$  условие  $B - A < \varepsilon$  здесь не выполняется. Множество  $M$  не является квадрируемым.

**9.6. Квадрируемое множество точек, заданное функцией, имеющей плотное множество точек разрыва.** Рассмотрим множество точек  $M: (x, y) \in M$ , если  $0 \leq x \leq 1$  и  $0 \leq y \leq R(x) + 1$ , здесь  $R(x)$  – функция Римана (рис. 9.3, б). Множество является объеди-

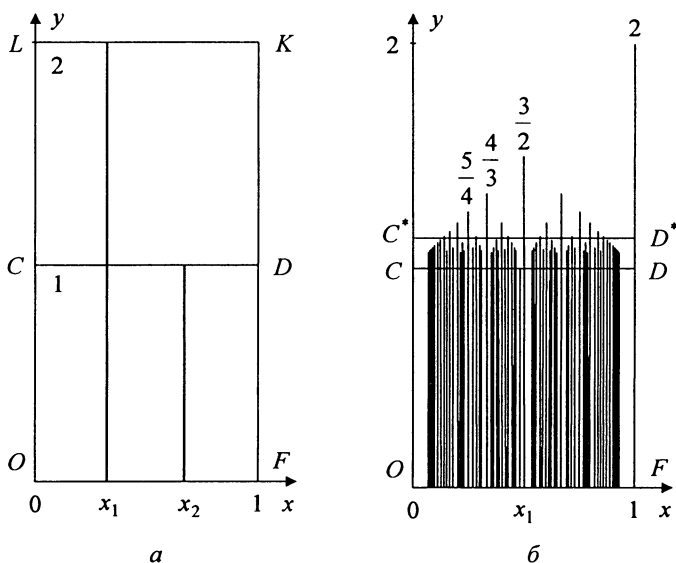


Рис. 9.3

нением отрезков, нижний конец которых совпадает с точкой  $(x, 0)$  оси  $Ox$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , а верхний конец: для рациональных значений  $x = \frac{m}{n}$ , где  $\frac{m}{n}$  – несократимая дробь,  $n$  – натуральное,  $m$  – целое число, есть точка  $\left(x, \frac{1}{n} + 1\right)$ , для иррациональных значений  $x$  есть точка  $(x, 1)$ . На рисунке показаны только отрезки для некоторых рациональных значений  $x$ , а именно кратных  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{14}$ , и некоторого иррационального значения  $x_1$ . Границей  $\Gamma$  множества  $M$ , т.е. множеством  $\Gamma$  точек, в любой окрестности каждой из которых находятся как точки, принадлежащие, так и точки не принадлежащие  $M$ , является описанное выше объединение отрезков, за вычетом открытого прямоугольника  $OFDC$ . Многоугольником  $(A)$ , целиком содержащимся в  $M$  и имеющим максимальную площадь,

будет, очевидно, прямоугольник  $OFDC$  с площадью  $A = 1$ . Построим многоугольник  $(B)$ , целиком содержащий множество  $M$  и имеющий площадь  $B < 1 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon > 0$  – любое. Возьмем любое  $\varepsilon > 0$ . Прямоугольник  $OFD^*C^*$ , где сторона  $D^*C^*$  – это отрезок  $DC$ , поднятый параллельно оси  $Oy$  на величину  $\frac{\varepsilon}{2}$  (см. рис. 9.3, б), содержит описанные выше отрезки для всех иррациональных значений  $x$  и рациональных, для которых  $x = \frac{m}{n}$  при  $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Его площадь равна  $1 + \frac{\varepsilon}{2}$ . Видим, что вне прямоугольника  $OFD^*C^*$  находятся точки только конечного числа отрезков, а именно тех, для которых  $\frac{1}{n} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ . Это конечное множество отрезков покроем прямоугольниками (каждый отрезок – своим) с суммарной площадью меньше  $\frac{\varepsilon}{2}$ , что всегда можно сделать. Объединение этих прямоугольников с прямоугольником  $OFD^*C^*$ , который с любым из них пересекается, и даст многоугольник  $(B)$ , содержащий множество  $M$  и имеющий площадь меньше  $1 + \varepsilon$ . Так как площадь  $A$  многоугольника  $(A)$ , т.е. прямоугольника  $OFDC$ , равна единице, то условие  $B - A < \varepsilon$  в этом случае выполняется.

**Определение кривой с площадью, равной нулю.** Замкнутая или незамкнутая ограниченная кривая  $(K)$  имеет площадь, равную нулю, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует многоугольная область  $(G)$ , содержащая  $(K)$  и имеющая площадь  $G < \varepsilon$ .

Существуют кривые, которые не содержатся в многоугольных областях с достаточно малой площадью. Сошлемся на известные примеры таких кривых.

**9.7\*. Кривые, имеющие ненулевую площадь.** Это, например, кривые Пеано, Гильберта, Серпинского, Госпера, см. [10], с. 45–50, [11], с. 25–28, которые задаются уравнениями (9.5) и заполняют некоторые области на плоскости. Последнее обстоятельство означает, что любая многоугольная область  $(G)$ , содержащая некоторую из названных кривых, содержит и соответствующую область  $(D)$ , заполняемую кривой, т.е. площадь  $G$  многоугольной области  $(G)$  будет не меньше площади  $D$  области  $(D)$ ,  $G \geq D > 0$ .

Существуют множества точек на плоскости, которые можно заключить в

многоугольную область с произвольно малой площадью и для которых не существует ни одного невырожденного многоугольника, содержащегося в них. Эти свойства аналогичны свойствам «обычных» кусочно-гладких кривых. Пример.

**9.8. Множество точек на плоскости, имеющее нулевую площадь.** Пусть  $(P)$  – квадратный ковер Серпинского, [11], с. 22–24. Его построение будем выполнять итерационно (рис. 9.4). Рассмотрим

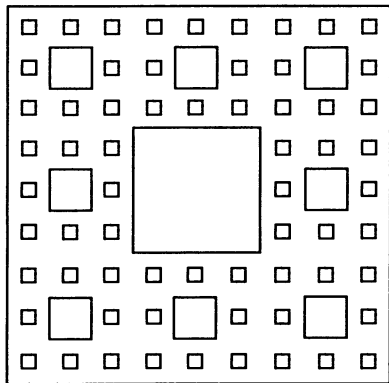


Рис. 9.4

рим единичный квадрат  $0 \leq x, y \leq 1$ . На шаге 1 построения делим квадрат на 9 равных квадратов и удаляем средний из них (открытый). Полученное множество точек обозначим  $(P_1)$ . На шаге 2 с каждым из 8 оставшихся квадратов проделываем то же самое: делим их на 9 равных квадратов и удаляем средние квадраты (открытые). Полученное на шаге 2 множество точек обозначим  $(P_2)$ . На рис. 9.4 показаны три первых шага построения. На любом шаге  $k+1$ ,  $k=1, 2, \dots$  делим все оставшиеся после шага  $k$  квадраты на девять квадратов и в каждом удаляем средний открытый квадрат. Полученное на шаге  $k+1$  множество точек обозначим  $(P_{k+1})$ . Выполнив сказанное для всех  $k=1, 2, \dots$ , получаем множество  $(P)$  оставшихся точек (замкнутое), называемое ковром Серпинского,

$$(P) = \bigcap_{k=1}^{\infty} (P_k). \quad (9.1)$$

Заметим, что удаленные точки располагаются в единичном квадрате плотно, т.е. находятся в любой окрестности любой точки квадрата. Очевидно, не существует ни одного невырожденного многоуголь-

ника ( $A$ ), содержащегося в фигуре ( $P$ ). Предположим противное, тогда в таком невырожденном многоугольнике, состоящем из точек фигуры ( $P$ ), содержится и некоторая окрестность его внутренней точки (эта окрестность целиком лежит в ( $P$ )). Указанная окрестность, как и весь ковер Серпинского, лежит в единичном квадрате, и, следовательно, содержит точки из удаленных квадратов, т.е. точки, не принадлежащие ( $P$ ). Приходим к противоречию. Однако многоугольники ( $B$ ), целиком содержащие ( $P$ ), существуют. В качестве таких многоугольников естественно рассмотреть многоугольники ( $P_k$ ),  $k = 1, 2, \dots$ . Каждый из них согласно (9.1) содержит ( $P$ ). Кроме того, по их построению  $(P_{k+1}) \subset (P_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Площади этих многоугольников равны  $P_1 = 1 - \frac{1}{9}$ ,  $P_2 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{8}{9^2}$ ,

$P_3 = 1 - \frac{1}{9} - \frac{8}{9^2} - \frac{8^2}{9^3}$ , ... Заметим, что

$$\frac{1}{9} + \frac{8}{9^2} + \frac{8^2}{9^3} + \dots = \frac{1}{9} \left( 1 + \frac{8}{9} + \frac{8^2}{9^2} + \dots \right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - 8/9} = 1, \quad (9.2)$$

где суммирование выполнено по формуле суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. Отсюда получаем  $\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = 0$ , т.е.

если использовать определение, то получаем площадь  $P$  фигуры ( $P$ ), равной  $P = 0$ . Этот результат соответствует тому, что суммарная площадь (9.2) удаленных квадратов равна площади исходного единичного квадрата.

**Критерий 2 квадратуемости фигуры.** Для того чтобы область (фигура) ( $P$ ) была квадратуема, необходимо и достаточно, чтобы ее граница ( $K$ ) имела площадь, равную нулю.

Приведем пример применения этого критерия.

**9.9. Область, квадратуемость которой устанавливается критерием 2.** Рассмотрим область из примера 9.2. Ее граница замкнута и состоит из четырех участков: трех конечных отрезков прямых и графика функции  $y = 2 + \sin \frac{1}{x}$ ,  $-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$  ( $x \neq 0$ ), дополненного отрезком  $[1, 3]$  оси  $Oy$ . Возьмем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Каждый из упомянутых трех отрезков целиком заключим в свой прямоугольник площадью меньше  $\frac{\varepsilon}{4}$ , что всегда можно сделать. Функция

$y = 2 + \sin \frac{1}{x}$  на отрезках  $\left[-\frac{1}{\pi}, -\delta\right]$  и  $\left[\delta, \frac{1}{\pi}\right]$ , где  $\frac{1}{\pi} > \delta > 0$  – произвольно, непрерывна. В [2], т. I, с. 355–356 показано, что график непрерывной функции на конечном отрезке можно покрыть конечным числом прямоугольников со сколь угодно малой суммарной площадью, например, меньшей  $\frac{\varepsilon}{12}$ . Таким образом, достаточно показать, что оставшуюся часть границы можно заключить в прямоугольник с площадью, меньшей  $\frac{\varepsilon}{12}$ . Эта часть границы помещается в прямоугольнике  $-\delta \leq x \leq \delta$ ,  $1 \leq y \leq 3$ , где  $\delta > 0$  – произвольно. Выбрав  $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{48}$ , сделаем площадь  $S$  данного прямоугольника меньше  $\frac{\varepsilon}{12}$ . Действительно,  $S = 2\delta \cdot 2 = 4\delta < 4 \frac{\varepsilon}{48} = \frac{\varepsilon}{12}$ . Объединением построенных прямоугольников (их конечное число), покрывающих все участки границы, получаем многоугольную замкнутую область, имеющую площадь меньше  $\varepsilon$ . Следовательно, граница кривой имеет площадь, равную нулю, и фигура квадратуема.

**Достаточное условие 1 квадратуемости фигуры.** Если граница ( $K$ ) фигуры ( $P$ ) составлена из нескольких непрерывных кривых, определяемых (по отдельности) некоторыми явными уравнениями  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  или  $x = g(y)$ ,  $y \in [c, d]$ , где  $f(x)$  и  $g(y)$  – непрерывные функции, то ( $P$ ) квадратуема.

Приведем пример фигуры, квадратуемость которой устанавливается с использованием данного утверждения.

**9.10. Область, квадратуемость которой устанавливается достаточным условием 1.** Всем предположениям утверждения отвечает область из примера 9.1. Следовательно, она является квадратуемой. Заметим, что длина граничной кривой этой области бесконечна.

В утверждении сформулированы только достаточные условия квадратуемости. Приведем примеры квадратуемых фигур, к которым неприменимо утверждение.

**9.11, 9.12, 9.13. Квадатуемые области и множество точек, квадратуемость которых не устанавливается достаточным условием 1.** Квадатуемая область из примера 9.2 не отвечает требо-

ваниям утверждения, так как функция, определяющая один из участков границы, имеет разрыв (второго рода).

Квадрируемая область из примера 9.3 имеет границу, которая не может быть задана конечным числом функций переменных  $x$  и  $y$ , так как эта граница содержит бесконечное число «витков» вокруг точки  $(0, 0)$ . Поэтому утверждение к этой области неприменимо.

Квадрируемое множество точек из примера 9.6 не отвечает условиям утверждения, так как одна из функций, которые задают границы множества, является разрывной в точках, плотно расположенных на отрезке ее задания.

**Достаточное условие 2 квадрируемости фигуры.** Если граница  $(K)$  фигуры  $(P)$  составлена из одной или нескольких гладких кривых, то  $(P)$  квадрируема.

Заметим, что в точках сопряжения гладких кривых могут быть изломы, т.е. в этих точках может не существовать касательная, но существуют односторонние производные. Приведем примеры квадрируемых областей, границы которых составлены из непрерывных, но негладких кривых. В этих случаях утверждение неприменимо.

**9.14, 9.15. Квадрируемые области, квадрируемость которых не устанавливается достаточным условием 2.** Область из примера 9.1 имеет участок границы, заданный функцией

$$y = f_1(x) = \begin{cases} 1 + x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad -\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi},$$

которая в точке  $x = 0$  непрерывная, но не гладкая, так как не существует даже односторонних производных в этой точке. Утверждение неприменимо.

Область из примера 9.3 имеет непрерывную границу, которая составлена из гладких кривых, но в точке  $(0, 0)$  имеется особенность: не существует предельного положения касательных к дугам спиралей при  $\varphi \rightarrow -\infty$ . Поэтому утверждение неприменимо.

Данное утверждение будет использовано ниже для доказательства квадрируемости фигур в примерах 9.20 – 9.22.

**Теорема об аддитивности площади.** Предположим, что фигура  $(P)$  разложена на две фигуры  $(P_1)$  и  $(P_2)$ , которые не имеют общих внутренних точек, но границы которых могут иметь общую часть. Такое разложение можно выполнить, например, с помощью кривой, соединяющей две точки границы  $(P)$  или целиком лежащей внутри  $(P)$  (рис. 9.5, а и б). Тогда из квадрируемо-



сти любых двух из трех фигур  $(P)$ ,  $(P_1)$  и  $(P_2)$  следует квадрируемость третьей, и выполняется  $P = P_1 + P_2$ .

Теорему об аддитивности площади можно сформулировать и для случая разложения фигуры на любое конечное число фигур. Приведем занимательный иллюстративный пример.

**9.16. Применение теоремы об аддитивности площади для определения площади ковра Серпинского.** Ковер Серпинского  $(P)$ , как показано выше, имеет площадь, см. пример 9.8. Его можно разложить на восемь одинаковых частей  $(p)$ , каждая из которых располагается в одном из восьми равных квадратов из девяти, на

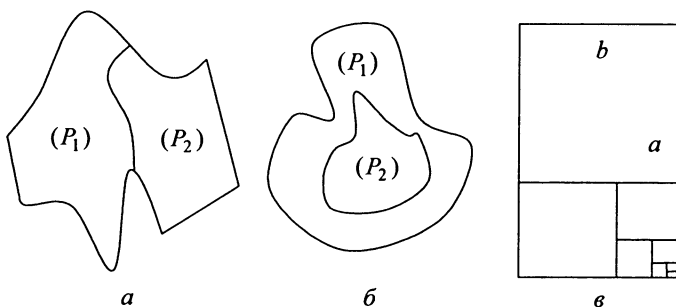


Рис. 9.5

которые разбит исходный единичный квадрат. Заметим, что средний из девяти квадратов (открытый) не содержит точек  $(P)$ . Отсюда получаем для площадей  $(P)$  и  $(p)$ :  $P = 8p$ . В то же время в силу построения ковра Серпинского  $(P)$  его часть  $(p)$  подобна с коэффициентом подобия  $k = \frac{1}{3}$  всему  $(P)$ . Отсюда получаем  $P = 9p$ . Та-

кая связь между площадями подобных фигур следует из аналогичной связи между площадями вписанных в них (описанных вокруг них) многоугольников. Имеем два равенства  $P = 8p$  и  $P = 9p$ . Они не противоречат друг другу, только когда  $P = p = 0$ .

Для квадрируемой фигуры аддитивность площади может соблюдаться и при разложении ее на счетное множество квадрируемых фигур.

**9.17. Пример аддитивности площади при разложении квадрируемой области на счетное множество квадрируемых областей.** Рассмотрим прямоугольник  $(P)$  с отношением длин  $b$  и  $a$  сто-

рон, равным золотому сечению:  $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ , пусть для простоты  $a=1$ . Известно, что такой прямоугольник разложим на квадрат со стороной  $b$  и прямоугольник, подобный исходному прямоугольнику. Этот прямоугольник также можно разложить на квадрат и прямоугольник, подобный исходному, и т.д. В итоге, проделав бесконечное число шагов, получим разложение исходного прямоугольника на счетное множество квадратов (рис. 9.5, в). Сумма  $S$  площадей квадратов равна площади исходного прямоугольника, т.е.  $S = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Покажем это. При  $a=1$  из подобия прямоугольников получаем, что стороны последовательных квадратов будут равны  $b, b^2, b^3, \dots$ , отсюда запишем сумму площадей квадратов в виде

$$\begin{aligned} S &= b^2 + b^4 + b^6 + \dots = \frac{b^2}{1-b^2} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4(1-(\sqrt{5}-1)^2/4)} = \frac{5-2\sqrt{5}+1}{4-5+2\sqrt{5}-1} = \\ &= \frac{3-\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}} = \frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \frac{2\sqrt{5}-2}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \end{aligned}$$

Однако счетную аддитивность площади нельзя перенести на все случаи разложения на части множеств точек. Контрпример.

**9.18. Пример неаддитивности площади при разложении неквадрируемого множества на счетное множество квадрируемых частей.** Рассмотрим множество точек  $M$  из примера 9.5 (см. рис. 9.3, а). Разобьем ее на счетное множество частей: прямоугольник  $OFDC$  и вертикальные отрезки единичной длины, лежащие в прямоугольнике  $CDKL$ , отвечающие всем рациональным значениям  $x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Площадь прямоугольника  $OFDC$  равна единице, а площади упомянутых отрезков равны нулю. Если бы была справедлива счетная аддитивность, то площадь множества  $M$  равнялась бы единице. Но выше была показана неквадрируемость этого множества.

**Критерий 3 квадрируемости фигуры.** Для квадрируемости фигуры  $(P)$  необходимо и достаточно, чтобы существовали две последовательности прямоугольников  $\{A_n\}$  и  $\{B_n\}$ , содержащихся в  $(P)$  и содержащих  $(P)$  соответственно, такие, что две последовательности  $\{A_n\}$  и  $\{B_n\}$ , составленные из их площадей, имели бы общий предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = P$ . Этот общий предел, если он существует, равен площади фигуры  $(P)$ .

Этот критерий удобен для выяснения квадратуемости замечательной фигуры – снежинки Коха. Решим эту задачу.

**9.19\*. Применение критерия 3 к установлению квадратуемости снежинки Коха.** Сначала напомним, как строится граница снежинки Коха, см. [11], с. 17–19. Берем равносторонний треугольник, пусть он имеет, для удобства дальнейших построений, единичную площадь. Для каждой стороны треугольника выполним следующий итерационный процесс. На нулевом шаге имеем сторону треугольника, обозначим ее  $T_0$ . На шаге 1 заменяем среднюю треть

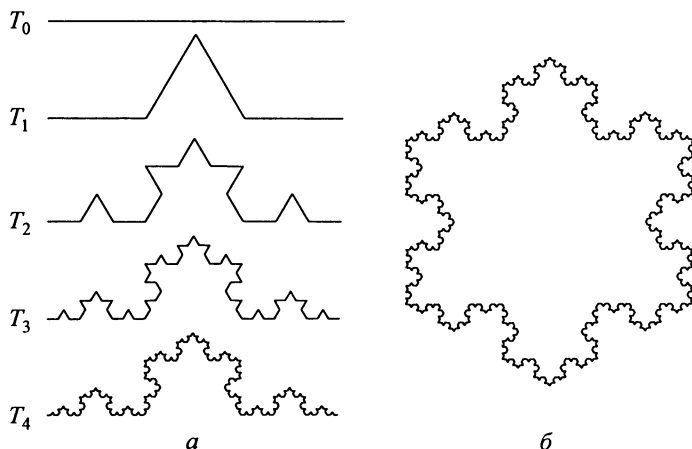


Рис. 9.6

стороны  $T_0$  двумя отрезками такой же длины, получаем ломаную  $T_1$ , состоящую из 4 равных отрезков (рис. 9.6, а). На шаге 2 с полученными четырьмя отрезками ломаной  $T_1$  выполняем эту же операцию, получаем ломаную  $T_2$ , состоящую из 16 равных отрезков. Выполняем данный процесс для всех шагов  $n = 1, 2, \dots$ , при этом на шаге  $n + 1$  с каждым из  $4^n$  отрезков ломаной  $T_n$  выполняем описанную операцию, получаем ломаную  $T_{n+1}$ , состоящую из  $4^{n+1}$  равных отрезков. Известно, что последовательность  $\{T_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , равномерно сходится к некоторой непрерывной кривой ( $T$ ). Граница ( $K$ ) снежинки Коха ( $P$ ) составляется из трех экземпляров кривой ( $T$ ) и представляет собой непрерывную замкнутую кривую.

Для установления квадратуемости ( $P$ ) построим указанные в

утверждении последовательности многоугольников  $\{(A_n)\}$  и  $\{(B_n)\}$ , соответственно содержащихся в  $(P)$  и содержащих  $(P)$ .

Начнем с последовательности  $\{(A_n)\}$ . Естественным является составление границы многоугольника  $(A_n)$ , для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$ , из трех экземпляров ломаной  $T_n$ . На рис. 9.6, б показан многоугольник  $(A_4)$ , составленный из трех ломаных  $T_4$ . По самому построению границы снежинки Коха все, так построенные, многоугольники  $(A_n)$  будут содержаться в  $(P)$ . Вычислим последовательно площади

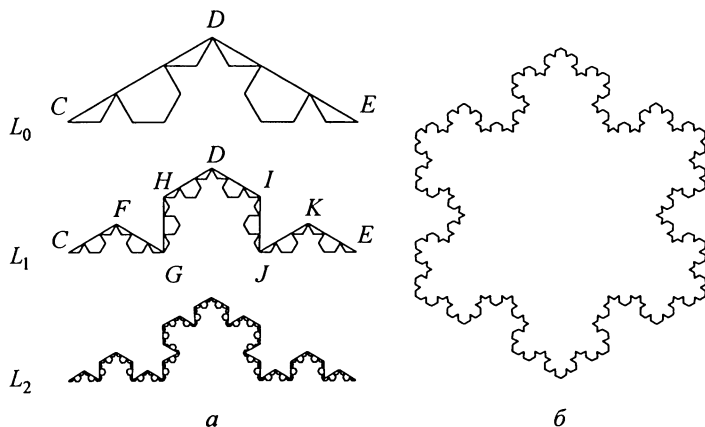


Рис. 9.7

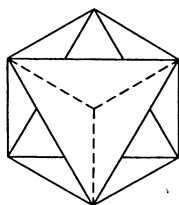
многоугольников  $(A_n)$ . Заметим, что площадь  $A_{n+1}$  каждого последующего многоугольника, есть площадь  $A_n$  плюс число сторон  $(3 \cdot 4^n)$  у многоугольника  $(A_n)$ , т.е. число добавляемых на шаге  $n+1$  треугольников, умноженное на площадь  $\left(\frac{1}{9^{n+1}}\right)$  одного такого треугольника (все они равные и равносторонние). Без потери общности было принято, что  $A_0 = 1$ . Тогда

$$A_1 = 1 + \frac{3}{9}, \quad A_2 = 1 + \frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2}, \quad A_3 = 1 + \frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} \text{ и т.д.}$$

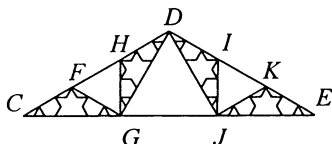
Отсюда  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 1 + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - 4/9} = 1 + \frac{9}{3 \cdot 5} = 1,6$ .

Построим последовательность  $\{(B_n)\}$ , при этом будем использовать следующий прием. Вернемся к построению границы снежинки

Коха. На шаге 2-м этого построения мы не выходили за пределы ломаной  $CDE$ , содержащей два одинаковых отрезка (рис. 9.7, а), обозначим ее  $L_0$ . На шаге 3-м, в силу подобия построения, мы не выходили за пределы аналогичных, но меньших, ломаных  $CFG$  и  $GHD$ ,  $DIJ$  и  $JKE$ , которые составляют ломаную  $CFGHDIJKE$ , содержащую восемь равных отрезков, обозначим ее  $L_1$ . На шаге 4-м, мы не выходили за пределы ломаной, уже составленной из тридцати двух равных отрезков, обозначим ее  $L_2$  и т.д. Замечаем, что в силу подобия (самоподобия) построения границы снежинки Коха процесс построения ломаных  $L_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , аналогичен процессу по-



а



б

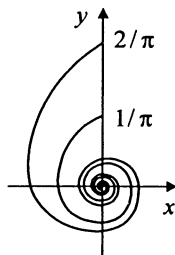


Рис. 9.9

Рис. 9.8

строения ломаных  $T_n$ . Отличия заключаются только в том, что процесс начинается не с отрезка  $CE$ , а с ломаной  $CDE$ , и направлен не от центра построения, а к центру. Опишем процесс построения ломаных  $L_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (см. рис. 9.7, а). На шаге 1-м, взяв за основу ломаную  $L_0$  ( $CDE$ ), состоящую из двух равных отрезков, мы заменяем средние трети каждого отрезка двумя отрезками такой же длины, получаем ломаную  $L_1$ , состоящую из восьми равных отрезков. На шаге 2-м с полученными восьмью отрезками ломаной  $L_1$  выполняем эту же операцию, получаем ломаную  $L_2$ , состоящую из 32 равных отрезков. Выполняем процесс для всех шагов  $n = 1, 2, \dots$  и получаем последовательность ломаных  $\{L_n\}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Естественным является составление границы многоугольника  $(B_n)$ , для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$ , из трех экземпляров ломаной  $L_n$ . На рис. 9.7, б показан многоугольник  $(B_3)$ , составленный из трех ломаных  $L_3$ . По своему построению многоугольники  $(B_n)$  будут содержать  $(P)$ . Вычислим последовательно площади многоугольников  $(B_n)$ . Заме-

тим, что площадь  $B_0 = 2$ , а площадь  $B_{n+1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , каждого последующего многоугольника, есть площадь  $B_n$  минус число сторон  $(6 \cdot 4^n)$  у многоугольника  $(B_n)$ , т.е. число удаляемых на шаге  $n+1$  треугольников, умноженное на площадь  $\left(\frac{1}{3 \cdot 9^{n+1}}\right)$  одного такого треугольника (все они равные и равносторонние). Действительно, заметим, что многоугольник  $(B_0)$  – это правильный шестиугольник с площадью, равной удвоенной площади исходного треугольника, т.е.  $B_0 = 2$  (рис. 9.8, а). Площадь одного удаляемого на шаге 1-м треугольника, например  $\triangle FGH$ , равна

$$S_{\triangle FGH} = \frac{1}{3} S_{\triangle CGD} = \frac{1}{9} S_{\triangle CDE} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot 9}$$

(рис. 9.8, б). На каждом последующем шаге площадь одного удаляемого треугольника уменьшается в девять раз. Это следует из подобия построения. Тогда получаем

$$B_0 = 2, B_1 = 2 - \frac{6}{3 \cdot 9}, B_2 = 2 - \frac{6}{3 \cdot 9} - \frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 9^2}, B_3 = 2 - \frac{6}{3 \cdot 9} - \frac{6 \cdot 4}{3 \cdot 9^2} - \frac{6 \cdot 4^2}{3 \cdot 9^3},$$

и т.д. Отсюда  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 2 - \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = 2 - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1 - 4/9} = 2 - \frac{2 \cdot 9}{9 \cdot 5} = 1,6$ .

Видим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n = 1,6$  и  $P = 1,6$ .

**Достаточное условие 3 квадратуемости фигуры.** Для квадратуемости фигуры  $(P)$  достаточно, чтобы существовали две последовательности квадратуемых фигур  $\{(Q_n)\}$  и  $\{(R_n)\}$ , содержащихся в  $(P)$  и содержащих  $(P)$  соответственно, такие, что две последовательности  $\{Q_n\}$  и  $\{R_n\}$ , составленные из их площадей, имели бы общий предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = P$ . Этот общий предел, если он существует, равен площади фигуры  $(P)$ .

Квадратуемость многих из рассмотренных выше фигур легко установить, пользуясь данным утверждением. Приведем примеры.

**9.20. Область, квадратуемость которой устанавливается достаточным условием 3.** Построим последовательности квадратуемых фигур  $\{(Q_n)\}$  и  $\{(R_n)\}$  для спиралевидной фигуры  $(P)$  из примера 9.3. Рассмотрим последовательность открытых кругов  $\{(C_n)\}$ ,  $(C_n): \rho < \frac{1}{4n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Заметим, что уже при  $n = 1$  круг  $(C_1)$  пересекается с обеими дугами спирали (см. рис. 9.2, б). Определим

фигуры  $(Q_n) = (P) \setminus (C_n)$  и  $(R_n) = (P) \cup \overline{(C_n)}$ , где  $\overline{(C_n)}$  – замыкание круга  $(C_n)$  для всех  $n = 1, 2, \dots$ . Эти множества замкнуты:  $(Q_n)$  как разность замкнутого и открытого множеств,  $(R_n)$  как объединение двух замкнутых множеств. И все эти множества квадратуемы согласно достаточному условию 2 квадратуемости, так как их границы составлены из конечного числа гладких кривых. Очевидно по построению множеств  $(Q_n)$  и  $(R_n)$ , что первые содержатся в  $(P)$ , а вторые содержат  $(P)$ . И наконец, для площадей этих фигур имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = P$ , так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$  по определению кругов  $(C_n)$ . Следовательно, фигура из примера 9.3 квадратуема.

В приведенных рассуждениях нигде не использовалась конечность длин дуг спиралей. Построим аналогичный пример с дугами гиперболических спиралей, имеющими уже бесконечную длину.

**9.21. Область, квадратуемость которой устанавливается достаточным условием 3, имеющая граничную кривую бесконечной длины.** Рассмотрим пример, аналогичный примеру 9.3. Пусть граница  $(K)$  фигуры  $(P)$  составлена из дуг гиперболических спиралей, записанных в полярной системе координат уравнениями  $\rho = \frac{1}{\varphi}$  и  $\rho = \frac{1}{\varphi + \pi/2}$ , где  $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ ; отрезка  $\left[\frac{1}{\pi}, \frac{2}{\pi}\right]$  оси  $Oy$  и точки  $(0, 0)$  (рис. 9.9). Дуги спиралей не пересекаются между собой, так как функции в правых частях их уравнений строго монотонны и отличаются только смещением аргумента на  $\frac{\pi}{2}$ , а это меньше  $2\pi$ . Ниже при рассмотрении понятия длины дуги будет показано, что рассматриваемые дуги спиралей имеют бесконечные длины. Остальные свойства фигуры, описанные в примере 9.3, очевидно, можно полностью перенести на данную фигуру  $(P)$ . Кроме того, все рассуждения, выполненные в примере 9.20, можно дословно повторить для фигуры  $(P)$ , показав тем самым и ее квадратуемость.

**9.22. Область, квадратуемость которой устанавливается достаточным условием 3 и у которой граничная кривая задана функцией, не имеющей предела в точке.** Построим последовательности квадратуемых фигур  $\{(Q_n)\}$  и  $\{(R_n)\}$  для фигуры  $(P)$  из примера 9.2 (см. рис. 9.2, а). Положим  $(Q_n) = (P) \setminus (M_n)$  и  $(R_n) = (P) \cup \overline{(M_n)}$ , где  $(M_n)$  – открытый прямоугольник

$-\frac{1}{4n} < x < \frac{1}{4n}$ ,  $\frac{1}{2} < y < 4$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Полученные множества замкну-  
 ты:  $(Q_n)$  как разность замкнутого и открытого множеств,  $(R_n)$  как  
 объединение двух замкнутых множеств. Множества  $(Q_n)$  и  $(R_n)$   
 квадратуемы, так как границы у них составлены из конечного числа  
 гладких кривых. Из формул, определяющих множества  $(Q_n)$  и  $(R_n)$ ,

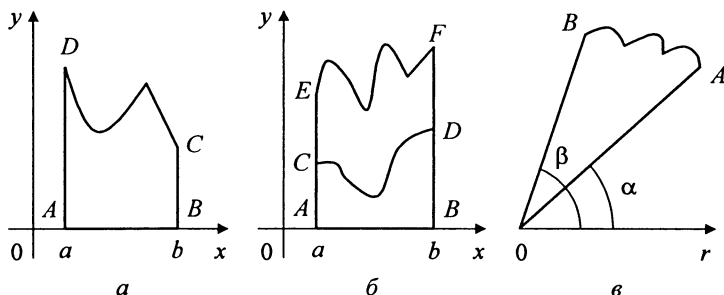


Рис. 9.10

следует, что первые содержатся в фигуре  $(P)$ , а вторые содержат  
 $(P)$ . По самому определению множеств, их площади ведут себя при  
 $n \rightarrow \infty$  следующим образом:  $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0$  и, следовательно,

$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = P$ . Получаем квадратуемость фигуры  $(P)$ .

**Выражение 1 площади интегралом.** Пусть  $ABCD$  – криволинейная  
 трапеция (рис. 9.10, а). Она ограничена: сверху – кривой  $DC$ , заданной урав-  
 нением  $y = f(x)$ , где функция  $f(x)$  неотрицательная и непрерывная на от-  
 резке  $[a, b]$ ; снизу – отрезком  $AB$  оси  $x$ ; с боков – двумя ординатами  $AD$  и  
 $BC$  (каждая из них может быть сведена к точке). Тогда площадь  $P$  криволи-  
 нейной трапеции равна  $P = \int_a^b f(x) dx$ .

Утверждение непосредственно применимо к фигуре из примера 9.1.

**9.23. Область, для которой применимо выражение 1 площа-  
 ди интегралом.** Рассмотрим область из примера 9.1. Функция

$$y = f(x) = \begin{cases} 1 + x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad \text{заданная на отрезке } -\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi},$$

определяет криволинейную трапецию  $(P)$  (см. рис. 9.1, б). Эта  
 функция положительная и непрерывная на отрезке своего задания.



Следовательно,  $P = \int_{-1/\pi}^{1/\pi} f(x) dx$ . То, что граничная кривая ( $K$ ) криволинейной трапеции ( $P$ ) имеет бесконечную длину, не мешает применению утверждения.

**Выражение 2 площади интегралом.** Пусть  $CDFE$  – криволинейная трапеция (рис. 9.10, б). Она ограничена: снизу и сверху – кривыми  $CD$  и  $EF$ , уравнения которых  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ , функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  неотрицательные и непрерывные на отрезке  $[a, b]$ , на нем  $f_1(x) \leq f_2(x)$ ; с боков – двумя отрезками  $CE$  и  $DF$  ординат  $AE$  и  $BF$  (каждый из них может быть сведен к точке). Тогда площадь  $P$  криволинейной трапеции равна

$$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (9.3)$$

Покажем, что данная в утверждении формула применима далеко не всегда. Приведем контрпример, заимствованный из [1], с. 190.

**9.24. Функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  ( $0 \leq f_1(x) < f_2(x)$ ) на  $[0, 1]$ , для которых существует  $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x)) dx = 1$ , но множество точек,**

**определяемое этими функциями, не имеет площади.** Положим  $f_1(x) = D(x)$ ,  $f_2(x) = D(x) + 1$  на отрезке  $[0, 1]$ , где  $D(x)$  – функция Дирихле. Очевидно,  $0 \leq f_1(x) < f_2(x)$ , а интеграл (9.3) существует и

равен  $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_0^1 dx = 1$ . Однако, согласно критерию 2

квадрируемости, множество  $(P): \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$  не имеет площади, так как граница этого множества есть замкнутый прямоугольник  $(K): \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ , который имеет площадь, равную двум. Действительно, любая окрестность произвольной точки этого прямоугольника содержит как точки, принадлежащие указанному множеству, так и не принадлежащие ему. Это объясняется тем, что множество состоит из вертикальных отрезков  $I_x$  единичной длины: если  $x$  – рациональное число, то  $I_x: x, 1 \leq y \leq 2$ ; если  $x$  – иррациональное число, то  $I_x: x, 0 \leq y \leq 1$ . Следовательно,

интеграл  $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x)) dx = 1$  в данном случае не выражает площадь множества (несуществующую).

**Выражение 3 площади интегралом.** Пусть дан сектор  $AOB$  (рис. 9.10,

е), ограниченный двумя радиусами-векторами  $OA$  и  $OB$  (каждый из них может быть сведен к точке) и кривой  $AB$ . Кривая  $AB$  определяется полярным уравнением  $r = g(\theta)$ , где  $g(\theta)$  — положительная непрерывная на отрезке  $[\alpha, \beta]$  функция. Тогда сектор  $AOB$  является квадрируемой фигурой, и его площадь равна  $P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (g(\theta))^2 d\theta$ .

Покажем, что при определенных условиях с помощью данной формулы можно вычислять площадь фигуры и в случаях, когда функция задана на неограниченном полуинтервале.

**9.25\*.** Область, для которой применимо выражение 3 площади интегралом, но с предельным переходом. Вычислим площадь  $P$  квадрируемой фигуры ( $P$ ) из примера 9.3. Сначала сделаем это для части фигуры ( $P_{\alpha}$ ), для которой  $\alpha \leq \varphi \leq 0$ , где число  $\alpha < 0$  произвольно. Получаем

$$P_{\alpha} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^0 (e^{2\varphi+\pi} - e^{2\varphi}) d\varphi = \frac{e^{\pi}-1}{2} \int_{\alpha}^0 e^{2\varphi} d\varphi = \frac{e^{\pi}-1}{4} (e^{2\varphi}) \Big|_{\alpha}^0 = \frac{(e^{\pi}-1)(1-e^{2\alpha})}{4}.$$

Так как было показано, что фигура ( $P$ ) квадрируема, то  $P$  существует и  $P_{\alpha} < P$ . При  $\alpha \rightarrow -\infty$   $P_{\alpha} \rightarrow P$ , очевидно, строго монотонно возрастая,  $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} P_{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{(e^{\pi}-1)(1-e^{2\alpha})}{4} = \frac{e^{\pi}-1}{4}$ . Таким образом,

$P = \frac{e^{\pi}-1}{4}$ . В данном примере мы фактически пользуемся понятием несобственного интеграла, см. [2], т. II, с. 110.

## 9.2. Объем тела

**Определение объема тела.** Рассмотрим некоторую ограниченную замкнутую область ( $V$ ) в трехмерном пространстве, назовем ее телом. Пусть его граница ( $S$ ) представляет собой замкнутую поверхность (или несколько замкнутых поверхностей). Рассмотрим многогранники ( $X$ ), содержащиеся в теле ( $V$ ), и многогранники ( $Y$ ), содержащие в себе ( $V$ ). Пусть  $X$  и  $Y$  — их объемы соответственно, тогда  $X \leq Y$ . При таких предположениях существуют: точная верхняя грань  $V_*$  для  $X$  и точная нижняя грань  $V^*$  для  $Y$ ,  $V_* \leq V^*$ . Числа  $V_*$  и  $V^*$  можно назвать внутренним и внешним объемами тела ( $V$ ) соответственно. Если обе точные грани  $V_* = \sup\{X\}$  и  $V^* = \inf\{Y\}$  равны, то их общее значение  $V$  называется объемом тела ( $V$ ), а тело ( $V$ ) кубируемым.

Это определение, как и следующие далее утверждения, аналогичны дан-

ным выше для квадратуемости и площади фигур. Все фигуры ( $P$ ), приведенные ранее в примерах, можно преобразовать в тела ( $V$ ), поместив их в трехмерное пространство с декартовой прямоугольной системой координат  $Oxyz$ , например в плоскость  $Oxy$ , и добавив к уравнениям фигур условие  $0 \leq z \leq 1$ . Построенные таким образом цилиндрические тела ( $V$ ) будут служить примерами к определениям и утверждениям, аналогичным тем, к которым относились их прототипы ( $P$ ). Мы постараемся не дублировать примеры и несколько изменить подход к их построению.

Постараемся расширить область применимости определения, снимая отдельные его предположения. Сначала попробуем отказаться от ограниченности тела. Приведем контрпример.

**9.26\*, 9.27\*. Неограниченная (некубируемая) и ограниченная (кубируемая) области, составленные из счетного множества кубов.** Построим тело ( $V$ ) в виде «башни», из счетного множества замкнутых кубов ( $C_n$ ),  $n = 1, 2, \dots$ , поставленных друг на друга (рис. 9.11, а). «Башню» поставим на плоскость  $Oxy$  и ориентируем в по-

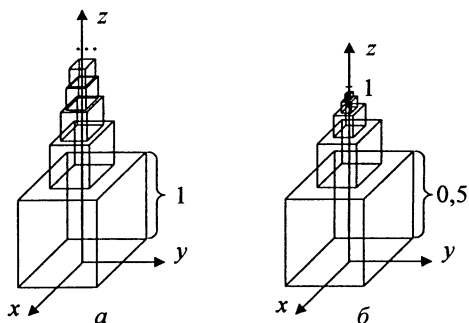


Рис. 9.11

ложительном направлении оси  $Oz$ . Грани всех кубов параллельны координатным плоскостям, центры кубов лежат на оси  $Oz$ . Длины ребер  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , последовательных кубов ( $C_n$ ) соответ-

ствуют членам гармонического числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Так как гармо-

нический ряд расходится, то тело будет неограниченным. Однако суммарный объем кубов будет выражаться суммой сходящегося числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ , т.е. будет конечным числом, см. [2], т. II, с. 16.

Указанные в определении многогранники  $(X)$  объема  $X$ , целиком содержащиеся в теле  $(V)$  (ограниченные по отдельности, но неограниченные в совокупности), мы можем строить и, очевидно, точная верхняя граница  $V_*$  для  $X$  будет равна сумме ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ . Но многогранники  $(Y)$ , целиком содержащие в себе построенное нами тело  $(V)$ , будут неограниченными и соответственно либо будут содержать счетное множество граней и ребер, либо иметь бесконечный объем. В последнем случае (число граней конечно) должны существовать неограниченные грани, не менее трех, параллельные оси  $Oz$ , а значит, объем  $Y$  будет бесконечен. Корректность определения нарушается.

Построим тело  $(V)$  в виде «башни» с теми же предположениями, но примем длины ребер последовательных замкнутых кубов  $(C_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , равными  $a_n = \frac{1}{2^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда высота башни будет конечной, равной  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$  (рис. 9.11, б), и определение объема будет применимо к такому телу. Ниже кубируемость этого тела будет установлена.

Откажемся от замкнутости тела и покажем, что это требование в определенных случаях может быть отброшено без потери корректности определения. Приведем контрпримеры.

**9.28. Открытая кубируемая область.** Рассмотрим открытый куб  $0 < x, y, z < 1$  с объемом, равным единице. В качестве многогранников  $(X)$  объема  $X$ , целиком содержащихся в данном теле  $(V)$ , можно рассматривать кубы, концентрические данному, с длиной ребра  $a$ :  $1 > a > \sqrt[3]{1 - \frac{\varepsilon}{2}}$ , где число  $1 > \varepsilon > 0$  произвольно, при этом  $1 > X > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ . В качестве многогранников  $(Y)$  объема  $Y$ , целиком содержащих в себе данное тело  $(V)$ , можно рассматривать кубы, концентрические данному, с длиной ребра  $b$ :  $1 < b < \sqrt[3]{1 + \frac{\varepsilon}{2}}$ , где число  $\varepsilon > 0$  произвольно, при этом  $1 < Y < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ . Очевидно, что ве-

личины  $V_* = \sup\{X\}$  и  $V^* = \inf\{Y\}$  совпадают, и их общее значение  $V = 1$ .

Приведем пример ограниченного множества точек, не имеющего объема.

**9.29. Ограниченное некубируемое множество точек.** Определим множество точек  $(V)$ :

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 1 + D\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right).$$

Легко заметить, что все точки, расстояние которых от точки  $(0, 0, 0)$  иррационально и не превышает единицы, принадлежат  $(V)$ ; также принадлежат  $(V)$  все точки, имеющие рациональное расстояние от точки  $(0, 0, 0)$ , которое не превышает двух. Иными словами,  $(V)$  это объединение замкнутого шара  $B_1$  единичного радиуса с центром в точке  $(0, 0, 0)$  и сфер с центрами в  $(0, 0, 0)$  с рациональными радиусами  $R$ ,  $1 < R \leq 2$ . Ясно, что многогранники  $(X)$ , целиком содержащиеся в  $(V)$ , не могут выходить за пределы шара  $B_1$ , а многогранники  $(Y)$ , целиком содержащиеся в себе  $(V)$ , не могут входить внутрь шара  $B_2$  с центром в  $(0, 0, 0)$  радиуса два. Это объясняется тем, что в множестве точек  $1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2$  как точки множества  $(V)$ , так и точки, не принадлежащие этому множеству, располагаются (по отдельности) плотно. Исходя из кубируемости шаров, получаем, что точная верхняя грань  $V_*$  для  $X$  равна объему шара  $B_1$ , т.е.  $V_* = \sup\{X\} = \frac{4}{3}\pi$ , а точная нижняя грань  $V^*$  для  $Y$  равна объему шара  $B_2$ , т.е.  $V^* = \inf\{Y\} = \frac{32}{3}\pi$ . Видим, что  $V_* \neq V^*$ , и множество  $(V)$  не имеет объема.

**Критерий 1 кубируемости тела.** Для существования объема тела необходимо и достаточно, чтобы для любого числа  $\varepsilon > 0$  нашлись (в обозначениях определения) два таких многогранника  $(X)$  и  $(Y)$ , что  $Y - X < \varepsilon$ .

Проверим применимость этого критерия к построенным выше телам.

**9.30. Пример применения критерия 1 кубируемости.** В примере 9.28 описаны многогранники:  $(X)$ , целиком содержащийся в теле  $(V)$ , и  $(Y)$ , целиком содержащий тело  $(V)$ , при этом  $X > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ , а  $Y < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ . Почленно умножая первое неравенство на  $-1$  и склады-

вая со вторым, получаем  $Y - X < \varepsilon$ . Следовательно, тело из примера 9.28 кубируемое.

**9.31. Область, составленная из счетного множества кубов, кубируемость которой устанавливается критерием 1.** Рассмотрим тело  $(V)$  из примера 9.27. В качестве многогранника  $(X_m)$ , содержащегося в  $(V)$ , рассмотрим объединение  $m$  первых снизу кубов, его объем составит  $X_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^{3n}}$ . В качестве многогранника  $(Y_m)$ , содержащего  $(V)$ , рассмотрим объединение  $m$  первых кубов с параллелепипедом  $(\Pi_m)$ , построенном на основании  $m$ -го куба, и с высотой, равной 1. Объем этого многогранника составит  $Y_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{2^{2m}}$ . Получим  $Y_m - X_m = \frac{1}{2^{2m}}$ . Для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $m$ , что  $\frac{1}{2^{2m}} < \varepsilon$ , т.е.  $Y_m - X_m < \varepsilon$ . Следовательно, тело  $(V)$  кубируемо.

**9.32. Множество точек, некубируемость которого устанавливается критерием 1.** Для множества точек из примера 9.29 оценка  $Y - X < \varepsilon$  невыполнима уже для  $\varepsilon < \frac{32}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi = \frac{28}{3}\pi$ . Согласно утверждению, множество точек из примера 9.29 не кубируемое.

**Критерий 2 кубируемости тела.** Для того чтобы тело  $(V)$  было кубируемо, необходимо и достаточно, чтобы его граница  $(S)$  имела объем, равный нулю. Граница  $(S)$  имеет равный нулю объем, если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует многогранное тело  $(T)$ , содержащее  $(S)$  и имеющее объем  $T < \varepsilon$ .

Рассмотрим применимость критерия к построенным выше телам.

**9.33, 9.34\*, 9.35. Примеры использования критерия 2 для установления кубируемости и некубируемости множеств.** Для тела  $(V)$  из примеров 9.28 и 9.30 построение многогранного тела  $(T)$ , заключающего в себе поверхность  $(S)$ , выполняется тривиально, так как многогранник  $(X)$  вместе со своей границей лежит внутри многогранника  $(Y)$ . А именно, можно положить  $(T) = \overline{(Y)} \setminus \overline{(X)}$ . Затем можно использовать полученные для объемов  $Y$  и  $X$  оценки:  $Y < 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $X > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ . Очевидно,  $T = Y - X < \varepsilon$ , т.е. объем границы

( $S$ ) равен нулю. Откуда, согласно утверждению, следует кубиреуемость тела ( $V$ ).

Для тела ( $V$ ) из примеров 9.27 и 9.31 многогранное тело ( $T$ ) также зададим в виде  $(T) = \overline{(Y'_m)} \setminus \overline{(X'_m)}$ . Многогранник ( $Y'_m$ ), содержащий ( $V$ ), построим следующим образом. Для каждого замкнутого куба ( $C_n$ ),  $n = 1, 2, \dots$ , входящего в тело ( $V$ ), построим концентрический ему (большого размера) куб ( $C_n^Y$ ) с длиной ребра  $\frac{1}{2^n} \sqrt[3]{1+\delta}$ ,  $\delta > 0$ , и положим  $(Y'_m) = \bigcup_{n=1}^m (C_n^Y) \cup (\Pi_m)$ , где  $(\Pi_m)$  это параллелепипед, построенный на основании куба ( $C_m$ ) и с высотой, равной 1. Очевидно, что

$$Y'_m < (1+\delta) \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{2^{2m}},$$

так как соседние (увеличенные) кубы пересекаются. Многогранник ( $X'_m$ ), содержащийся в ( $V$ ), построим следующим образом. Для каждого замкнутого куба ( $C_n$ ),  $n = 1, 2, \dots$ , построим концентрический ему (меньшего размера) куб ( $C_n^X$ ) с длиной ребра  $\frac{1}{2^n} \sqrt[3]{1-\delta}$ ,

$0 < \delta < 1$ , и положим  $(X'_m) = \bigcup_{n=1}^m (C_n^X)$ . Объем ( $X'_m$ ) равен

$$X'_m = (1-\delta) \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^{3n}}.$$

Отсюда, объем  $T$  многогранного тела ( $T$ ) будет иметь следующую оценку  $T = Y'_m - X'_m < 2\delta \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{2^{2m}} < 2\delta S + \frac{1}{2^{2m}}$ , где  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}}$ .

Для любого  $0 < \varepsilon < 4S$  достаточно взять  $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4S}$  и  $m$  такое, что

$$\frac{1}{2^{2m}} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ чтобы выполнялось } T < \varepsilon. \text{ Тело } (V) \text{ кубиреуемо.}$$

Для множества точек ( $V$ ) из примеров 9.29 и 9.32 граница ( $S$ ), т.е. множество точек, в любой окрестности которых находятся как точки ( $V$ ), так и точки, не принадлежащие ( $V$ ), не является поверхностью. Множество ( $S$ ) в этом случае является областью (замкнутой), заключенной между двумя концентрическими сферами, и име-

ет объем, больший нуля. Множество  $(V)$  из примеров 9.29 и 9.32 не является кубируемым.

**Достаточное условие кубируемости тела.** Если граница  $(S)$  тела  $(V)$  составлена из нескольких непрерывных поверхностей, определяемых (по отдельности) некоторыми явными уравнениями  $z = f(x, y)$ ,  $y = g(z, x)$  или  $x = h(y, z)$ , где  $f(x, y)$ ,  $g(z, x)$ ,  $h(y, z)$  – непрерывные функции от двух аргументов в некоторых ограниченных областях, то тело  $(V)$  кубируемо.

Сначала приведем простой иллюстративный пример выполнения достаточного условия.

**9.36. Пример применения достаточного условия кубируемости.** Граница тела из примера 9.28 задается непрерывными функциями (константами)  $z = 0$  и  $z = 1$ ,  $y = 0$  и  $y = 1$ ,  $x = 0$  и  $x = 1$  от двух аргументов, определенными соответственно на квадратах  $0 \leq x, y \leq 1$ ,  $0 \leq x, z \leq 1$ ,  $0 \leq y, z \leq 1$ . Отсюда следует кубируемость.

Приведем пример тела, имеющего объем, но не удовлетворяющего данному достаточному условию.

**9.37. Кубируемая область, к которой неприменимо достаточное условие кубируемости.** Границы тела  $(V)$  из примера 9.27 нельзя, по самому построению  $(V)$ , задать в виде конечного числа непрерывных функций двух аргументов. Однако тело является кубируемым.

Множество точек, не имеющее объема, естественно, не подчиняется достаточному условию. Пример.

**9.38. Множество, граница которого не является поверхностью, к которому неприменимо достаточное условие кубируемости.** Множество из примера 9.29 имеет границу, которая не является поверхностью и не подчиняется требованиям утверждения.

**Свойство аддитивности объема.** Предположим, что тело  $(V)$  разложено на два тела  $(V_1)$  и  $(V_2)$ , которые не имеют общих внутренних точек, но границы которых могут иметь общую часть. Тогда из кубируемости любых двух из трех тел  $(V)$ ,  $(V_1)$  и  $(V_2)$  следует кубируемость третьего, и выполняется  $V = V_1 + V_2$ .

Свойство аддитивности может быть в некоторых случаях применено не только при разложении тела на конечное множество тел, но и на их счетное множество. Пример.

**9.39. Пример счетной аддитивности объема тела.** Тело  $(V)$  из



примеров 9.27 и 9.31 составлено из счетного множества кубов. Было показано, что оно кубируемо. Сумма объемов кубов  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} = \frac{1}{7}$ . В примере 9.41 будет показано, что объем тела  $(V)$  равен  $V = \frac{1}{7}$ .

Однако переносить свойство аддитивности на все случаи разложения тел на счетное множество частей (тел) нельзя. Контрпример.

**9.40. Пример невыполнимости счетной аддитивности объема.** Рассмотрим множество точек  $(V)$  из примера 9.29, которое суть объединение замкнутого шара единичного радиуса с центром в точке  $(0, 0, 0)$  и концентрических ему сфер с рациональными радиусами  $R$ ,  $1 < R \leq 2$ . Объем единичного шара равен  $\frac{4}{3}\pi$ , а объемы указанных сфер равны нулю. Если принять свойство счетной аддитивности, то получаем, что множество точек  $(V)$  имеет объем  $V = \frac{4}{3}\pi$ . Но выше было показано, что данное множество не имеет объема.

**Критерий 3 кубируемости тела.** Для кубируемости тела  $(V)$  необходимо и достаточно, чтобы существовали две последовательности многогранников  $\{(X_n)\}$  и  $\{(Y_n)\}$ , содержащихся в  $(V)$  и содержащих  $(V)$ , соответственно, такие, что две последовательности  $\{X_n\}$  и  $\{Y_n\}$ , составленные из их объемов, имели бы общий предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = V$ . Этот общий предел, если он существует, равен объему тела  $(V)$ .

Приведем иллюстративный пример применения критерия.

**9.41. Пример использования критерия 3 к установлению кубируемости области и вычислению ее объема.** Рассмотрим тело  $(V)$  из примеров 9.27 и 9.31. В качестве членов последовательности  $\{(X_n)\}$  рассмотрим следующие  $(X_1) = (C_1)$ ,  $(X_2) = (C_1) \cup (C_2)$ , ...,  $(X_n) = (C_1) \cup (C_2) \cup \dots \cup (C_n)$ , ..., где  $(C_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , – замкнутые кубы, определенные в примере 9.27. Объемы этих многогранников составят последовательность

$$X_1 = \frac{1}{2^3}, X_2 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{3 \cdot 2}}, X_3 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{3 \cdot 2}} + \frac{1}{2^{3 \cdot 3}}, \dots$$

Пределом этой последовательности будет сумма бесконечной геометрической прогрессии  $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n}} = \frac{1}{7}$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \frac{1}{7}$ .

Примем членами последовательности  $\{(Y_n)\}$ :  $(Y_1) = (C_1) \cup (\Pi_1)$ ,  $(Y_2) = (C_1) \cup (C_2) \cup (\Pi_2)$ , ...,  $(Y_n) = (C_1) \cup (C_2) \cup \dots \cup (C_n) \cup (\Pi_n)$ , ..., где  $(\Pi_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , замкнутые параллелепипеды, построение которых описано в примере 9.31. Объемы многогранников  $\{(Y_n)\}$  составят последовательность

$$Y_1 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2}, Y_2 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{3 \cdot 2}} + \frac{1}{2^{2 \cdot 2}}, Y_3 = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^{3 \cdot 2}} + \frac{1}{2^{3 \cdot 3}} + \frac{1}{2^{2 \cdot 3}}, \dots$$

Видим, что  $Y_n - X_n = \Pi_n$ , где  $\Pi_n$  — объем параллелепипеда  $(\Pi_n)$ .

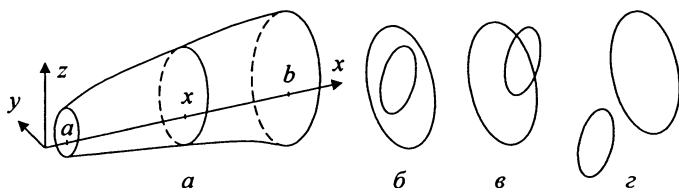


Рис. 9.12

Так как объем  $\Pi_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \frac{1}{7}$ . Следовательно, объем тела  $(V)$  равен  $\frac{1}{7}$ .

**Выражение объема интегралом.** Предположим, что тело  $(V)$  заключено между плоскостями  $x = a$  и  $x = b$ , рассмотрим его сечения плоскостями, перпендикулярными к оси  $x$  (рис. 9.12, а). Пусть все эти сечения квадратуемы и пусть  $P(x)$  — площадь сечения, отвечающего абсциссе  $x$ , является непрерывной функцией от  $x$ ,  $x \in [a, b]$ . И пусть два любых сечения, спроектированные на перпендикулярную к оси  $x$  плоскость, содержатся одно в другом (рис. 9.12, б); т.е. случаи, когда сечения частично пересекаются или не пересекаются (рис. 9.12, в, г), не допускаются. Тогда тело кубуруемо и имеет объем, который выражается интегралом  $V = \int_a^b P(x) dx$ .

Покажем, что отдельные предположения данного утверждения не являются необходимыми для существования объема тела и вычисления его с помощью приведенной формулы. Начнем с непрерывности функции  $P(x)$ .

**9.42.** Кубируемая область, у которой площади параллельных плоских сечений выражаются разрывной функцией  $P(x)$ , но объем равен интегралу  $\int_a^b P(x) dx$ . Рассмотрим тело  $(V)$ , опреде-

ляемое неравенством  $y^2 + z^2 \leq [x]^2$ , где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ ,  $1 \leq x \leq 4,5$  (рис. 9.13, а). Тело представляет собой объединение четырех замкнутых цилиндров с общей осью  $Ox$ , имеющих радиусы, равные 1, 2, 3 и 4. Это тело является кубируемым, все его сечения плоскостями, перпендикулярными к оси  $Ox$ , квадратуемы, площади сечений (кругов) выражаются ступенчатой (интегрируемой) функцией  $P(x)$ , равной:  $\pi$ , если  $1 \leq x < 2$ ;  $4\pi$ , если  $2 \leq x < 3$ ;  $9\pi$ , если  $3 \leq x < 4$ ;  $16\pi$ , если  $4 \leq x < 4,5$ . Два различных сечения, будучи спроектированы на плоскость, перпендикулярную к оси  $Ox$ , оказываются всегда содержащимися одно в другом. Объем тела ( $V$ ) вы-

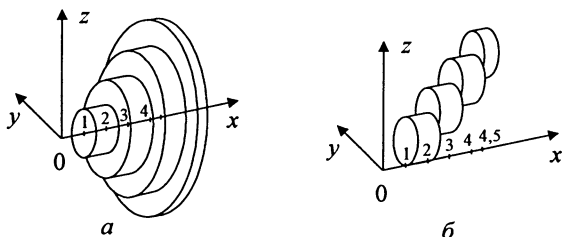


Рис. 9.13

ражается формулой  $V = \int_1^{4,5} P(x) dx$ . Но не все предположения утверждения выполняются. Площадь  $P(x)$  сечения, отвечающего абсциссе  $x$ , не является непрерывной функцией от  $x$  (для  $1 \leq x \leq 4,5$ ).

Построим более сильный контрпример с нарушением непрерывности функции  $P(x)$  в точках, расположенных всюду плотно на отрезке определения этой функции.

**9.43.** Кубируемое множество, у которого площади параллельных плоских сечений выражаются функцией  $P(x)$  с плотным множеством точек разрыва, но объем равен интегралу  $\int_a^b P(x) dx$ . Рассмотрим множество ( $V$ ) точек

$$y^2 + z^2 \leq 1 + R(x),$$

где  $R(x)$  – функция Римана,  $0 \leq x \leq 1$ . Все сечения этого множества плоскостями, перпендикулярными к оси  $Ox$ , (это круги) квадратуемы. Любые два различных сечения, будучи спроектированы на

плоскость, перпендикулярную к оси  $Ox$ , оказываются содержащими одно в другом. Нарушается только одно предположение, что площадь сечения, отвечающего абсциссе  $x$ , непрерывная функцией от  $x$  (для  $0 \leq x \leq 1$ ). Действительно, функция Римана разрывна при любом рациональном значении  $x$ . В то же время функция  $P(x) = \pi(1 + R(x))$  интегрируема как ограниченная и имеющая счетное множество точек разрыва, а построенное множество  $(V)$  кубическое. Покажем последнее. Множество  $(V)$  – это объединение замкнутого цилиндра  $y^2 + z^2 \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , и счетного множества плоских колец  $1 < y^2 + z^2 \leq 1 + R(x)$ , где  $x$  – рациональное число,  $0 \leq x \leq 1$ . Граница  $(S)$  множества  $(V)$  это объединение поверхности цилиндра, обозначим ее  $(C)$ , и счетного множества описанных выше плоских колец, обозначим его  $(K)$ . Для доказательства кубичности множества  $(V)$  достаточно, согласно критерию 2, показать, что его граница  $(C) \cup (K)$  имеет нулевой объем. Для этого воспользуемся свойством аддитивности объема. Так как кубичность цилиндра известна, то объем поверхности  $(C)$  равен нулю. Остается показать, что объем множества  $(K)$  также равен нулю. Напомним (см. пример 9.6), что функция Римана определена так, что для любого  $\varepsilon > 0$  пусто, или конечно, множество точек  $x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , для которых  $R(x) > \frac{\varepsilon}{2\pi}$ . Поэтому все кольца из множества  $(K)$ , кроме разве что конечного их числа, оказываются заключенными между поверхностями  $y^2 + z^2 = 1$  и  $y^2 + z^2 = 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , двух цилиндров. Объем  $V_1$ , заключенный между этими поверхностями, равен  $V_1 = \pi \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \right) - \pi = \frac{\varepsilon}{2}$ . Оставшееся конечное множество  $n_k = n_k(\varepsilon)$ , зависящее от  $\varepsilon$ , плоских колец всегда может быть заключено в  $n_k$  равных замкнутых цилиндров с осями  $Ox$  радиусом  $\sqrt{2}$  и с высотой  $h < \frac{\varepsilon}{4\pi n_k}$ . Их суммарный объем  $V_2 = n_k \pi 2h < \frac{\varepsilon}{2}$ . Таким образом, мы заключили все множество  $(K)$  в кубическое множество с объемом, меньшим  $\varepsilon$ . В силу произвольности  $\varepsilon > 0$  и того факта (следует из свойства аддитивности объема), что объем части тела не превышает объема всего тела, получаем, что объем множества  $(K)$  ра-

вен нулю. Кубируемость множества  $(V)$  доказана. Очевидно, что объем множества  $(V)$  равен объему цилиндра  $y^2 + z^2 \leq 1, 0 \leq x \leq 1$ ,

$$V = \pi, \text{ и } \int_0^1 P(x) dx = \int_0^1 \pi(1 + R(x)) dx = \pi.$$

Рассмотрим контрпример, в котором тело имеет различные сечения, спроектированные на плоскость, перпендикулярную к оси  $Ox$ , не всегда содержащиеся одно в другом.

**9.44. Кубируемая область, у которой параллельные плоские сечения, спроектированные на параллельную им плоскость, не всегда содержатся одно в другом, но объем равен интегралу**

$\int_a^b P(x) dx$ . Рассмотрим тело  $(V)$ , определяемое неравенством

$$y^2 + (z - [x])^2 \leq 1, \text{ где } [x] - \text{целая часть числа } x, 1 \leq x \leq 4,5 \text{ (рис. 9.13, б).}$$

Тело представляет собой объединение четырех замкнутых цилиндров с единичными радиусами, оси которых параллельны оси  $Ox$  и последовательно смещаются на единицу по оси  $Oz$ . Все предположение утверждения выполняются, включая непрерывность функции  $P(x)$ , кроме предположения о взаимном расположении проекций сечений тела на плоскость, перпендикулярную оси  $Ox$ .

Однако объем тела  $(V)$  существует и  $V = \int_1^{4,5} P(x) dx$ .

Наконец допустим, что некоторые сечения тела могут не быть квадратуемыми. Приведем контрпример.

**9.45. Кубируемая область, у которой некоторые из параллельных плоских сечений неквадриюемы, но объем равен интегралу**

$\int_a^b P(x) dx$ . Множество точек  $(V)$ :

$$\sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x, y, z), \text{ где } f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ дробное число,} \\ D\left(\sqrt{y^2 + z^2}\right), & \text{если } x \text{ целое,} \end{cases}$$

$D(t)$  — функция Дирихле,  $0 \leq x \leq 3$ . Это множество представляет собой при  $0 < x < 1$ ,  $1 < x < 2$  и  $2 < x < 3$  цилиндры с осью  $Ox$  и радиусом 1. В плоскостях  $x = 0, 1, 2, 3$  это есть множества окружностей рационального радиуса  $r, 0 \leq r \leq 1$ , с центрами на оси  $Ox$ . Заметим, что в плоскостях (сечениях)  $x = 0, 1, 2, 3$  границы множеств

точек, принадлежащих  $(V)$ , совпадают с кругами  $\sqrt{y^2 + z^2} \leq 1$  и имеют площадь, равную  $\pi > 0$ . Отсюда сечения множества  $(V)$  плоскостями  $x = 0, 1, 2, 3$  не являются квадратуемыми. По этой причине функция  $P(x)$  не определена в точках  $x = 0, 1, 2, 3$  и интеграл также не определен. Однако множество  $(V)$  является кубируемым. Для доказательства этого факта покажем, что граница  $(S)$  множества  $(V)$  имеет нулевой объем. Граница  $(S)$  состоит из боковой поверхности  $\sqrt{y^2 + z^2} = 1, 0 \leq x \leq 3$ , цилиндра и четырех кругов  $\sqrt{y^2 + z^2} \leq 1, x = 0, 1, 2, 3$ . В силу кубируемости произвольного ограниченного цилиндра объем его поверхности равен нулю. Отсюда и из аддитивности объема следует, что объем любого круга и объем боковой поверхности любого ограниченного цилиндра равны нулю. Следовательно, граница  $(S)$  множества  $(V)$  имеет нулевой объем и  $(V)$  кубируемое. Разложим данное множество точек плоскостями  $x = 0, 1, 2, 3$  на три множества, их кубируемость можно показать аналогично. Используем свойство аддитивности объема и применим утверждение к каждому множеству отдельно, т.е. выразим их объемы интегралами, которые затем, используя свойство интеграла, суммируем и получим

$$V = \int_0^1 P(x) dx + \int_1^2 P(x) dx + \int_2^3 P(x) dx = \int_0^3 P(x) dx = 3\pi.$$

Приведенные примеры подвигают к усилению утверждения. Это можно сделать через более тонкую регламентацию случаев: разрывности функции  $P(x)$ ; взаимного расположения упомянутых сечений; отсутствия квадратуемости некоторых сечений. Однако полное удаление предположения о непрерывности  $P(x)$ , либо требования к взаимному расположению сечений, либо условия квадратуемости сечений приводит к неверным утверждениям. Построим контрпримеры.

**9.46. Множество точек, у которого площади параллельных плоских сечений выражаются всюду разрывной функцией  $P(x)$  и которое некубируемо. Множество точек  $(V)$ :**

$$y^2 + z^2 \leq (1 + D(x))^2,$$

где  $D(x)$  – функция Дирихле,  $0 \leq x \leq 1$ . Все сечения этого множества плоскостями, перпендикулярными к оси  $Ox$ , квадратуемы (это круги с радиусами 1 и 2). Любые два различных сечения, спроектированные на плоскость, перпендикулярную к оси  $Ox$ , содержатся

одно в другом. Нарушается только предположение о том, что площадь сечения  $P(x)$ , отвечающего абсциссе  $x$ , непрерывная функция от  $x$ . Функция  $P(x) = \pi(1 + D(x))^2$  всюду разрывна на отрезке  $[0, 1]$ , это следует из разрывности всюду функции Дирихле. Интеграл  $\int_0^1 P(x) dx = \pi \int_0^1 (1 + D(x))^2 dx$  не существует, так как подынтегральная функция на любом отрезке принимает значения 1 и 4.

Покажем, что множество  $(V)$  не является кубируемым. Граница  $(S)$  множества  $(V)$  представляет собой замыкание множества точек, лежащих между поверхностями двух цилиндров  $y^2 + z^2 \leq 1$  и  $y^2 + z^2 \leq 4$ ,  $0 \leq x \leq 1$  (точка  $(x, y, z)$  принадлежит первому цилиндру при иррациональных и второму цилиндру при рациональных значениях  $x$ ). В силу кубируемости цилиндров и свойства аддитивности объема получаем, что граница  $(S)$  множества  $(V)$  имеет объем, больший нуля. Отсюда следует, что множество  $(V)$  не является кубируемым.

**9.47. Множество точек, у которого параллельные плоские сечения, спроектированные на параллельную им плоскость, не всегда содержатся одно в другом, и которое некубируемо.** Множество точек  $(V)$ :  $y^2 + (z - D(x))^2 \leq 1$ , где  $D(x)$  – функция Дирихле,  $0 \leq x \leq 1$ . Все сечения этого множества плоскостями, перпендикулярными к оси  $Ox$ , квадратуемы (это круги с радиусом 1). Площадь  $P(x) = \pi$  сечения, отвечающего абсциссе  $x$ , непрерывная функция от  $x$ . Однако два различных сечения, спроектированные на плоскость, перпендикулярную к оси  $Ox$ , не обязательно содержатся одно в другом. Интеграл  $\int_0^1 P(x) dx$  существует, но он не выражает объем множества  $(V)$ , так как  $(V)$  не имеет объема. Покажем, что множество  $(V)$  не кубируемое. Граница  $(S)$  множества  $(V)$  представляет собой симметрическую разность двух цилиндров  $y^2 + z^2 \leq 1$  и  $y^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$  (точка  $(x, y, z)$  принадлежит первому цилиндру при иррациональных и второму цилиндру при рациональных значениях  $x$ ). Очевидно, объем границы  $(S)$  множества  $(V)$  больше нуля, и  $(V)$  не имеет объема.

**9.48. Множество точек, у которого параллельные плоские сечения неквадрируемы и которое некубируемо.** Пусть  $(V)$ :

$$\sqrt{y^2 + z^2} \leq 1 + D(\sqrt{y^2 + z^2}), \quad (9.4)$$

где  $D(t)$  – функция Дирихле,  $0 \leq x \leq 1$ . Неравенство (9.4) не содержит переменной  $x$ , поэтому множества (сечения)  $M_x$ , состоящее из точек  $(V)$ , принадлежащих плоскостям  $x = \text{const}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , одинаковы. Отсюда выполняется условие: два различных сечения, будучи спроектированы на плоскость, перпендикулярную к оси  $x$ , оказываются всегда содержащимися одно в другом (в данном случае они будут совпадать). Если сечения были бы квадратуемы, то функция  $P(x)$  (в таком случае константа) была бы непрерывна. Сечение  $M_x$  представляет собой объединение замкнутого круга  $\sqrt{y^2 + z^2} \leq 1$  и концентрических ему окружностей с рациональными радиусами  $r$ ,  $1 < r \leq 2$ . Граница множества (сечения)  $M_x$ , таким образом, есть замкнутое кольцо  $1 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq 2$ , ее площадь больше нуля. Отсюда сечение не является квадратуемым. Покажем, что множество  $(V)$  не имеет объема. Граница  $(S)$  множества  $(V)$  представляет собой замыкание множества точек, лежащих между поверхностями цилиндров  $\sqrt{y^2 + z^2} \leq 1$  и  $\sqrt{y^2 + z^2} \leq 2$ ,  $0 \leq x \leq 1$  (точка  $(x, y, z)$  принадлежит первому цилиндру при иррациональных, и второму цилиндру при рациональных значениях величины  $\sqrt{y^2 + z^2}$ ). Видим, что объем границы  $(S)$  множества  $(V)$  больше нуля, и  $(V)$  не является кубируемым.

### 9.3. Длина кривой

**Определение длины кривой.** Пусть на плоскости незамкнутая кривая  $AB$  задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (9.5)$$

где функции  $\varphi$  и  $\psi$  непрерывны, и нет кратных точек, т.е. различным значениям параметра  $t$  отвечают различные точки кривой. Выберем на отрезке  $[t_0, T]$  конечное множество различных точек  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = T$ ,  $m \geq 1$ , которое назовем разбиением этого отрезка и обозначим  $\tau$ . Разбиение  $\tau$  однозначно задает различные точки  $A = M_0, M_1, M_2, \dots, M_m = B$  кривой, точка  $M_i$  определяется уравнениями (9.5) при  $t = t_i$ ,  $i = 0, m$ . Длину ломаной  $AM_1M_2 \dots B$ , заданной разбиением  $\tau$  (ее называют вписанной в кривую  $AB$ ), обозначим  $p_\tau$ .

Величина  $s = \sup_\tau p_\tau$ , где точная верхняя грань берется по всем возмож-



ным разбиениям  $\tau$  отрезка  $[t_0, T]$ , называется длиной кривой  $AB$ , обозначается  $\overset{\cup}{AB}$ . Если  $s < +\infty$ , то кривая  $AB$  называется спрямляемой.

В определении спрямляемость предполагает конечное значение  $s$ . Однако даже достаточно просто определяемые на конечном отрезке  $t_0 \leq t \leq T$  ограниченные кривые могут иметь бесконечную длину. Приведем пример.

**9.49\*. Ограниченная неспрямляемая кривая.** Рассмотрим график функции  $y = f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} -\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ . Он является смещенной на единицу по оси  $Oy$  частью границы области из примера 9.1 (см. рис. 9.1, б). Этот график можно записать в параметрической форме, приняв  $x = t$ ,  $y = f(t)$ ,  $-\frac{1}{\pi} \leq t \leq \frac{1}{\pi}$ . Отметим, что обе функции непрерывны. Покажем, что длина этого графика (кривой) бесконечна. Так как функция  $y = f(t)$  четная, то достаточно показать это для  $AB$  – правой половины графика при  $0 \leq t \leq \frac{1}{\pi}$ . Рассмотрим любую часть (дугу)  $CD$  кривой  $AB$ , лежащую между

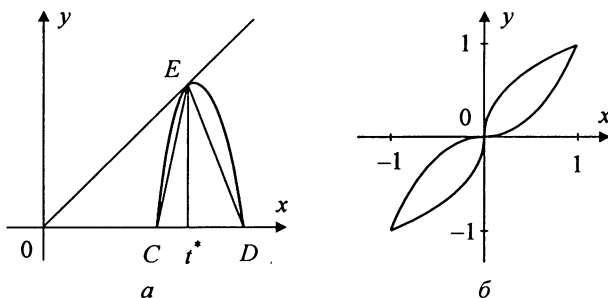


Рис. 9.14

двумя соседними нулями функции  $y = f(t)$  (рис. 9.14, а). Части  $CD$  отвечает некоторый отрезок знакопостоянства функции. Рассмотрим точку  $t^*$  этого отрезка, в которой достигается одно из значений  $\sin \frac{1}{t^*} = \pm 1$ . Соответственно функция в такой точке равна  $f(t^*) = \pm t^*$ . Обозначим  $E$  точку части  $CD$  кривой, в которой  $x = t^*$ ,  $y = f(t^*)$ . Очевидно, что длина  $\overset{\cup}{CD}$  части  $CD$  кривой  $AB$  больше,

чем сумма длин хорд  $CE + ED$ . В свою очередь, заведомо  $CE + ED > |f(t^*)|$ . Отсюда  $\bigcup CD > |f(t^*)| = t^*$ . Все множество таких

точек  $t^*$  записывается формулой  $t_k = \frac{1}{\pi/2 + \pi k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Следовательно, длина всей кривой  $AB$  может быть оценена снизу суммой величин  $t_k$  для любого конечного числа первых справа  $m$  отрезков

знакопостоянства функции на  $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$ , т.е. выполняется

$$AB > \sum_{k=1}^m t_k = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\pi/2 + \pi k} > \sum_{k=1}^m \frac{1}{\pi(1+k)} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^m \frac{1}{k}.$$

Но при  $m \rightarrow \infty$  величина  $\frac{1}{\pi} \sum_{k=2}^m \frac{1}{k}$  неограниченно возрастает, в силу расходимости гармонического ряда. Следовательно, длина кривой  $AB$  и всего графика функции бесконечна.

Существуют ограниченные кривые, у которых каждая часть, заключенная между любыми двумя их точками, имеет бесконечную длину.

**9.50. Ограниченная кривая, любая часть (дуга) которой не является спрямляемой.** Снежинка Коха, см. пример 9.19, является такой кривой. Она служит предельной кривой для равномерно сходящейся последовательности вписанных в нее ломаных (все вершины ломаной, полученной на любом шаге построения, лежат на снежинке Коха). На каждом шаге построения снежинки мы заменяем среднюю треть каждого отрезка ранее построенной ломаной (все они равны) на два отрезка, равных этой трети. Таким образом, на

каждом шаге длина вписанной ломаной увеличивается в  $\frac{4}{3}$  раза и,

следовательно, является неограниченной при неограниченном выполнении итерационного процесса. Длина предельной кривой оценивается снизу длинами вписанных в нее ломаных. Так как длины вписанных ломаных при неограниченном увеличении числа их отрезков (при стремлении длин отрезков к нулю) стремятся к бесконечности, то длина снежинки Коха бесконечна. Более того, длина любой ее части также бесконечна. Это объясняется тем, что итерационный процесс построения вписанной ломаной выполняется для каждого отрезка ломаной (как бы мал он ни был) так же, как и для исходного отрезка (стороны треугольника).

**Лемма о хорде.** Рассмотрим незамкнутую кривую (9.5) без кратных то-

чек. Пусть точки  $M'$  и  $M''$  отвечают значениям  $t'$  и  $t''$  параметра ( $t' < t''$ ). Тогда: 1) для любого числа  $\delta > 0$  найдется такое число  $\eta > 0$ , что при  $t'' - t' < \eta$  длина хорды  $\overline{M'M''} < \delta$ ; 2) для любого числа  $\eta > 0$  существует такое число  $\delta > 0$ , что если  $\overline{M'M''} < \delta$ , то  $t'' - t' < \eta$ .

Покажем, что предположение о непрерывности функций в (9.5), задающих кривую, не может быть отброшено, иначе лемма становится несправедливой. Приведем контрпримеры.

**9.51, 9.52. Кривые (параметрически заданные разрывными функциями), для которых заключения леммы о хорде несправедливы.** Пусть кривая задана уравнениями  $x = t$ ,  $y = [t]$ ,  $0,5 \leq t \leq 1,5$ ; где функция  $y = [t]$  означает целую часть числа  $t$ . В точке  $t = 1$  имеем разрыв у этой функции. Ясно, что если  $1 > \delta > 0$ , то при любых  $\eta > 0$  для  $t'$  и  $t''$  таких, что  $t' < 1$ ,  $t'' > 1$  и  $t'' - t' < \eta$ , не может выполняться неравенство  $\overline{M'M''} < \delta$ .

Пусть кривая задана уравнениями

$$x = y = \varphi(t) = \psi(t) = \begin{cases} t + 1, & \text{если } -1 < t < 0; \\ t, & \text{если } t = 0; -1; 1; \\ t - 1, & \text{если } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Очевидно, что кривая будет представлять собой отрезок прямой  $y = x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . Она спрямляема (ее длина равна  $2\sqrt{2}$ ), геометрически (как множество точек) непрерывна, но параметрически задана с помощью разрывных функций. Если возьмем  $1 > \eta > 0$ , то при любых значениях  $0,5 > \delta > 0$  и любых (кроме начала системы координат) точках  $M'$  и  $M''$  данной кривой, лежащих в первом и в третьем квадрантах, соответственно, и  $\overline{M'M''} < \delta$ , не будет выполняться  $t'' - t' < \eta$ . Это объясняется тем, что при стремлении таких точек  $M'$  и  $M''$  кривой к началу системы координат соответствующие значения  $t'$  и  $t''$  стремятся к  $-1$  и  $1$ .

**Выражение 1 длины кривой интегралом.** Пусть функции  $\varphi$  и  $\psi$  в уравнениях (9.5) незамкнутой кривой имеют непрерывные производные  $\varphi'$  и  $\psi'$ . Тогда кривая спрямляема и ее длина выражается формулой

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = \int_{t_0}^T \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (9.6)$$

Утверждение формулирует только достаточные условия спрямляемости кривой и применимости формулы (9.6). Контрпример.

**9.53. Спрямолинейная кривая, заданная параметрически функциями, имеющими разрыв, длина которой вычисляется формулой**

$s = \int_{t_0}^T \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$ . Применим формулу (9.6) к кривой,

заданной в контрпримере 9.52. Заметим, что функции  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$  в точках  $t = -1; 0; 1$  не только не имеют непрерывных производных, но даже сами разрывны. Разобьем отрезок  $[-1, 1]$ , на котором определены функции на два отрезка  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$ , а интеграл в формуле (9.6) на два интеграла соответственно. Используем то, что значение определенного интеграла не зависит от значений подынтегральной функции на концах отрезка интегрирования. Доопределим функции  $x = \varphi(t)$  и  $y = \psi(t)$ , определенные на интервалах  $(-1, 0)$  и  $(0, 1)$ , в концах этих интервалов по непрерывности. В результате получим на отрезках  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$  непрерывно дифференцируемые функции  $\varphi(t) = \psi(t) = t + 1$  и  $\varphi(t) = \psi(t) = t - 1$  в первом и втором интегралах соответственно. Вычислим сумму интегралов  $s = \int_{-1}^0 \sqrt{1^2 + 1^2} dt + \int_0^1 \sqrt{1^2 + 1^2} dt = 2\sqrt{2}$ . Результат соответствует длине рассматриваемой кривой.

**Выражение 2 длины кривой интегралом.** Пусть кривая задана явным уравнением  $y = f(x)$ ,  $x \in [x_0, X]$ , где функция  $f$  имеет непрерывную производную  $f'$ . Если принять  $t = x$ , то получим частный случай формулы (9.6), а именно

$$s = \int_{x_0}^X \sqrt{1 + y_x'^2} dx = \int_{x_0}^X \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (9.7)$$

Приведем пример использования формулы (9.7).

**9.54. Спрямолинейная кривая задана уравнением  $y = f(x)$ ,  $x \in [x_0, X]$ , при этом  $f'(x)$  имеет разрыв.** Покажем, что кривая, заданная функцией  $y = f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $-\frac{1}{x} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ , доопределенной в точке  $x = 0$  значением  $f(0) = 0$ , совершающая бесконечное число колебаний в любой окрестности нуля, имеет конечную длину. Функция  $f(x)$  всюду дифференцируема, включая точку  $x = 0$ , последнее было показано в примере 5.14. Однако производная  $f'(x)$  имеет разрыв в точке  $x = 0$  и только в ней, см. [2], т. I, с. 160. Выра-

зим длину  $s(\delta)$  дуги кривой при  $\delta \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ , где число  $0 < \delta \leq \frac{1}{\pi}$  произвольно. Получим

$$s(\delta) = \int_{\delta}^{1/\pi} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{\delta}^{1/\pi} \sqrt{1 + \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)^2} dx.$$

Оценим сверху полученный интеграл (длину дуги)

$$s(\delta) < \int_{\delta}^{1/\pi} \sqrt{1 + (2 \cdot 1 \cdot 1 + 1)^2} dx = \sqrt{10} (1/\pi - \delta).$$

Длину  $s$  дуги кривой при  $0 \leq x \leq \frac{1}{\pi}$  выразим пределом функции  $s(\delta)$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Этот предел существует и конечен, так как функция  $s(\delta)$  монотонно возрастает при уменьшении  $\delta$ ,  $0 < \delta \leq \frac{1}{\pi}$ , и ограничена сверху числом  $\frac{\sqrt{10}}{\pi}$ . В силу нечетности функции общая длина  $l$  кривой будет в два раза больше  $s$ ,  $l = 2s$ , т.е. также конечной величиной. Сравните с примером 9.49.

Формула (9.7) не всегда применима. Приведем контрпример.

**9.55. Спрямолинейная кривая, заданная явным уравнением  $y = f(x)$ ,  $x \in [x_0, X]$ , для вычисления длины которой неприменима формула  $s = \int_{x_0}^X \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .** Пусть кривая задана функцией

ей  $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . Использование формулы (9.7) некорректно, так как в точке  $x = 0$  производная  $f'(0) = +\infty$ . Геометрически это означает, что касательная к графику функции в точке  $(0, 0)$  вертикальна. Соответственно и подынтегральная функция в формуле (9.7) не является ограниченной на отрезке  $[-1, 1]$ , а значит, интеграл не существует. Однако данная кривая имеет длину. Если рассмотреть кривую, определяемую обратной функцией  $y = x^3$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , то она будет зеркально симметрична исходной кривой относительно прямой  $y = x$  (рис. 9.14, б). Длины обеих кривых будут совпадать, а формула (9.7) уже будет применима, так как подынтегральная функция в этом случае будет ограниченной и непрерывной.

**Выражение 3 длины кривой интегралом.** Пусть кривая задана в поляр-

ных координатах  $\rho = g(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\varphi_0, \Phi]$ , где функция  $g$  имеет непрерывную производную  $\rho'_\varphi = g'(\varphi)$ . Тогда кривая спрямляема и ее длина  $s$  равна

$$s = \int_{\varphi_0}^{\Phi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\varphi} d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\Phi} \sqrt{(g(\varphi))^2 + (g'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (9.8)$$

Приведем два иллюстративных примера, в которых формула (9.8) используется для определения длин кривых из рассмотренных выше примеров.

**9.56. Спрямляемая кривая, заданная в полярных координатах на неограниченном полуинтервале, длина которой вычисляется с использованием формулы  $s = \int_{\varphi_0}^{\Phi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\varphi} d\varphi$ .** Рассмотрим

дугу логарифмической спирали  $\rho = g(\varphi) = e^\varphi$ , где  $\varphi \leq 0$ , заданной в полярной системе координат, см. пример 9.3 и рис. 9.2, б. Несмотря на то что дуга совершает бесконечное число оборотов вокруг начала системы координат, ее длина конечна. Если дугу спирали дополнить ее предельной точкой – началом системы координат, то получим непрерывную кривую. Но в точке  $(x = 0, y = 0)$  у нее особенность, не существует производной  $g'(\varphi)$ . Вычисление длины выполним в два этапа. Сначала вычислим интеграл

$$s(\varphi) = \int_{\varphi}^0 \sqrt{(g(\theta))^2 + (g'(\theta))^2} d\theta,$$

где  $\varphi \leq 0$  произвольно. Затем перейдем к пределу функции  $s(\varphi)$  при  $\varphi \rightarrow -\infty$ . Вычислим интеграл

$$s(\varphi) = \int_{\varphi}^0 \sqrt{e^{2\theta} + e^{2\theta}} d\theta = \sqrt{2} e^\theta \Big|_{\varphi}^0 = \sqrt{2} (1 - e^\varphi).$$

Далее найдем предел  $s = \lim_{\varphi \rightarrow -\infty} s(\varphi) = \sqrt{2} \lim_{\varphi \rightarrow -\infty} (1 - e^\varphi) = \sqrt{2}$ . Длина дуги спирали равна  $\sqrt{2}$ .

**9.57. Кривая, заданная в полярных координатах на неограниченном полуинтервале, неспрямляемость которой устанавливается с использованием формулы  $s = \int_{\varphi_0}^{\Phi} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2_\varphi} d\varphi$ .** Рассмотрим

дугу гиперболической спирали  $\rho = g(\varphi) = \frac{1}{\varphi}$ , где  $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ , из примера 9.21, см. рис. 9.9, а. Покажем, что ее длина бесконечна. Сначала выразим длину  $s(\varphi)$  дуги спирали при произвольном конечном

значении  $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ . Получим по формуле (9.8) интеграл и выполним его оценку снизу

$$s(\varphi) = \int_{\pi/2}^{\varphi} \sqrt{\frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^4}} d\theta > \int_{\pi/2}^{\varphi} \sqrt{\frac{1}{\theta^2}} d\theta = \ln \theta \Big|_{\pi/2}^{\varphi} = \ln \varphi - \ln \frac{\pi}{2}$$

или кратко  $s(\varphi) > \ln \varphi - \ln \frac{\pi}{2}$ . Отсюда следует, что  $\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} s(\varphi) = +\infty$ ,

так как функция  $\ln \varphi$  неограниченно возрастает при  $\varphi \rightarrow +\infty$ . Длина дуги спирали бесконечна.

### Упражнения

9.1. Является ли криволинейная трапеция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = x \sin \ln(x^2)$ ,  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $x \in [-1, 1]$ , квадратуемой?

9.2. Границу  $(K)$  фигуры  $(P)$  составим из дуг спиралей, записанных в полярной системе координат уравнениями  $\rho = \frac{\varphi+1}{\varphi+2}$  и  $\rho = \frac{\varphi+2}{\varphi+3}$ , где  $\varphi \geq 0$ ; от-

резка  $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$  оси  $Ox$  и окружности  $\rho = 1$ . Будет ли  $(P)$  квадратуемой?

9.3. Определить, является ли множество  $|x| + |y| \leq 1 + R(x+y)$  квадратуемым.

9.4. Является ли множество:  $D(x) - 1 \leq x \leq D(x) + 1$ ,  $D(y) - 1 \leq y \leq D(y) + 1$ ,  $D(z) - 1 \leq z \leq D(z) + 1$  кубируемым? Определить его границу.

9.5. Построить пример разложения кубируемого тела, например шара, на два некубируемых множества.

9.6. Показать, что график функции  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $x \in [-1, 1]$ , есть спрямляемая кривая.

9.7. Является ли спрямляемой кривой график функции  $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x^2}$ ,  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ ,  $x \in [-1, 1]$ ?

## РАЗДЕЛ 10

### ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

#### 10.1. Основные свойства сходящихся рядов

**Определение суммы ряда.** Суммой ряда  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$  называют предел  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  частичной суммы  $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  ряда, где  $A$  – число или  $-\infty$ , или  $+\infty$ . Если  $A$  – число, то ряд называют сходящимся, если сумма  $A$  бесконечна или предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  не существует, то – расходящимся.

Ниже будет приведено много примеров сходящихся числовых рядов, сходимость которых будет устанавливаться при помощи специальных признаков и теорем. Для начала же дадим пример ряда, сходимость которого непосредственно следует из данного определения.

**10.1. Пример сходящегося числового ряда.** Возьмем любую сходящуюся числовую последовательность  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ , такую что  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , где  $B$  – некоторое число. Рассмотрим числовой ряд  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ , где  $a_1 = b_1$ ,  $a_n = b_n - b_{n-1}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Тогда частичные суммы ряда будут равны:

$$A_1 = a_1 = b_1,$$

$$A_2 = a_1 + a_2 = b_1 + b_2 - b_1 = b_2,$$

$$A_3 = a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 - b_1 + b_3 - b_2 = b_3, \dots,$$

$$A_n = b_n, \dots$$

Отсюда  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , т.е. наш ряд сходящийся.

Приведем примеры расходящихся числовых рядов.

**10.2. Расходимость гармонического ряда.** Известный пример – гармонический ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ . Предположим, что он сходящийся и его сумма равна некоторому конечному числу  $A$ . Рас-



смотрим предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_{2n} - A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A - A = 0$ . Однако  $A_{2n} - A_n = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}}_n \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$  при любом

значении  $n$ . Приходим к противоречию. Следовательно, гармонический ряд расходится.

**10.3. Пример расходящегося ряда с бесконечной суммой.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ . Представим общий член ряда в виде  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$ . Следовательно, частичные суммы  $A_n$  ряда будут равны

$$\begin{aligned} A_n &= \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \dots + \ln(n+1) - \ln n = \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1). \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность частичных сумм стремится к  $+\infty$ , а значит, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  расходится.

В приведенных примерах предел последовательности частичных сумм равен бесконечности. В следующем простом примере расходящегося ряда последовательность частичных сумм не имеет предела.

**10.4. Пример расходящегося ряда с несуществующей суммой.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ . Его частичные суммы равны:  $A_1 = -1$ ,  $A_2 = 0$ ,  $A_3 = -1$ ,  $A_4 = 0$ , ..., т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  не существует.

**Сходимость остатка сходящегося ряда.** Из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  следует сходимость любого его остатка  $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ , где  $m$  – натуральное число, и наоборот, из сходимости остатка следует сходимость ряда.

Это означает, что отбрасывание (или присоединение) конечного числа начальных членов ряда не отражается на его сходимости или расходимости.

Заметим, что отбрасывание или присоединение бесконечного числа членов ряда может привести к различным результатам. Примеры.

**10.5\*. Сходящийся ряд, отбрасывание бесконечного множества членов которого делает его расходящимся.** Если из сходя-

щегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  отбросить члены с нечетными номерами, то получим расходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ . Обратно, если к членам расходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$  присоединить (начиная с первого члена и через раз) члены расходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{2n-1}$ , то получим сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

**10.6\*.** Расходящийся ряд, отбрасывание бесконечного множества членов которого делает его сходящимся. Если из расходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  отбросить все члены, кроме членов, номера которых есть квадраты натуральных чисел, то получим сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

**Сумма остатка сходящегося ряда.** Если ряд сходится, то при  $m \rightarrow \infty$  сумма его остатка  $\alpha_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$  стремится к нулю,  $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$ .

Справедливо и обратное утверждение: если сумма  $\alpha_m$  остатка ряда при  $m \rightarrow \infty$  стремится к нулю, то ряд сходится. Однако стремление к нулю суммы любого конечного фиксированного числа подряд идущих членов ряда (начиная с  $m+1$ -го члена) при  $m \rightarrow \infty$  недостаточно для его сходимости. Приведем контрпример.

**10.7.** Расходящийся ряд, у которого сумма любого фиксированного числа  $k$  подряд идущих членов, начиная с  $m+1$ -го, стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ . Гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходуется. Но  $\sum_{n=m+1}^{m+k} \frac{1}{n} \rightarrow 0$  при  $m \rightarrow \infty$ , где  $k$  – произвольное фиксированное натуральное число. Справедливость последнего утверждения следует из очевидного неравенства  $\sum_{n=m+1}^{m+k} \frac{1}{n} \leq \frac{k}{m+1}$ .

**Умножение членов сходящегося ряда на число.** Если члены сходяще-

гося ряда умножить на любое число  $c$ , то полученный ряд будет сходиться, а его сумма умножится на  $c$ .

Справедливо аналогичное утверждение для расходящегося ряда: если члены расходящегося ряда умножить на число  $c$ , то полученный ряд будет расходиться. Однако при этом необходима оговорка, что  $c \neq 0$ .

**Почленное сложение двух сходящихся рядов.** Если сходятся ряды  $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $B = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , то сходится их сумма  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  и выполняется

$$A + B = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n).$$

Аналогичное утверждение для двух расходящихся рядов несправедливо.

**10.8. Два расходящихся ряда, сумма которых – сходящийся ряд.** Сумма расходящихся рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$  – сходящийся ряд.

**Необходимое условие сходимости ряда.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , т.е.  $\{a_n\}$  – бесконечно малая последовательность.

Это условие является необходимым, но не является достаточным для сходимости ряда. Контрпримеры.

**10.9. Расходящиеся ряды, для которых выполняется необходимый признак сходимости.** Общие члены рядов из примеров 10.2 и 10.3 стремятся к нулю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ . Однако эти ряды расходятся.

## 10.2. Сходимость рядов с неотрицательными членами

**Условие сходимости ряда с неотрицательными членами.** Любой ряд с неотрицательными членами имеет сумму. Эта сумма конечна, а ряд сходится, если частичные суммы ряда ограничены сверху, и бесконечна, а ряд расходится, – в противном случае.

На основании данного утверждения обычно решается вопрос о сходимости общего гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots, \quad (10.1)$$

где  $s$  – любое число, при  $s = 1$  это собственно гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \quad (10.2)$$

Известно, см. [2], т. II, с. 16–17, что если  $s \leq 1$ , то ряд (10.1) расходится, а если  $s > 1$ , то сходится. Заметим, что  $\frac{1}{n^s} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , если  $s > 1$ , при  $n \rightarrow \infty$ , т.е. последовательность членов сходящегося ряда (10.1) является бесконечно малой по сравнению с последовательностью членов расходящегося ряда (10.2). Очевидно, что для любых  $s_0$  и  $s_1$ ,  $s_0 > s_1 > 1$ , выполняется  $\frac{1}{n^{s_0}} = o\left(\frac{1}{n^{s_1}}\right)$ . В этом смысле между сходящимся рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s_0}}$ , где  $s_0 > 1$  – произвольно, и расходящимся рядом (10.2) существует «промежуточный» сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s_1}}$ ,  $s_0 > s_1 > 1$ . Заметим, что в силу произвольности  $s_1$  таких «промежуточных» рядов бесконечно много. Иногда возникает заблуждение, что между указанными двумя рядами (10.1),  $s > 1$ , и (10.2) не существует «промежуточного» расходящегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  такого, что  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , а  $\frac{1}{n^s} = o(a_n)$ ,  $s > 1$ , при  $n \rightarrow \infty$ . Приведем контрпример, опровергающий это заблуждение.

**10.10, 10.11. Расходящиеся ряды  $\sum a_n$  такие, что  $a_n = o(1/n)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Рассмотрим расходящийся ряд**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}. \quad (10.3)$$

Расходимость (10.3) и последующих рядов в этом и следующем контрпримере показана в [8], т. II, с. 282. Установим, что

$$a_n = \frac{1}{n \ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right), \text{ а } \frac{1}{n^s} = o(a_n), \text{ где } s > 1, \text{ при } n \rightarrow \infty. \text{ Имеем}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{1/n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n^s}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{n^s} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln n}{n \cdot n^{\delta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\delta}}, \end{aligned}$$

где  $s = 1 + \delta$ ,  $\delta > 0$ . Заменив  $n$  на непрерывную переменную  $x$  и применив правило Лопиталья, получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\delta}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \delta x^{\delta-1}} = \frac{1}{\delta} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\delta}} = 0, \text{ так как } \delta > 0, \text{ и при} \\ x \rightarrow +\infty \quad (x > 0) \quad x^{\delta} &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Есть расходящийся ряд  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ , последовательность членов которого является бесконечно малой по сравнению с последовательностью членов ряда (10.3).

**10.12. Бесконечная последовательность расходящихся рядов**  $\sum a_n^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , таких, что  $a_n^{(1)} = 1/n$  и  $a_n^{(k+1)} = o(a_n^{(k)})$  при  $n \rightarrow \infty$ . Первый ряд – гармонический  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , два следующих ряда – из предыдущего контрпримера:  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  и  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$ , а  $k$ -й ряд  $\sum_{n=n_{(k)}}^{\infty} \frac{1}{\underbrace{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n \cdot \dots \cdot \ln \ln \dots \ln n}_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,  $n_{(1)} = 1$ ,  $n_{(k)}$  – такое минимальное, что  $\underbrace{\ln \ln \dots \ln n_{(k)}}_{k-1} > 0$ ,  $k \geq 2$ . Видим, что для любых двух, следующих друг за другом, рядов выполняется  $a_n^{(k+1)} = o(a_n^{(k)})$ ,  $k = 1, 2, \dots$

**Теорема 1 сравнения рядов с неотрицательными членами.** Пусть даны два ряда с неотрицательными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \quad (10.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \quad (10.5)$$

Если для всех  $n \geq N$ , где  $N$  – некоторое натуральное число, выполняется неравенство:  $a_n \leq b_n$ , то из сходимости ряда (10.5) следует сходимость ряда (10.4) или из расходимости ряда (10.4) следует расходимость ряда (10.5).

Утверждение неприменимо для произвольных рядов. Контрпример.

**10.13. Неприменимость заключения теоремы 1 сравнения рядов с неотрицательными членами к произвольным рядам.**

Рассмотрим ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ . Для всех натуральных  $n$  выполняется  $-\frac{1}{n} < \frac{1}{2^n}$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  сходится, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$  расходится. Или можно взглянуть иначе: ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}$  расходится, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$  не является расходящимся.

Опровергнем возможное заблуждение, что данная теорема распространяется на произвольные ряды заменой неравенства  $a_n \leq b_n$  на неравенство  $|a_n| \leq |b_n|$ . Контрпример.

**10.14\*. Неприменимость заключения «уточненной» теоремы 1 сравнения рядов с неотрицательными членами к произвольным рядам.** Рассмотрим ряды  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ . Для всех натуральных  $n \geq 2$  выполняется  $\left| \frac{1}{n \ln n} \right| < \left| \frac{(-1)^n}{n} \right|$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  сходится, см. [2], т. II, с. 32–34, но ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  расходится.

**Теорема 2 сравнения рядов с неотрицательными членами.** Пусть существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K$ ,  $b_n \neq 0$ ,  $0 \leq K \leq +\infty$ . Тогда: 1) при  $K < \infty$  из сходимости ряда (10.5) следует сходимость ряда (10.4); 2) при  $K > 0$  из расходимости ряда (10.5) следует расходимость ряда (10.4).

Теорема 2 является следствием теоремы 1. Часто применять ее удобней, чем исходную теорему, но теорема 2 имеет ограниченное применение: требуется существование предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ . Примеры.

**10.15, 10.16. Ряды, для которых применима теорема 1, но не применима теорема 2 сравнения рядов.** Ряды с положительными членами  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = \frac{1}{n}$ , и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , где  $b_n = \begin{cases} 1/n, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ 2/n, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$  Выполняется  $a_n \leq b_n$ , и по теореме 1 из расходимости гармонического ряда следует расходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Однако, используя теорему 2, никакого вывода о расходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сделать нельзя, так как последовательность отношений  $\frac{a_n}{b_n}$  при  $n = 1, 2, \dots$  будет:  $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \dots$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  не существует.

Ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = \begin{cases} 1/n^2, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ 1/n^3, & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , где

$b_n = 1/n^2$ . Выполняется  $a_n \leq b_n$ , и по теореме 1 из сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  следует сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Однако, используя теорему 2,

никакого вывода о сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сделать нельзя. Действи-

тельно, последовательность отношений  $\frac{a_n}{b_n}$  при  $n = 1, 2, \dots$  будет:

$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \dots$ , т.е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$  не существует.

**Теорема 3 сравнения рядов с неотрицательными членами.** Если для всех  $n \geq N$ , где  $N$  – некоторое натуральное число, выполняется неравенство

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad (10.6)$$

где  $a_n, b_n \neq 0$ , то из сходимости ряда (10.5) следует сходимость ряда (10.4) или из расходимости ряда (10.4) следует расходимость ряда (10.5).

Теорема 3 является следствием теоремы 1, но ее применение по сравнению с теоремой 1 ограничено. Приведем примеры.

**10.17, 10.18. Ряды, для которых применима теорема 1, но не применима теорема 3 сравнения рядов.** Применим теорему 3 к рядам из примера 10.15. Получим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}, \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \begin{cases} 2n/(n+1), & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ n/(2(n+1)), & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

Видим, что при нечетных  $n$  неравенство (10.6) выполняется, так как

$\frac{n}{n+1} < \frac{2n}{n+1}$ , а при четных  $n$  – не выполняется, так как

$\frac{n}{n+1} > \frac{n}{2(n+1)}$ . Следовательно, для сравнения рядов из примера

10.15 теорема 3 неприменима.

Применим теорему 3 к рядам из примера 10.16. Имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} n^2/(n+1)^3, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ n^3/(n+1)^2, & \text{если } n \text{ четное,} \end{cases} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}.$$

Замечаем, что при нечетных  $n$  неравенство (10.6) выполняется, полу-

чаем  $\frac{n^2}{(n+1)^3} < \frac{n^2}{(n+1)^2}$ , однако при четных  $n$  – не выполняется,

так как  $\frac{n^3}{(n+1)^2} > \frac{n^2}{(n+1)^2}$  уже при  $n > 1$ . Следовательно, при сравнении рядов из примера 10.16 теорема 3 неприменима.

**Признак Коши сходимости.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с неотрицательными членами. Если для всех  $n \geq N$ , где  $N$  – некоторое натуральное число, выполняется неравенство  $C_n = \sqrt[n]{a_n} \leq q$ , где  $q < 1$  – постоянное число, то ряд сходится; если для всех  $n \geq N$  выполняется  $C_n = \sqrt[n]{a_n} \geq 1$ , то ряд расходится.

Приведем примеры неприменимости признака.

**10.19. Ряд, для которого неприменим признак Коши сходимости.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+1/n)^{n^2}}{e^n}$ . Выполняется

$$C_n = \sqrt[n]{a_n} = \frac{(1+1/n)^n}{e} < 1,$$

так как известно, что  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ . Известно также, что для любого, сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такое достаточно большое число  $N$ , что для всех  $n > N$  выполняется  $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \varepsilon$ , или (после почленного деления на  $e$ ) получаем  $1 - \frac{(1+1/n)^n}{e} < \frac{\varepsilon}{e}$ , или  $\frac{(1+1/n)^n}{e} > 1 - \frac{\varepsilon}{e}$ . Следовательно, не может для всех достаточно

больших  $n$  выполняться неравенство  $C_n = \frac{(1+1/n)^n}{e} \leq q < 1$ , т.е. не существует такое постоянное число  $q < 1$ , что  $C_n \leq q$ . Признак к данному ряду неприменим.

**10.20. Применимость признака Коши к общему гармоническому ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$  при  $s \leq 0$  и его неприменимость при  $s > 0$ .**

Известный пример – общий гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ , где  $s$  – лю-



бое действительное число. Имеем  $C_n = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^s}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^s$ . Величина  $\sqrt[n]{n} > 1$  начиная с  $n = 2$ , так как получить  $n > 1$  можно возводя в степень  $n$  только число большее единицы:  $(\sqrt[n]{n})^n = n$ . Отсюда  $C_n = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^s \geq 1$ , если  $s \leq 0$ , и  $C_n = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^s < 1$ , если  $s > 0$ . Отсюда делаем вывод, что при  $s \leq 0$  ряд расходится. Это очевидно и без применения признака, так как при  $s \leq 0$  общий член ряда  $a_n = \frac{1}{n^s} \geq 1$ . В случае же  $s > 0$  вывод о сходимости ряда мы сделать не можем, так как известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$  и величина  $C_n \rightarrow 1$  ( $C_n < 1$ ) при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, не существует постоянное число  $q$  такое, что  $C_n \leq q < 1$  для всех достаточно больших значений  $n$ .

**Признак Коши сходимости в предельной форме.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с неотрицательными членами. Пусть существует конечный или нет предел выражения  $C_n = \sqrt[n]{a_n} : \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = C$ . Тогда при  $C < 1$  ряд сходится, а при  $C > 1$  ряд расходится.

Данный признак может быть неприменим по различным причинам. Например, если получено  $C = 1$  или  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$  не существует. Проверим применимость этого признака к общему гармоническому ряду.

**10.21. Неприменимость признака Коши в предельной форме к общему гармоническому ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ .** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ , где  $s$  — лю-

бое действительное число. Имеем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^s}} = \left(\frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}\right)^s = 1$ , так как

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . Заметим, что неприменимость признака наблюдается как в случае расходимости ряда ( $s \leq 1$ ), так и при его сходимости ( $s > 1$ ). Отдельно отметим, что собственно признак Коши оказался (применительно к общему гармоническому ряду) сильнее признака Коши в предельной форме, так как выявил расходимость ряда в случае  $s \leq 0$ .

Рассмотрим пример, в котором неприменимость признака связана с несуществованием предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ .

**10.22. Ряд, к которому неприменим признак Коши в предельной форме из-за несуществования предела, но применим собственно признак Коши.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где

$$a_n = \begin{cases} 1/2^n, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 1/4^n, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Имеем  $C_n = \begin{cases} 1/2, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 1/4, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$  Очевидно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n$  не существует, а данный признак неприменим. Заметим, что ряд сходится, что легко показать сравнением со сходящимся рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ . Особо отметим, что собственно признак Коши в данном случае срабатывает, так как существует постоянное число  $q = \frac{1}{2} < 1$ , для которого  $C_n \leq q$  при всех значениях  $n$ . И в этом случае исходный признак Коши оказался сильнее своей предельной формы.

**Признак Даламбера сходимости.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с неотрицательными членами. Если для всех  $n \geq N$ , где  $N$  – некоторое натуральное число, выполняется неравенство  $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ , где  $q < 1$  – постоянное число, то ряд сходится; если для всех  $n \geq N$  выполняется  $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ , то ряд расходится.

Применим признак Даламбера к общему гармоническому ряду.

**10.23. Применимость признака Даламбера к общему гармоническому ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$  при  $s \leq 0$  и его неприменимость при  $s > 0$ .** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ , где  $s$  – любое действительное число. Найдем

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^s}{(n+1)^s} = \left( \frac{n}{n+1} \right)^s. \text{ Так как для всех } n \text{ выполняется}$$

$\frac{n}{n+1} < 1$ , то при  $s \leq 0$  величина  $D_n \geq 1$  при любом  $n$ , а значит, ряд расходится. В случае  $s > 0$  величина  $D_n < 1$  при всех  $n$ . Но так как

$D_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ , то не существует постоянного числа

$q$  такого, что  $D_n \leq q < 1$  для всех достаточно больших  $n$ . Следовательно, признак в этом случае неприменим. Заметим, что применение обоих признаков: Коши и Даламбера дало в данном случае идентичные результаты.

Рассмотрим ряд, расходимость которого устанавливается признаком Даламбера, но (покажем далее) не устанавливается тем же признаком в его предельной форме.

**10.24. Ряд, расходимость которого устанавливается признаком Даламбера.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$ . Для него получаем

$$D_n = \frac{(n+1)!e^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}n!e^n} = \frac{e n^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{(1+1/n)^n}.$$

Известно, что  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$ , отсюда  $D_n > 1$  при всех  $n$ . Ряд расходится.

**Признак Даламбера сходимости в предельной форме.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с неотрицательными членами. Пусть существует конечный или нет предел отношения  $D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = D$ . Тогда при  $D < 1$  ряд сходится, а при  $D > 1$  ряд расходится.

С целью сравнения рассмотрим те же ряды, что и в случае собственно признака Даламбера.

**10.25. Неприменимость признака Даламбера в предельной форме к общему гармоническому ряду**  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ , здесь  $s$  — любое действительное число. Для него  $D_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^s$ , а

$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^s = 1$ . Признак неприменим. Однако собственно признак Даламбера выявил расходимость ряда при  $s \leq 0$ . Значит, он в данном случае оказался сильнее аналогичного признака в предельной форме.

**10.26. Ряд, расходимость которого устанавливается признаком Даламбера, но не устанавливается тем же признаком в предельной форме.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^n}$ . Для него было получено выше

$D_n = \frac{e}{(1+1/n)^n}$ . Рассмотрим  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{(1+1/n)^n} = 1$ . Признак не дает результата. Заметим, что для данного ряда собственно признак Даламбера применим, а значит, он сильнее в исходной, а не в предельной форме.

Рассмотрим пример, в котором не существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n$ , и признак Даламбера в предельной форме нельзя применить. Более того, неприменим и собственно признак Даламбера. Однако ранее была показана применимость признака Коши для рассматриваемого ряда.

**10.27. Ряд, сходимость которого не устанавливается признаком Даламбера (включая его предельную форму), но устанавливается признаком Коши.** Сходящийся ряд из примера 10.22

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = \begin{cases} 1/2^n, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 1/4^n, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$  В этом случае получаем

$D_n = \begin{cases} 1/2^{n+2}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 2^{n-1}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$  Предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n$  не существует, сле-

довательно, признак неприменим. В то же время собственно признак Даламбера также не может быть использован, так как не существует постоянного числа  $q < 1$ , такого, чтобы при достаточно больших  $n$ , выполнялось неравенство  $D_n \leq q$ . Не выполняется и условие  $D_n \geq 1$ , начиная с некоторого  $n$ . Напомним, что в примере 10.22 была показана применимость признака Коши к установлению сходимости данного ряда. Следовательно, для данного случая признак Коши оказался сильнее признака Даламбера.

Другие примеры, в которых признак Коши эффективнее признака Даламбера даны в [1], с. 82. Там же формулируются усиленные признаки Коши и

Даламбера, даются примеры их неприменимости и показано, что усиленный признак Коши эффективнее усиленного признака Даламбера, [1], с. 80.

**Признак Раабе сходимости.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с неотрицательными членами. Если для всех  $n \geq N$ , где  $N$  – некоторое натуральное число, выполняется неравенство  $R_n = n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \geq r$ , где  $r > 1$  – постоянное число, то ряд сходится; если для всех  $n \geq N$  выполняется  $R_n = n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) \leq 1$ , то ряд расходится.

Применим признак к рядам, сходимость или расходимость которых не устанавливалась предыдущими признаками.

**10.28. Применимость признака Раабе к установлению расходимости гармонического ряда.** Гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

$$R_n = n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = n \left( 1 - \left( \frac{n}{n+1} \right) \right) = n - \frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Видим, что  $R_n < 1$  для всех  $n$ , значит, ряд расходится. Заметим, что все рассмотренные выше признаки не справлялись с определением расходимости гармонического ряда.

Приведем пример ряда, для которого признак Раабе неприменим, хотя ранее его сходимость была установлена с помощью признака Коши.

**10.29. Ряд, сходимость которого устанавливается признаком Коши, но не устанавливается признаком Раабе.** Сходящийся ряд

из примера 10.22  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = \begin{cases} 1/2^n, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 1/4^n, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$  В этом слу-

чае получаем  $R_n = \begin{cases} n(1 - 1/2^{n+2}), & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ n(1 - 2^{n-1}), & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$  Заметим, что ве-

личина  $R_n$  для всех достаточно больших чисел  $n$ : нечетных – сколь угодно близка к  $n$ , четных – сколь угодно близка к  $-\infty$ . Получаем, что признак Раабе неприменим к данному ряду, хотя выше его сходимость была установлена с помощью признака Коши. Следовательно, применительно к данному ряду признак Коши оказался сильнее признака Раабе.

**10.30. Ряд, сходимость которого не устанавливается призна-**

**ком Раабе.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = \begin{cases} 1/n^2, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ 1/n^3, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$

Для него  $R_n = \begin{cases} n(1-n^2/(n+1)^3), & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ n(1-n^3/(n+1)^2), & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$  Величина  $R_n$  для

всех достаточно больших чисел  $n$ : нечетных  $\left(R_n = n - \frac{n^3}{(n+1)^3}\right) -$

сколь угодно близка к  $n-1$ , четных  $\left(R_n = n - \frac{n^4}{(n+1)^2}\right) -$  сколь

угодно близка к  $-\infty$ . Признак Раабе неприменим к данному сходящемуся ряду.

Используем ряд, [8], т. II, с. 276, зависящий от параметров, чтобы далее сравнить применимость к нему признака Раабе и признака Бертрана.

**10.31. Ряд, зависящий от параметров, к которому не при всех значениях параметров применим признак Раабе.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a^n}{(a+a_1)(2a+a_2) \cdot \dots \cdot (na+a_n)},$$

где  $a > 0$ ,  $a_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $a_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ . Имеем

$$R_n = n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = n \left( 1 - \frac{(n+1)a}{(n+1)a + a_{n+1}} \right) = \frac{na_{n+1}}{(n+1)a + a_{n+1}}.$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть  $a = 2$ ,  $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ , тогда

$$R_n = \frac{n(2 - 1/(n+1))}{(n+1)2 + 2 - 1/(n+1)} = \frac{2n - n/(n+1)}{2n + 4 - 1/(n+1)}.$$

Видим, что при любом  $n$  числитель меньше знаменателя и выполняется  $R_n < 1$ , т.е. ряд

расходится. Признак применим. Пусть  $a = 0,1$ ,  $a_n = 0,1 + \frac{1}{n}$ , тогда

$$R_n = \frac{n(0,1 + 1/(n+1))}{(n+1) \cdot 0,1 + 0,1 + 1/(n+1)} = \frac{0,1 \cdot n + n/(n+1)}{0,1 \cdot n + 0,2 + 1/(n+1)}.$$

Заметим, что числитель, начиная с  $n = 2$ , становится больше знаменателя, т.е.  $R_n > 1$  для всех  $n \geq 2$ . Однако,  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 1$  и, следова-

тельно, не существует постоянное число  $r$ ,  $r > 1$ , такое, что  $R_n \geq r$  для всех достаточно больших  $n$ . В данном случае признак Раабе неприменим.

**Признак Раабе сходимости в предельной форме.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с неотрицательными членами. Пусть существует конечный или нет предел выражения  $R_n = n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right)$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = R$ . Тогда при  $R > 1$  ряд сходится, а при  $R < 1$  ряд расходится.

Очевидно, признак Раабе в предельной форме не даст ответа на вопрос о сходимости рядов в примерах 10.29 и 10.30, так как там не существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n$ . Приведем примеры, показывающие ослабление признака Раабе при его переводе в предельную форму.

**10.32. Неприменимость признака Раабе в предельной форме к установлению расходимости гармонического ряда.** Гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Для него было выше (пример 10.28) определено

$R_n = \frac{n}{n+1}$ . Видим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ . Признак Раабе в предельной форме неприменим. Заметим, что собственно признак Раабе позволил установить расходимость гармонического ряда.

**10.33. Ряд, зависящий от параметров, к которому не при всех значениях параметров применим признак Раабе, но при всех их значениях неприменима его предельная форма.** Рассмотрим ряд из примера 10.31, зависящий от параметров. Выше было показано, что к исследованию его сходимости признак Раабе применим или неприменим, в зависимости от значений параметров. Покажем, что признак Раабе в предельной форме к нему неприменим во всех случаях. В примере 10.31 было получено  $R_n = \frac{na_{n+1}}{(n+1)a + a_{n+1}}$ , где  $a > 0$ ,  $a_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $a_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ . Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_{n+1}}{(n+1)a + a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na}{(n+2)a} = 1.$$

**10.34. Ряд, к которому признаки Коши и Даламбера неприменимы, но применим признак Раабе даже в предельной форме.**

Гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ,  $s = 2$ . Для него получаем

$$R_n = n \left( 1 - \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 \right) = \frac{n((n+1)^2 - n^2)}{(n+1)^2} = \frac{n(2n+1)}{(n+1)^2} = \frac{2n^2 + n}{n^2 + 2n + 1}.$$

Предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n}{n^2 + 2n + 1} = 2 > 1$ . Делаем вывод о сходимости ряда.

**Признак Бертрана сходимости.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с неотрицательными членами. Пусть существует конечный или нет предел выражения  $B_n = \ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right)$ :  $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$ . Тогда при  $B > 1$  ряд сходится, а при  $B < 1$  ряд расходится.

Так как признак Бертрана выражен в предельной форме, естественно его сравнение с предельной формой признака Раабе. Пример.

**10.35. Применимость признака Бертрана к установлению расходимости гармонического ряда.** В примере 10.32 была показана неприменимость признака Раабе в предельной форме к установлению расходимости гармонического ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  (напомним, что собственно признак Раабе с гармоническим рядом справляется). Применим признак Бертрана. Найдем

$$B_n = \ln n \left( n \left( \frac{n+1}{n} - 1 \right) - 1 \right) = \ln n \left( n \frac{n+1-n}{n} - 1 \right) = 0.$$

Выполняется  $B = 0$ ,  $B < 1$ . Ряд расходится.

Применим признак Бертрана к рядам, с которыми не справился признак Раабе. Примеры.

**10.36. Ряд, зависящий от параметров, к которому не при всех значениях параметров применим признак Раабе, но при всех их значениях применим признак Бертрана.** Ряд из примера 10.31

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! a^n}{(a + a_1)(2a + a_2) \cdots (na + a_n)},$$

где  $a > 0$ ,  $a_n > 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $a_n \rightarrow a$  при  $n \rightarrow \infty$ . Имеем

$$\begin{aligned} B_n &= \ln n \left( n \left( \frac{(n+1)a + a_{n+1}}{(n+1)a} - 1 \right) - 1 \right) = \ln n \left( \frac{na_{n+1}}{(n+1)a} - 1 \right), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} B_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n(na_{n+1} - (n+1)a)}{(n+1)a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n(n(a_{n+1} - a) - a)}{(n+1)a} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n(n(a_{n+1} - a) - a)}{(n+1)a} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n+1} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Закключаем, что ряд



при любых рассматриваемых значениях параметров расходится. Признак Бертрана оказался сильнее признака Раабе.

**10.37. Ряд, сходимость которого устанавливается признаком Коши, но не устанавливается признаками Раабе и Бертрана.** Ряд

из примеров 10.22 и 10.29  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = \begin{cases} 1/2^n, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ 1/4^n, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$

Получаем: для  $n$  нечетных

$$B_n = \ln n \left( n \left( \frac{4^{n+1}}{2^n} - 1 \right) - 1 \right) = \ln n (n(2^{n+2} - 1) - 1),$$

для  $n$  четных  $B_n = \ln n \left( n \left( \frac{2^{n+1}}{4^n} - 1 \right) - 1 \right) = \ln n (n(2^{-n+1} - 1) - 1)$ . Видим,

что  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$  не существует, так как величина  $B_n$  для всех достаточно

больших чисел  $n$ : нечетных – сколь угодно близка к  $+\infty$ , четных – сколь угодно близка к  $-\infty$ . Признак Бертрана неприменим к данному ряду. Заметим, что ранее его сходимость была установлена с помощью признака Коши, но с этой задачей не справился признак Раабе. Получаем, что применительно к данному ряду признак Коши оказался сильнее признаков Раабе и Бертрана.

**10.38. Сходящийся ряд, к которому неприменимы признаки Раабе и Бертрана.** Сходящийся ряд из примера 10.30  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где

$$a_n = \begin{cases} 1/n^2, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ 1/n^3, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

В этом случае для  $n$  нечетных имеем  $B_n = \ln n \left( n \left( \frac{(n+1)^3}{n^2} - 1 \right) - 1 \right)$ ,

для  $n$  четных  $B_n = \ln n \left( n \left( \frac{(n+1)^2}{n^3} - 1 \right) - 1 \right) = \ln n \left( \frac{n^2 + 2n + 1 - n^3}{n^3} - 1 \right)$ .

Так как величина  $B_n$  для всех достаточно больших чисел  $n$ : нечетных – сколь угодно близка к  $+\infty$ , четных – сколь угодно близка к  $-\infty$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n$  не существует. Признак Бертрана, как и признак

Раабе, неприменим к данному ряду.

**Интегральный признак Маклорена–Коши сходимости.** Рассмотрим

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  с неотрицательными членами. Пусть определена на полуинтервале  $[1, +\infty)$  положительная, монотонно убывающая и непрерывная функция  $f(x)$ , такая, что  $0 \leq a_n \leq f(n)$  ( $a_n \geq f(n) > 0$ ) для всех  $n \geq N$ , где  $N$  – некоторое натуральное число. При этих предположениях существует первообразная для  $f(x)$ :  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ , которая возрастает и имеет при  $x \rightarrow \infty$  предел  $L$ , конечный (равный  $+\infty$ ). Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится (расходится).

Отбросим в интегральном признаке Маклорена–Коши требование моно-

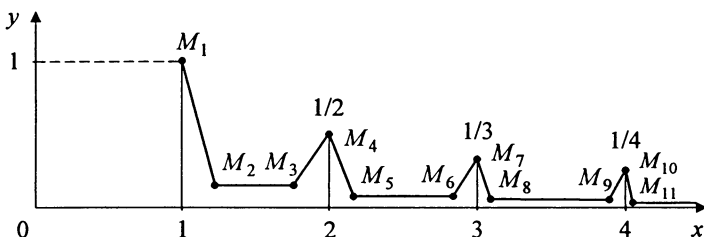


Рис. 10.1

тонности функции, получим некорректное утверждение. Приведем контр-примеры.

**10.39. Снятие условия монотонного убывания функции в интегральном признаке Маклорена–Коши, приведшее к установлению сходимости расходящегося ряда.** Рассмотрим гармонический ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Его расходимость успешно устанавливается с помощью данного интегрального признака, см. [2], т. II, с. 27. Функцию  $y = f(x)$  зададим, описав ее график как ломаную, с последовательными вершинами в заданных точках  $M_1, M_2, \dots$  плоскости  $Oxy$  (рис. 10.1). Положение точек определим следующим образом. Точки ломаной с номерами  $3n-2$ ,  $n=1, 2, \dots$  отвечают натуральным значениям аргумента, и их координаты  $M_{3n-2} \left( n, \frac{1}{n} \right)$ . Между двумя произвольными соседними натуральными числами  $(n-1)$  и  $n$ ,  $n=2, 3, \dots$ , располагаются две точки  $M_{3n-4}$  и  $M_{3n-3}$  ломаной, их координаты определяются с использованием схемы, данной на рис.

10.2. Дано  $AM_{3n-5} = \frac{1}{n-1}$ ,  $DM_{3n-2} = \frac{1}{n}$ ,  $AD = 1$ . Построим отрезок  $EF$ , параллельный отрезку  $AD$  так, что  $AE = DF = \frac{1}{3 \cdot 2^n}$ . Точки  $E$  и  $F$  лежат внутри отрезков  $AM_{3n-5}$  и  $DM_{3n-2}$  соответственно, так как  $\frac{1}{3 \cdot 2^n} < \frac{1}{n}$ . Площадь  $S_0$  прямоугольника  $ADFE$  равна  $S_0 = AD \cdot AE = \frac{1}{3 \cdot 2^n}$ . Построим точки  $B$  и  $C$  внутри отрезка  $AD$ :

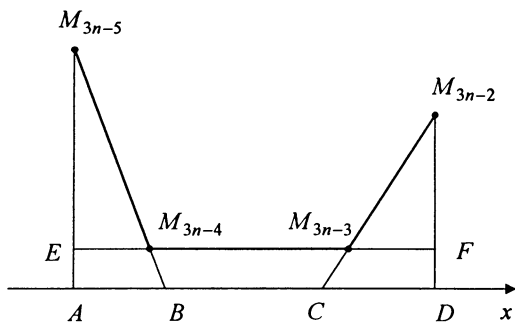


Рис. 10.2

$AB = \frac{n-1}{3 \cdot 2^{n-1}}$ ,  $CD = \frac{n}{3 \cdot 2^{n-1}}$ . Это возможно, так как  $\frac{n}{3 \cdot 2^{n-1}} < 1$ , более того, точки  $B$  и  $C$  разместятся на  $AD$  в порядке следования  $ABCD$ , так как  $\frac{n}{3 \cdot 2^{n-1}} < \frac{1}{2}$ . Тогда площади  $S_1$  и  $S_2$  треугольников  $ABM_{3n-5}$  и  $CDM_{3n-2}$  будут равны

$$S_1 = \frac{1}{2} AB \cdot AM_{3n-5} = \frac{n-1}{2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} (n-1)} = \frac{1}{3 \cdot 2^n},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} CD \cdot DM_{3n-2} = \frac{n}{2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} \cdot n} = \frac{1}{3 \cdot 2^n}.$$

Точки пересечения отрезка  $EF$  с отрезками  $BM_{3n-5}$  и  $CM_{3n-2}$  примем за точки  $M_{3n-4}$  и  $M_{3n-3}$  соответственно. Очевидно, что площадь  $P_n$  многоугольника  $ADM_{3n-2}M_{3n-3}M_{3n-4}M_{3n-5}$  будет меньше

суммы  $S_0 + S_1 + S_2 = \frac{1}{2^n}$ ,  $P_n < \frac{1}{2^n}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , так как составляющие данный многоугольник прямоугольник  $ADFE$  и треугольники  $ABM_{3n-5}$  и  $CDM_{3n-2}$  пересекаются.

Функция  $f(x)$  по своему построению удовлетворяет требованиям интегрального признака: она определена для всех  $x \geq 1$ ,  $f(n) = \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $f(x)$  непрерывна и положительна на всем полуинтервале  $[1, +\infty)$  и убывает на нем в том смысле, что  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Однако  $f(x)$  убывает на полуинтервале  $[1, +\infty)$  не

монотонно. Покажем, что  $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t)dt$  является конечным числом. Так как функция  $f(x)$  положительная, то функция  $F(x)$  строго монотонно возрастающая. Поэтому достаточно показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n)$  – конечное число. Заметим, что  $F(n)$  – площадь фигуры, ограниченной осью  $Ox$ , ломаной  $M_1M_2 \dots M_{3n-2}$  и прямыми  $x = 1$  и  $x = n$ . Как следует из сделанных выше построений, площадь  $F(n)$  этой фигуры равна

$$F(n) = P_2 + \dots + P_n < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}. \quad (10.7)$$

Переходя в неравенстве (10.7) к пределу при  $n \rightarrow \infty$  получаем

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(t)dt \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k},$$

но  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1/4}{1-1/2} = \frac{1}{2}$ . Отсюда имеем  $L \leq \frac{1}{2}$ . Приходим к ошибочному выводу о сходимости гармонического ряда.

**10.40. Снятие условия монотонного убывания функции в интегральном признаке Маклорена–Коши, приведшее к установлению расходимости сходящегося ряда.** Рассмотрим сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ . Применим интегральный признак с нарушением условия монотонности функции  $f(x)$ . Функцию  $y = f(x)$  зададим ее графиком на плоскости  $Oxy$  в виде ломаной  $M_1M_2 \dots$  (рис. 10.3). Точки  $M_{2n-1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , с нечетными номерами имеют координаты

$M_{2n-1}\left(n, \frac{1}{2^n}\right)$ , а с четными номерами —  $M_{2n}\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{n+1}\right)$ . Построенная таким образом функция  $f(x)$  удовлетворяет всем требованиям интегрального признака: она определена для всех  $x \geq 1$ , выполняется  $f(n) = \frac{1}{2^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $f(x)$  непрерывна и положительна на всем полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Функция убывает в том смысле, что

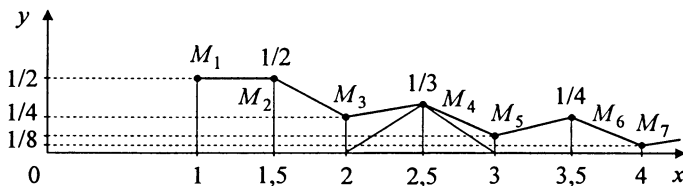


Рис. 10.3

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ . Однако убывание функции  $f(x)$  на полуинтервале  $[1, +\infty)$  не монотонно. Покажем, что

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = +\infty.$$

Функция  $f(x)$  положительная, отсюда  $F(x)$  — строго монотонно возрастающая функция, и достаточно показать, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = +\infty$ .

Очевидно,  $F(n)$  — площадь фигуры, ограниченной осью  $Ox$ , ломаной  $M_1 M_2 \dots M_{2n-1}$  и прямыми  $x = 1$  и  $x = n$ . Эта фигура составлена из пятиугольников, заключенных между соседними прямыми  $x = n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (см. рис. 10.3). Площадь каждого пятиугольника оценим снизу площадью вписанного в него треугольника. На рисунке изображен треугольник с основанием в виде отрезка  $[2, 3]$  оси  $Ox$  и вершиной  $M_4$ , вписанный в пятиугольник  $M_3, M_4, M_5, (3, 0)$  и  $(2, 0)$ . Таким образом, площадь  $F(n)$  фигуры оценивается снизу суммой площадей  $n - 1$  треугольника, а именно

$$F(n) > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right), \quad n = 2, 3, \dots \quad (10.8)$$

Предельный переход в (10.8) при  $n \rightarrow \infty$  дает  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(n) = +\infty$ . Отсюда делаем неправильный вывод о расходимости ряда.

Попробуем перенести интегральный признак на произвольные ряды, сняв при этом требование положительности функции  $f(x)$ . Так как знаки членов ряда сколь угодно далеко от его начала будут меняться, то монотонность функции также будет невыполнима. Приведем сначала частный пример, в котором такой обобщенный интегральный признак «срабатывает», а затем контрпример, доказывающий некорректность такого переноса (обобщения) признака.

**10.41\*. Пример переноса (некорректного) интегрального признака Маклорена–Коши на произвольные ряды, при котором не получен ложный результат.** Рассмотрим сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ и непрерывную функцию } f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{x}, \quad x \geq 1, \text{ которая,}$$

однако, не является положительной и монотонной. Выполняется ус-

ловие  $\frac{(-1)^n}{n} = f(n) = \frac{\cos(\pi n)}{n}$ , для всех  $n = 1, 2, \dots$ . Заметим, что су-

ществует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{\cos(\pi t)}{t} dt$ . Сходи-

мость как ряда, так и несобственного интеграла могут быть установлены с применением признака Лейбница для знакопеременяющихся рядов. В последнем случае надо разбить интеграл на сумму интегралов (они составят знакопеременяющийся ряд), каждый из которых взят на отрезке знакопостоянства подынтегральной функции.

**10.42\*. Пример переноса (некорректного) интегрального признака Маклорена–Коши на произвольные ряды, при котором получен ложный результат.** Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2).$$

Естественно для него принять функцию  $f(x) = \cos(x^2)$ ,  $x \geq 1$ , которая непрерывна, но не является положительной и монотонной. Су-

ществует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \cos(t^2) dt$ . Доказать

это можно с использованием признака Лейбница и приема, описан-

ного в предыдущем примере. Однако ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2)$  расходится, так

как его общий член не стремится к нулю. Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(n^2)$  не существует.

### 10.3. Сходимость произвольных рядов

**Определение абсолютной сходимости.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

Любой сходящийся ряд, имеющий лишь конечное множество отрицательных (положительных) членов, является абсолютно сходящимся. Это следует из того, что отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость. Рассмотрим примеры знакопеременных рядов, содержащих бесконечные множества как положительных, так и отрицательных членов. Среди них есть абсолютно сходящиеся и не абсолютно сходящиеся.

**10.43. Пример не абсолютно сходящегося ряда.** Известный пример сходящегося знакопеременного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ . Он сходится

не абсолютно, так как  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  – расходящийся гармонический ряд.

**10.44. Пример абсолютно сходящегося знакопеременного ряда.** Сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[t \ln n]}}{n\sqrt{n}}$ , где  $[t]$  – целая часть числа  $t$ . Этот ряд содержит сколь угодно длинные чередующиеся серии подряд идущих положительных (отрицательных) членов. Он сходится абсолютно, так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$  сходится.

**Теорема Коши.** Если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ , то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Из этого утверждения следует, что как бы мы ни расставляли знаки «+» и «-» у членов сходящегося ряда с неотрицательными членами, мы будем получать сходящиеся ряды. Интересно, что если мы будем это делать с расходящимся рядом с неотрицательными членами, то результаты могут быть различными. Пример.

**10.45. Расстановки знаков у членов гармонического ряда, приводящие к сходящемуся и расходящемуся рядам.** Если общий член расходящегося ряда не будет стремиться к нулю, то при любой расстановке знаков получим расходящийся ряд. Поэтому рассмотрим, к примеру, гармонический ряд. Если в нем расставить

знаки с их чередованием, то получим сходящиеся ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  и

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Расставим знаки по правилу «два плюса – один минус»,

получим ряд  $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots$ . Рассмотрим его час-

тичные суммы  $A_{3k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Любую из них можно разбить на две  $A'_{3k}$  и  $A''_{3k}$ , включая в первую положительные, а во вторую отрица-

тельные члены. Получим  $A'_3 = 1 + \frac{1}{2}$ ,  $A''_3 = -\frac{1}{3}$ ;

$$A'_6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \quad A''_6 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \right);$$

$$A'_9 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \quad A''_9 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \text{ и т.д.}$$

Последовательность частичных сумм  $A'_3$ ,  $A''_6$ ,  $A'_9$ , ... монотонно убывающая и имеет своим пределом  $-\infty$ . Это следует из того, что

$A''_{3k} = -\frac{1}{3} H_k$ , где  $H_k$  – сумма  $k$  первых членов гармонического ря-

да (расходящегося). В то же время из почленного сравнения частич-

ных сумм  $A'_{3k}$  и  $A''_{3k}$  следует, что  $A'_{3k} > 2|A''_{3k}|$  при любом  $k = 1, 2, \dots$

Этого достаточно для вывода, что  $A_{3k} = A'_{3k} + A''_{3k} \rightarrow +\infty$  при

$k \rightarrow \infty$ . Так как промежуточные частичные суммы (они имеют вид

$A_{3k+1}$  и  $A_{3k+2}$ ) отличаются от  $A_{3k}$  положительными слагаемыми, то

$A_{3k+2} > A_{3k+1} > A_{3k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Следовательно,  $A_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Ряд расходится.

**Признак Лейбница сходимости.** Рассмотрим знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \text{ Если } |a_n| > |a_{n+1}| \text{ для любого } n = 1, 2, \dots \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \text{ то ряд сходится.}$$

При этом любой остаток ряда имеет знак первого своего члена и меньше его по абсолютной величине.

Попытаемся усилить утверждение, снимая отдельные предположения.

**10.46, 10.47. Ряды (расходящийся и сходящийся), удовлетворяющие всем требованиям признака Лейбница, кроме знакочередования.** Ряд, рассмотренный в предыдущем примере,



$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \dots$$

удовлетворяет всем предположениям признака Лейбница, кроме условия знакопеременования. Как было показано выше, ряд расходится. Видим, что снятие названного условия делает утверждение (признак сходимости) ложным.

С другой стороны, требование знакопеременования не является необходимым для сходимости ряда с членами переменного знака. Ряд с аналогичным правилом расстановки знаков

$$1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} - \frac{1}{9^2} + \dots$$

также удовлетворяет всем предположениям признака Лейбница, исключая условие знакопеременования. Однако он сходится.

**10.48, 10.49. Ряды (расходящийся и сходящийся), удовлетворяющие всем требованиям признака Лейбница, кроме монотонности убывания абсолютной величины членов ряда.** Рассмотрим

ряд  $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \dots$ , удовлетворяющий

всем требованиям признака Лейбница, кроме упомянутого условия монотонности. Его частичные суммы  $A_{2k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , могут быть представлены в виде  $A_{2k} = A'_k - A''_k$ , где  $A'_k$  и  $A''_k$  — частичные суммы

рядов  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  соответственно. Так как первый ряд расходя-

щийся, а второй — сходящийся, то  $A_{2k} \rightarrow +\infty$  при  $k \rightarrow \infty$ . Учитывая, что промежуточные частичные суммы  $A_{2k-1} > A_{2k}$ , получаем  $A_n \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Ряд расходится. Снятие условия монотонности делает утверждение ложным.

В то же время требование монотонности не является необходимым для сходимости знакопеременующегося ряда. Рассмотрим ряд  $1 - 1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \dots$ . Он отвечает всем условиям теоремы, исключая условие монотонности. Однако ряд сходится.

**Признак Абеля сходимости.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ . Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

сходится, а последовательность  $\{a_n\}$  является монотонной и ограниченной,  $|a_n| \leq K$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

Удалением отдельных предположений попытаемся усилить утверждение.

**10.50, 10.51. Ряды (расходящийся и сходящийся), удовлетворяющие всем требованиям признака Абеля, кроме сходимости**

ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Пусть  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $b_n = n$ . Получим расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ с общим членом } a_n b_n = 1.$$

При тех же предположениях существует сходящийся ряд. Пусть

$a_n = \frac{1}{n}$ ,  $b_n = (-1)^n$ . Имеем сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  с общим членом

$$a_n b_n = \frac{(-1)^n}{n}.$$

**10.52, 10.53. Ряды (расходящийся и сходящийся), удовлетворяющие всем требованиям признака Абеля, кроме монотонно-**

**сти последовательности  $\{a_n\}$ .** Примем  $a_n = (-1)^n$ ,  $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится. Получим расходящийся гармонический ряд с общим}$$

$$\text{членом } a_n b_n = \frac{1}{n}.$$

Но при тех же условиях существует сходящийся ряд. Пусть

$a_n = (-1)^n$ ,  $b_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится. Получим сходящийся

гармонический ряд с общим членом  $a_n b_n = \frac{1}{n^2}$ .

**10.54, 10.55. Ряды (расходящийся и сходящийся), удовлетворяющие всем требованиям признака Абеля, кроме ограничен-**

**ности последовательности  $\{a_n\}$ .** Положим  $a_n = n$ ,  $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сходится. Получим расходящийся ряд с общим членом}$$

$$a_n b_n = (-1)^n.$$

Те же предположения могут привести к сходящемуся ряду.

Примем  $a_n = n$ ,  $b_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится. Получим сходящийся ряд с общим членом  $a_n b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ .

Нарушим все три предположения утверждения, но получим сходящийся ряд. Пример.

**10.56. Сходящийся ряд вида  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ , не удовлетворяющий**

**всем трем предположениям признака Абеля.** Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  расходится:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$ , последовательность  $\{a_n\}$  немонотонная и неограниченная:  $a_n = (-1)^{n+1} \ln(n+1)$ . Однако полученный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$  — сходящийся.

**Признак Дирихле сходимости.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ . Если частичные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  в совокупности ограничены:  $|B_n| \leq M$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а числа  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , образуют монотонную последовательность, стремящуюся к нулю:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$  сходится.

Попытаемся усилить утверждение удалением отдельных предположений.

**10.57, 10.58. Ряды (расходящийся и сходящийся), удовлетворяющие всем требованиям признака Дирихле, кроме ограниченности частичных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .** Положим  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $b_n = \sqrt{n}$ .

Получим расходящийся ряд с общим членом  $a_n b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

В этих же предположениях имеем сходящийся ряд. Пусть  $a_n = \frac{1}{n}$ ,  $b_n = \frac{1}{n}$ . Получим сходящийся ряд с общим членом  $a_n b_n = \frac{1}{n^2}$ .

**10.59, 10.60.** Ряды (расходящийся и сходящийся), удовлетворяющие всем требованиям признака Дирихле, кроме монотонности последовательности  $\{a_n\}$ . Примем  $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ,  $b_n = (-1)^n$ .

Получим расходящийся ряд с общим членом  $a_n b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ .

При этих же условиях существует сходящийся ряд. Положим  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Получим сходящийся ряд с общим членом  $a_n b_n = \frac{1}{n^2}$ .

**10.61, 10.62.** Ряды (расходящийся и сходящийся), удовлетворяющие всем требованиям признака Дирихле, кроме стремления последовательности  $\{a_n\}$  к нулю. Предположим  $a_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $b_n = (-1)^n$ . Отсюда получим расходящийся ряд с общим членом  $a_n b_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ .

Однако при таких же предположениях существует сходящийся ряд. Пусть  $a_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Получим сходящийся ряд с общим членом  $a_n b_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ .

Приведем пример, в котором нарушены все три условия, а ряд сходится.

**10.63.** Сходящийся ряд вида  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ , не удовлетворяющий всем трем предположениям признака Дирихле. И в этом случае подходит ряд из примера 10.56. Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  с неограниченными в совокупности частичными суммами:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$  (он имеет сумму  $+\infty$ ) и последовательность  $\{a_n\}$  немонотонную и не имеющую нулевого предела:  $a_n = (-1)^{n+1} \ln(n+1)$ . Однако ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$  получился сходящимся.

### 10.4. Теоремы о сходящихся рядах

**Теорема о свойстве ассоциативности сходящегося ряда.** Рассмотрим сходящийся ряд  $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Объединим все члены ряда в группы, не меняя их порядка, и обозначим:

$$b_1 = a_1 + \dots + a_{n_1}, \quad b_2 = a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}, \quad \dots, \quad b_k = a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}, \quad \dots$$

Здесь  $\{n_k\}$  есть некоторая строго возрастающая последовательность номеров. Тогда ряд, составленный из этих сумм:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = (a_1 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + \dots + (a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}) + \dots$$

сходится и имеет сумму  $A$ , т.е. сходящийся ряд обладает свойством ассоциативности.

Покажем, что перенос этого свойства на расходящиеся ряды некорректен. Приведем контрпримеры.

**10.64, 10.65, 10.66. Расходящиеся ряды, которые не обладают свойством ассоциативности.** Сгруппируем члены расходящегося ряда  $1-1+1-1+\dots+(-1)^{n-1}+\dots$  так:  $(1-1)+(1-1)+\dots+(1-1)+\dots$ , получим сходящийся ряд  $0+0+\dots+0+\dots=0$ . Сгруппируем его другим образом:  $1+(-1+1)+(-1+1)+\dots+(-1+1)+\dots$ , получим сходящийся ряд  $1+0+0+\dots+0+\dots=1$ . Получили различные суммы.

Рассмотрим расходящийся ряд  $1-2+3-4+5-6+\dots$ . Сгруппируем его члены следующим способом:  $(1-2)+(3-4)+(5-6)+\dots$ . Получим расходящийся ряд  $-1-1-1-\dots$ , последовательность его частичных сумм имеет предел  $-\infty$ . Выполним иную группировку:  $1+(-2+3)+(-4+5)+\dots$ . Имеем ряд  $1+1+1+\dots$ , он расходится, последовательность частичных сумм имеет предел  $+\infty$ .

Возьмем расходящийся ряд  $1-2+2-3+3-4+4-\dots$ . Группируем первым способом:  $(1-2)+(2-3)+(3-4)+\dots$ , получаем расходящийся ряд  $-1-1-1-\dots$ . Группируем его вторым способом:  $1+(-2+2)+(-3+3)+\dots$ , получаем сходящийся ряд  $1+0+0+\dots$ .

**Теорема Дирихле.** Пусть ряд  $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  абсолютно сходится. Тогда ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ , полученный из него произвольной перестановкой членов, также сходится и имеет ту же сумму  $A$ , т.е. абсолютно сходящийся ряд обладает свойством коммутативности.

Неабсолютно сходящиеся ряды будут объектами нашего внимания ниже,

при рассмотрении теоремы Римана. Сейчас посмотрим, что может происходить с расходящимися рядами при перестановке их членов. Если общий член расходящегося ряда не стремится к нулю, то, очевидно, при перестановке его членов это свойство ряда сохранится, и он останется расходящимся. Расходящийся ряд с положительными (отрицательными) членами при перестановке его членов также останется расходящимся. Сделаем обобщающее предположение, что при перестановке членов любого расходящегося ряда мы всегда будем получать расходящийся ряд. Приведем контрпример к этому утверждению.

**10.67. Расходящийся ряд, перестановкой членов которого получен ряд сходящийся.** Используем свойство обратимости перестановки членов ряда и для начала из неабсолютно сходящегося ряда получим перестановкой его членов расходящийся ряд. Затем обращением процесса перестановки получим из расходящегося ряда – сходящийся. Таким способом построим требуемый контрпример. Возьмем сходящийся (неабсолютно) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \quad (10.9)$$

Составим из всех подряд идущих положительных членов ряда (10.9) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots, \quad (10.10)$$

аналогично – из отрицательных членов – ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{2k} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots \quad (10.11)$$

Заметим, что расходящимися являются оба ряда (10.10) и (10.11). Действительно, если бы оба эти ряда сходились, то ряд (10.9) сошелся бы абсолютно; если бы сошелся только один из них, то ряд (10.9) расшелся бы.

Искомый расходящийся ряд  $P$  будем строить следующим образом. Сначала в ряд  $P$  будем брать последовательно члены (они положительные) из ряда (10.10). Сразу после того как частичная сумма ряда  $P$  станет больше 1, будем брать последовательно члены (они отрицательны) ряда (10.11). Как только частичная сумма ряда  $P$  станет меньше 0,9, продолжим брать последовательные члены ряда (10.10), и т.д. Таким образом, будем попеременно брать члены то положительные, то отрицательные, обеспечивая получение частичных сумм  $P_{n_i}$  ряда  $P$  таких, что  $P_{n_1} > 1$ ,  $P_{n_2} < 0,9$ ,  $P_{n_3} > 1$ ,  $P_{n_4} < 0,9, \dots$ , где  $n_1 < n_2 < \dots$ . Заметим, что расходимость рядов

(10.10) и (10.11) обеспечивает выполнимость описанного процесса. В результате имеем ряд  $P$ , составленный из всех (и только) членов ряда (10.9), т.е. полученный перестановкой его членов. Очевидно, что ряд  $P$  будет расходящимся, так как последовательность его частичных сумм не имеет предела. Выпишем члены ряда  $P$ :

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \dots \quad (10.12)$$

Обратной перестановкой членов расходящегося ряда (10.12) получим сходящийся ряд (10.9).

**Теорема Римана.** Если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится не абсолютно, то для любого  $L$ , конечного, или равного  $-\infty$  или  $+\infty$ , существует перестановка членов этого ряда, такая, что полученный перестановкой ряд имеет сумму  $L$ .

Перестановка членов не абсолютно сходящегося ряда может дать, наряду с перечисленными, еще один результат: преобразованный ряд будет расходиться, не имея даже бесконечной суммы. Пример.

**10.68. Перестановка членов не абсолютно сходящегося ряда, приводящая к ряду, не имеющему даже бесконечной суммы.** Процедура такой перестановки описана в предыдущем контрпримере. Там мы переставили члены не абсолютно сходящегося ряда (10.9) так, что получили расходящийся ряд (10.12), последовательность частичных сумм которого не имеет предела, даже бесконечного.

Выполненная в предыдущем контрпримере перестановка членов ряда может быть обобщена на случай любого не абсолютно сходящегося ряда. Опишем ее в общем виде. Любой не абсолютно сходящийся ряд содержит в себе бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов. Из них можно составить два расходящихся ряда: положительный (из положительных членов) и отрицательный (из отрицательных членов), имеющих суммы  $+\infty$  и  $-\infty$  соответственно. Выбирая (достаточно длинными сериями) подряд идущие члены этих расходящихся рядов (попеременно положительного и отрицательного), всегда можно сделать последовательность частичных сумм получаемого ряда не имеющей предела. При этом последовательность частичных сумм может быть сделана как ограниченной (например, колеблющейся с постоянной амплитудой), так и неограниченной (например, колеблющейся с неограниченно возрастающей амплитудой).

Выше мы перестановкой членов расходящегося ряда (10.12), который,

кстати, не имел даже бесконечной суммы, получили неабсолютно сходящийся ряд (10.9). Согласно теореме Римана, выполнив некоторую перестановку уже членов ряда (10.9), мы можем получить ряд, имеющий любую конечную или бесконечную сумму  $L$ . Следовательно, используя композицию двух указанных перестановок, мы можем, переставляя члены расходящегося ряда (10.12), получить ряд, имеющий произвольную сумму  $L$ . Сделаем следующее обобщающее предположение. Любой расходящийся ряд, содержащий бесконечные множества как положительных, так и отрицательных членов, общий член которого стремится к нулю, может при перестановке его членов дать ряд, имеющий произвольно заданную (конечную или бесконечную) сумму  $L$ . Приведем контрпример к этому утверждению.

**10.69. Знакопеременный расходящийся ряд с общим членом, стремящимся к нулю, перестановка членов которого не может дать ряд, имеющий любую заданную сумму, кроме  $+\infty$ . Рассмотрим ряд**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots, \quad (10.13)$$

где  $a_n = 1/([n/2]+1)$ , если  $n$  – нечетное;  $a_n = -1/(n/2)^2$ , если  $n$  – четное. Составим ряды из его положительных и отрицательных членов:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \quad (10.14)$$

$$-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \dots - \frac{1}{n^2} - \dots \quad (10.15)$$

Ряд (10.14) расходится, ряд (10.15) сходится к числу  $-\frac{\pi^2}{6}$ . Отсюда получаем, что ряд (10.13) расходится. Очевидно, что, переставляя члены ряда (10.13), т.е. выбирая попеременно какие-то серии членов из рядов (10.14) и (10.15), мы не можем получить ряд с суммой  $L \leq -\frac{\pi^2}{6}$ . Более того, так как в частичной сумме  $P_n$  получаемого при перестановке ряда, при достаточно больших  $n$  оказывается любое заданное число первых членов расходящегося ряда (10.14), а частичные суммы сходящегося ряда (10.15) ограничены, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = +\infty$ . И это справедливо для любой перестановки.

Заметим, что в опровергнутом нами утверждении не хватает требования о расходимости обоих рядов, составленных из положительных и отрицательных членов.



**Теорема Коши.** Пусть даны два сходящихся ряда:  $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $B = \sum_{m=1}^{\infty} b_m$ .

Если оба ряда сходятся абсолютно, то ряд

$$a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1) + \dots, \quad (10.16)$$

составленный из произведений членов рядов  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ , также сходится и имеет сумму  $AB$ .

В то же время произведение двух неабсолютно сходящихся рядов может расходиться. Приведем пример, принадлежащий Коши, цитируется из [2], т. II, с. 42–43.

**10.70. Произведение двух неабсолютно сходящихся рядов, дающее расходящийся ряд.** Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots,$$

по признаку Лейбница сходится, но не абсолютно. Если умножить его на самого себя, то получится ряд (10.16) с общим членом

$$(-1)^{n+1} \left( \frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1} \right).$$

Так как каждое слагаемое в скобках больше  $\frac{1}{n}$ , то все выражение по абсолютной величине больше 1, и ввиду нарушения необходимого условия сходимости ряд расходится.

Однако если умножить сам на себя другой неабсолютно сходящийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$ , то получим сходящийся ряд, см. [8], т. II, с. 328–329. Сразу заметим, что не только произведение двух сходящихся рядов может сходиться. Может и произведение расходящихся рядов оказаться сходящимся. Приведем интересный пример из [1], с. 83.

**10.71. Произведение двух расходящихся рядов, дающее абсолютно сходящийся ряд.** Перемножим два расходящихся ряда:

$$2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + \dots \text{ и } -1 + 1 + 1 + \dots + 1^{n-1} + \dots$$

Получим абсолютно сходящийся ряд

$$-2 + (2 \cdot 1 - 2 \cdot 1) + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2^2(-1)) + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^3(-1)) + \dots + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2^2 \cdot 1 + 2^3 \cdot 1 + 2^4(-1)) + \dots = -2 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0^{n+1} + \dots$$

Равенство нулю выражений в скобках следует из известного тождества  $2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{m-1} \equiv 2^m$ , где  $m = 2, 3, \dots$

Наконец покажем, что произведение сходящегося ряда на расходящийся ряд может оказаться либо сходящимся, либо расходящимся. Приведем простые примеры.

**10.72. Произведения сходящегося и расходящегося рядов, дающие сходящийся и расходящийся ряды.** Произведение сходящегося ряда  $0+0+\dots+0+\dots$  на расходящийся  $1+1+\dots+1+\dots$  дает сходящийся ряд  $0+0+\dots+0+\dots$ .

Произведение сходящегося ряда  $1+0+0+\dots+0+\dots$  на расходящийся ряд  $1+1+\dots+1+\dots$  дает расходящийся ряд  $1+1+\dots+1+\dots$ .

## 10.5. Бесконечные произведения

**Определение значения бесконечного произведения.** Значением бесконечного произведения  $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \cdot \dots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$  называется конечный или бесконечный предел  $P$  частичного произведения  $P_n$ ,  $P_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ , при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P$ , если он существует. Если бесконечное произведение имеет конечное значение  $P$  и  $P \neq 0$ , то произведение называют сходящимся, в противном случае – расходящимся.

Для установления сходимости бесконечных произведений и вычисления их значений применяют прием логарифмирования частичных произведений, с помощью которого устанавливают аналогию между бесконечным произведением  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n \cdot \dots$  и рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \ln p_1 + \ln p_2 + \dots + \ln p_n + \dots$ , см. [2], т. II, с. 46. С использованием этой аналогии примеры и контрпримеры, приведенные выше для рядов, можно переформулировать для бесконечных произведений.

Для начала приведем примеры сходящегося и расходящихся бесконечных произведений.

**10.73. Пример сходящегося бесконечного произведения.** Бесконечному произведению  $\prod_{n=1}^{\infty} e^{1/2^n} = e^{1/2} \cdot e^{1/2^2} \cdot \dots \cdot e^{1/2^n} \cdot \dots$  отвечает

ряд  $\ln e^{1/2} + \ln e^{1/2^2} + \dots + \ln e^{1/2^n} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1$ . Отсюда получаем, что значение бесконечного произведения будет равно  $P = e^1 = e$ .

**10.74, 10.75. Примеры расходящихся бесконечных произведений со значениями  $+\infty$ .** Бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} e^{1/n} = e \cdot e^{1/2} \cdot e^{1/3} \cdot \dots \cdot e^{1/n} \cdot \dots$$

имеет аналогией расходящийся гармонический ряд

$$\ln e + \ln e^{1/2} + \ln e^{1/3} + \dots + \ln e^{1/n} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

и, следовательно, само расходится.

Произведение  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \dots$  приводит к ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 2 + \ln \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots$ , расходимость которого показана в примере 10.3. Следовательно, данное произведение расходится.

В этих примерах последовательности частичных сумм  $\{A_n\}$  рядов имели бесконечный предел, равный  $+\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$ , при этом сами последовательности частичных произведений  $\{P_n\}$  имели предел, равный  $+\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{A_n} = +\infty$ . Приведем другие примеры, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = -\infty$ , или не существует.

**10.76, 10.77. Примеры расходящихся бесконечных произведений со значением 0 и не существующим.** Произведение

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots$$

имеет аналогом ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n-1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} (\ln(n-1) - \ln n)$ .

Частичная сумма этого ряда

$$A_n = \ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \dots + \ln(n-1) - \ln n = \ln 1 - \ln n = \ln \frac{1}{n}$$

имеет предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{1}{n} = -\infty$ . Соответственно получаем,

$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{A_n} = 0$ . Бесконечное произведение расходится.

Бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1,25 + (-1)^n \cdot 0,75) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \dots \cdot (1,25 + (-1)^n \cdot 0,75) \cdot \dots$$

расходится, так как последовательность  $\{P_n\}$  его частичных произведений  $P_n = 0,75 + (-1)^n \cdot 0,25$  не имеет предела.

**Необходимое условие сходимости бесконечного произведения.** Пусть бесконечное произведение сходится. Тогда предел его общего члена  $p_n$  равен единице,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1$ .

Отсюда сразу получаем расходимость произведения из предыдущего примера. Сформулированное необходимое условие, однако, не является достаточным для сходимости бесконечного произведения. Приведем контрпримеры.

**10.78. Расходящиеся бесконечные произведения, для которых выполняется необходимый признак сходимости.** Бесконечные произведения из примеров 10.74–10.76 расходятся, хотя их общие члены  $e^{1/n}$ ,  $1 + \frac{1}{n}$  и  $1 - \frac{1}{n}$  соответственно имеют при  $n \rightarrow \infty$  пределы, равные единице.

**Критерий сходимости бесконечного произведения.** Представим бесконечное произведение  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  в виде

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), \quad (10.17)$$

где  $p_n = 1 + a_n$ . Если для всех  $n \geq N$ , где  $N$  – некоторое натуральное число, будет выполняться  $a_n > 0$  (или  $a_n < 0$ ), то для сходимости произведения (10.17) необходима и достаточна сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Примеры (10.75) и (10.76) иллюстрируют (от обратного) это утверждение, если учесть расходимость гармонического ряда. В этих примерах соблюдается условие  $a_n > 0$  (или  $a_n < 0$ ) для всех  $n$ . Заметим, что и при нарушении требования о постоянстве знака величин  $a_n$  произведение (10.17) и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  могут сходиться одновременно. Приведем пример.

**10.79. Бесконечное произведение  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$  и знакопере-**

**дующийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , которые сходятся (оба).** Рассмотрим беско-

нечное произведение  $\prod_{n=2}^{\infty} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ . В этом случае  $p_n = 1 + a_n$ , где

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $n = 2, 3, \dots$  Аналогом ему является ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$ .

Он знакопередающийся, так как аргумент логарифма поочередно, то больше, то меньше единицы. Преобразуем общий член ряда, получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n + (-1)^n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} (\ln(n + (-1)^n) - \ln n).$$

Частичная сумма  $A_n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , ряда запишется следующим образом:  $A_n = \ln 3 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 5 - \ln 4 + \ln 4 - \ln 5 + \dots +$

$+\ln(n + (-1)^n) - \ln n$ . Она стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , так как нечетные частичные суммы  $A_3, A_5, A_7, \dots$  равны нулю, а при четных  $n$

частичные суммы равны величине  $\ln(n+1) - \ln n = \ln \frac{n+1}{n}$ , которая

стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, сумма  $A$  ряда равна  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = 0$ . Соответственно бесконечное произведение сходится и равно  $P = e^A = e^0 = 1$ . Остается заметить, что ряд

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  также сходится.

**Достаточное условие сходимости бесконечного произведения.** Если бесконечное произведение  $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$  представлено в виде (10.17) и если сходятся ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ , то бесконечное произведение сходится.

Заметим, что в данном утверждении не требуется постоянство знака у чисел  $a_n$ . Пример.

**10.80. Пример выполнения достаточного условия сходимости бесконечного произведения.** Бесконечное произведение

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right),$$

которое рассматривалось в предыдущем примере, отвечает всем

требованиям утверждения. Ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  сходится, а вместе

с ним сходится и ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Как было показано ранее, бес-

конечное произведение сходится, несмотря на знакочередование членов ряда  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ .

Приведем пример неприменимости утверждения.

**10.81. Бесконечное произведение, к которому неприменимо достаточное условие сходимости бесконечного произведения.**

Рассмотрим бесконечное произведение  $\prod_{n=2}^{\infty} \left( 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$ . Для него ряд

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  сходится, а ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится. К этому произведению данное утверждение неприменимо.

**Определение абсолютной сходимости бесконечного произведения.** Бесконечное произведение называют абсолютно сходящимся, если абсолютно сходится ряд из логарифмов его множителей.

**Критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения.** Для абсолютной сходимости бесконечного произведения (10.17) необходима и достаточна абсолютная сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Приведем примеры абсолютно и неабсолютно сходящихся бесконечных произведений.

**10.82. Примеры абсолютно и неабсолютно сходящихся бесконечных произведений.** Произведение из примера 10.73 абсолютно сходящееся непосредственно по определению, так как ряд

$$\ln e^{1/2} + \ln e^{1/2^2} + \dots + \ln e^{1/2^n} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1,$$

составленный из логарифмов его членов, абсолютно сходится.

Произведение из примера 10.79 сходится (согласно критерию абсолютной сходимости) неабсолютно, так как ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  сходится неабсолютно.

### Упражнения

**10.1.** Опровергнуть контрпримером следующее утверждение: если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится, но  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  сходится.

**10.2.** Привести контрпример, опровергающий перенос теоремы 2 сравнения рядов с неотрицательными членами на произвольные ряды.

**10.3.** Определить, применимы ли признаки Коши и Даламбера к сходящемуся ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , где  $a_n = \begin{cases} 1/n^2, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ 1/n^3, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$

**10.4.** Применим ли к ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  из предыдущего упражнения интегральный признак Маклорена–Коши? Какую функцию  $f(x)$  можно использовать?

**10.5.** Опровергнуть контрпримером утверждение, обратное теореме Коши, а именно: если сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ .

**10.6.** Показать, что сумма знакопередающегося ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$  не может равняться нулю, если выполняются все предположения признака Лейбница:  $a_n > a_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \rightarrow 0$ . Какое предположение надо снять, чтобы получить знакопередающийся ряд с нулевой суммой? Приведите пример такого ряда.

**10.7.** Переставляя члены расходящегося (и не имеющего суммы) ряда  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  получить ряды, имеющие суммы  $+\infty$  и  $-\infty$ .

**10.8.** Сформулировать аналог признака Коши сходимости рядов для случая бесконечных произведений. Переформулировать пример 10.19 на случай соответствующего бесконечного произведения.

## РАЗДЕЛ 11

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

### 11.1. Равномерная сходимость последовательности и ряда

**Определение равномерной сходимости функциональной последовательности.** Пусть дана последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (11.1)$$

от переменной  $x$ , определенных в некоторой области  $X$ . Пусть для любого  $x \in X$  эта последовательность имеет конечный предел; тем самым определяется функция  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ,  $x \in X$ , которая называется предельной функцией последовательности (11.1). Если последовательность (11.1) имеет в  $X$  предельную функцию  $f(x)$  и для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такой не зависящий от  $x$  номер  $N$ , что при всех  $n > N$  неравенство  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  выполняется для всех  $x \in X$ , то последовательность (11.1) сходится к функции  $f(x)$  равномерно в области  $X$ .

**11.1, 11.2. Примеры равномерно и неравномерно сходящихся функциональных последовательностей.** Функциональная последовательность

$f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  в любой области определения  $X$  имеет предельной функцией тождественный нуль,  $f(x) \equiv 0$ ,

так как при любом фиксированном  $x$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{n} = 0$ . Последовательность сходится к предельной функции равномерно, так как при любом  $\varepsilon > 0$  достаточно выбрать  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ , чтобы для всех  $n > N$  нера-

венство  $|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{\sin x}{n} \right| < \varepsilon$  выполнялось для всех  $x$  из  $X$ .



Функциональная последовательность  $f_n(x) = (\sin x)^n$  на отрезке  $[0, \pi]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , (рис. 11.1) имеет предельную функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0, \pi], x \neq \pi/2, \\ 1, & \text{если } x = \pi/2. \end{cases}$$

На рис. 11.1 показаны графики функций  $y = (\sin x)^n$  при  $n = 1, 2, 3, 4$  и некотором большом  $n$ . Действительно, если  $x_0 \in [0, \pi]$ ,  $x_0 \neq \frac{\pi}{2}$ , то  $0 \leq \sin x_0 < 1$  и числовая последовательность  $(\sin x_0)^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ; если  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ , то  $\sin x_0 = 1$  и  $(\sin x_0)^n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ . В этом

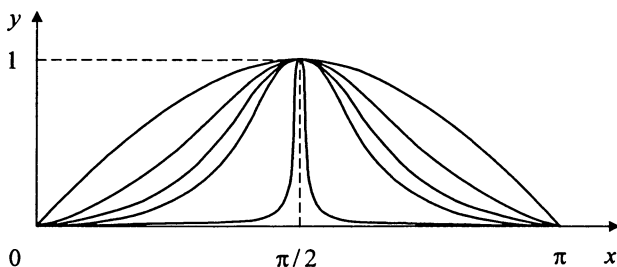


Рис. 11.1

случае сходимость не будет равномерной, так как, например, для  $\varepsilon = 0,5$  и любого  $n = n_0$  существует такое значение  $x_0$ , что  $(\sin x_0)^{n_0} > \varepsilon = 0,5$ . Для этого требуется, чтобы  $\sin x_0$  был больше числа  $\sqrt[n_0]{0,5} < 1$ . В силу непрерывности функции  $\sin x$  найдется такая окрестность точки  $x = \frac{\pi}{2}$ , в которой  $\sqrt[n_0]{0,5} < \sin x \leq 1$ . Из этой окрестности и возьмем точку  $x_0$ .

Равномерность сходимости одной и той же функциональной последовательности зависит от области, на которой эта последовательность рассматривается. Пример.

**11.3. Функциональная последовательность, сходящаяся неравномерно на некоторой области  $D_1$  и равномерно на  $D_2 \subset D_1$ .** Рассмотрим последовательность из примера 11.2, но уже на отрезке  $[0, \pi/4]$ . Из сказанного выше следует, что на данном отрезке предельная функция  $f(x) \equiv 0$ . Заметим, что в силу строго монотонного

возрастания функции  $\sin x$  на данном отрезке выполняется  $\sin x \leq \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Соответственно  $(\sin x)^n \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$  для любого

$x \in [0, \pi/4]$ . Так как  $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $N$  такое,

что  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^N < \varepsilon$  и для всех  $n > N$  и всех  $x \in [0, \pi/4]$  выполняется

$(\sin x)^n \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^N < \varepsilon$ . Это и означает равномерную сходи-

мость данной последовательности на отрезке  $[0, \pi/4]$ .

**Определение равномерной сходимости функционального ряда.** Пусть дан ряд, члены которого – функции от переменной  $x$  в некоторой области  $X$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (11.2)$$

Предположим, что этот ряд сходится (имеет конечную сумму) при любом  $x \in X$ ; тем самым его сумма – некоторая функция  $f(x)$ ,  $x \in X$ . Пусть  $f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$  – частичная сумма ряда, а остаток ряда после

$n$ -го члена  $\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) = f(x) - f_n(x)$ , тогда при любом фиксированном

$x \in X$   $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = 0$ . Ряд (11.2), сходящийся для всех  $x \in X$ , называется равномерно сходящимся в области  $X$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такой независимый от  $x$  номер  $N$ , что при всех  $n > N$  неравенство  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$  или  $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$  выполняется для всех  $x \in X$ .

**11.4, 11.5. Функциональный ряд, сходящийся неравномерно на некоторой области  $D_1$  и равномерно на  $D_2 \subset D_1$ .** Функцио-

нальный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n$  в интервале  $(0, \pi/2)$  представляет собой,

при любом фиксированном значении  $x = x_0$ , сходящуюся геометрическую прогрессию со знаменателем  $q = \sin x_0$ ,  $0 < q < 1$ . Остаток

ряда  $\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\sin x)^k = \frac{(\sin x)^{n+1}}{1 - \sin x}$  при любом фиксированном

$x = x_0$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , что свидетельствует только о сходимости ряда в интервале  $(0, \pi/2)$ . Но для  $\varepsilon = 1$  и любого, сколь угодно большого, фиксированного  $n = n_0$  найдется достаточно

близкое слева к точке  $\pi/2$  значение  $x$ , при котором выполняется

$$\varphi_{n_0}(x) = \frac{(\sin x)^{n_0+1}}{1 - \sin x} > \varepsilon = 1. \text{ Это следует из существования в данной}$$

точке предела слева, равного  $\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} \frac{(\sin x)^{n_0+1}}{1 - \sin x} = +\infty$ . Ряд сходится неравномерно.

Однако, если этот ряд рассмотреть, скажем, на интервале  $(0, \pi/4)$ , то его (ряда) сходимость будет равномерной. Действительно, в силу строго монотонного возрастания по  $x$  на интервале  $(0, \pi/4)$  величины  $\frac{(\sin x)^{n_0+1}}{1 - \sin x}$  (числитель растет, знаменатель убывает) остаток ряда подчиняется следующему неравенству

$$\varphi_{n_0}(x) = \frac{(\sin x)^{n_0+1}}{1 - \sin x} \leq \frac{(\sin(\pi/4))^{n_0+1}}{1 - \sin(\pi/4)} = \frac{(\sqrt{2}/2)^{n_0+1}}{1 - \sqrt{2}/2}$$

при всех  $x \in (0, \pi/4)$ . И далее, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $N$ ,

не зависящее от  $x$ , что выполняется  $\frac{(\sqrt{2}/2)^{N+1}}{1 - \sqrt{2}/2} < \varepsilon$  и, следовательно-

но, для всех  $n > N$  получаем  $\varphi_n(x) = \frac{(\sin x)^{n+1}}{1 - \sin x} \leq \frac{(\sqrt{2}/2)^{n+1}}{1 - \sqrt{2}/2} < \varepsilon$  независимо от  $x$ . Ряд сходится равномерно.

**Критерий Коши равномерной сходимости ряда.** Для равномерной сходимости ряда (11.2) в области  $X$  необходимо и достаточно, чтобы для любого числа  $\varepsilon > 0$  существовал такой не зависящий от  $x$  номер  $N$ , что при всех  $n > N$  и любом  $m = 1, 2, \dots$  неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+m} u_k(x) \right| = |u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m}(x)| < \varepsilon \quad (11.3)$$

выполнялось для всех  $x \in X$ .

Альтернативное предположение, что число  $m$  берется достаточно большим, но фиксированным,  $m = m_0$ , делает утверждение несправедливым.

**11.6. Неравномерно сходящийся функциональный ряд, для которого при  $n \rightarrow \infty$   $\sum_{k=n+1}^{n+m_0} u_k(x) \rightarrow 0$  равномерно на  $X$  для любого фиксированного  $m_0$ .** Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots,$$

где функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определены на всем полуинтервале  $[0, +\infty)$  так:

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right], \\ 0, & \text{для всех других } x, \end{cases} \quad (11.4)$$

здесь  $[t]$  – целая часть числа  $t$ . Иными словами, функция  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определяемая выражением (11.4), имеет при натуральном значении  $x$ ,  $x = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right]$  – целой части частичной суммы  $A_n$  гармонического ряда, единственное ненулевое (положительное) значение  $\frac{1}{n}$ . Так как гармонический ряд имеет сумму, равную  $+\infty$ , то для случая угодно большого натурального числа  $N$  найдется функция  $u_n(x)$ , принимающая свое единственное ненулевое значение  $\frac{1}{n}$  при  $x = N$ . Получим:  $u_1(1) = \frac{1}{1}$ ,  $u_2(1) = \frac{1}{2}$ ,  $u_3(1) = \frac{1}{3}$ ,  $u_4(2) = \frac{1}{4}$ ,  $u_5(2) = \frac{1}{5}$  и т.д.; при всех других значениях  $x \in [0, +\infty)$  эти функции равны нулю.

По определению функций (11.4) при любом  $x$  выполняется

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m_0}(x)| \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m_0} \leq \frac{m_0}{n+1}.$$

Очевидно, что при фиксированном значении  $m_0$ , для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое, достаточно большое,  $n$ , что величина  $\frac{m_0}{n+1}$ , а значит, и левая часть неравенства будут меньше  $\varepsilon$ .

Однако наш функциональный ряд сходится неравномерно. Покажем это. Любая частичная сумма  $f_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$  данного ряда, очевидно, не равна нулю только при конечном числе натуральных значений  $x = 1, 2, \dots, m(n)$ ,  $m(n) < n$ . При таких  $x$  она имеет значения, близкие к единице, а при всех  $x > m(n)$ ,  $f_n(x) \equiv 0$ . Сумма  $f(x)$  ряда имеет значения, близкие к единице при всех натуральных  $x$  (при возрастании натурального  $x$  – сколь угодно близкие к единице), и равна нулю во всех других точках. Данный ряд сходится в каждой точке к своей сумме  $f(x)$ , но его сходимость не-

равномерная, так как для  $\varepsilon = 0,5$  и любого  $n$ , при всех натуральных  $x > m(n)$ , выполняется  $|f_n(x) - f(x)| = f(x) > \varepsilon = 0,5$ .

Вместе с тем для установления неравномерности сходимости ряда с отрицательными (при всех  $x$ ) членами достаточно показать, что при некотором фиксированном  $m = m_0$  и любом  $n$  левая часть неравенства (11.3) может быть сделана подбором  $x$  больше некоторой положительной константы.

**11.7. Пример применения критерия Коши при некотором фиксированном значении  $m = m_0$ .** Возьмем из примера 11.4 в ин-

тервале  $(0, \pi/2)$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n$ . Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} &|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+m_0}(x)| = \\ &= (\sin x)^{n+1} + (\sin x)^{n+2} + \dots + (\sin x)^{n+m_0} \end{aligned}$$

для некоторого фиксированного  $m_0$ . По формуле суммы членов геометрической прогрессии последняя сумма, обозначим ее  $S_{m_0}$ , равна

$$S_{m_0} = \frac{(\sin x)^{n+1}(1 - (\sin x)^{m_0})}{1 - \sin x} \geq (\sin x)^{n+1}, \quad (11.5)$$

так как  $0 < \sin x < 1$  и  $1 - (\sin x)^{m_0} \geq 1 - \sin x$ . Если примем  $\varepsilon = 0,5$ , то, какое бы большое  $n = n_0$  мы ни взяли, найдется такая левая окрестность точки  $x = \pi/2$ , что в ней выполняется  $(\sin x)^{n_0+1} > 0,5 = \varepsilon$ . Отсюда, а также из (11.5) следует  $S_{m_0} > \varepsilon = 0,5$  для некоторого  $x$  из этой окрестности. Получаем, что ряд сходится неравномерно. Очевидно, в данном примере можно было ограничиться значением  $m = m_0 = 1$ .

**Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.** Если для всех членов функционального ряда (11.2) в области  $X$  выполняются неравенства

$$|u_n(x)| \leq c_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11.6)$$

где  $c_n$  — члены некоторого сходящегося числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots, \quad (11.7)$$

то ряд (11.2) сходится в  $X$  равномерно.

Про неравенство (11.6) говорят, что функциональный ряд (11.2) мажорируется числовым рядом (11.7), ряд (11.7) называют мажорантным рядом (мажорантой) для ряда (11.2). Не для всякого функционального ряда существуют мажорантные ряды. Пример.

**11.8\*. Функциональный ряд, для которого не существует мажоранта.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ , определенный и сходящийся на всей числовой оси. Так как члены ряда не ограничены на всей числовой оси, то мажорантный числовой ряд не существует.

Для сходящегося функционального ряда может не существовать мажорантный сходящийся ряд. Пример.

**11.9. Функциональный ряд, для которого не существует мажоранта (сходящаяся).** Для ряда из примера 11.6, так как  $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , для всех  $x \in [0, +\infty)$ , существует мажорант-

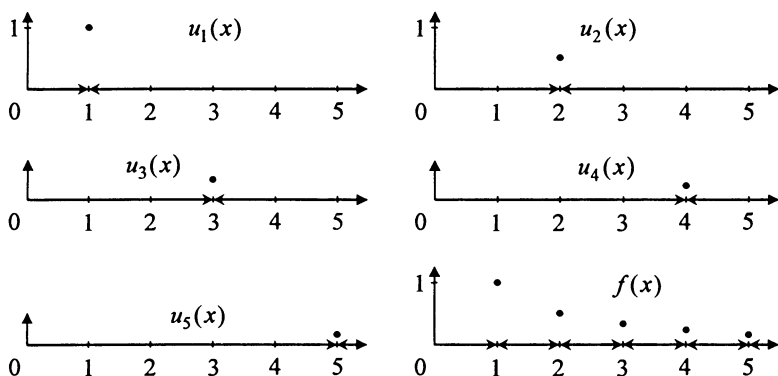


Рис. 11.2

ный числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , но он является расходящимся. Напомним, что ряд из примера 11.6 сходится неравномерно.

И для равномерно сходящегося функционального ряда может не существовать мажорантный сходящийся ряд. Пример.

**11.10. Равномерно сходящийся функциональный ряд, для которого не существует мажоранта (сходящаяся).** Несколько изменим определение ряда из примера 11.6 (рис. 11.2). Пусть функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определены на всем полуинтервале  $[0, +\infty)$ :

$$u_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = n, \\ 0, & \text{для всех других } x. \end{cases} \quad \text{Сумма ряда } f(x), \text{ очевидно, будет}$$

такой:  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x - \text{натуральное число,} \\ 0, & \text{для всех других } x. \end{cases}$  Частичная сумма

$f_n(x)$  ряда:  $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{если } x - \text{натуральное число, } x \leq n, \\ 0, & \text{для всех других } x. \end{cases}$  Сходи-

мость ряда к его сумме будет равномерной, так как для любого  $\varepsilon > 0$  возьмем  $N > \frac{1}{\varepsilon}$ , и для любого  $n > N$  будет выполняться

$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$  независимо от значения  $x$ . Однако

для всех  $x \in [0, +\infty)$  выполняется  $|u_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и мажор-

рантный числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится.

**Признак Абеля равномерной сходимости ряда.** Рассмотрим функциональный ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = a_1(x)b_1(x) + a_2(x)b_2(x) + \dots + a_n(x)b_n(x) + \dots, \quad (11.8)$$

где  $a_n(x)$ ,  $b_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , это функции от  $x$  в области  $X$ . Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = b_1(x) + b_2(x) + \dots + b_n(x) + \dots \quad (11.9)$$

равномерно сходится в области  $X$ , а функции  $a_n(x)$  (при любом фиксированном  $x \in X$ ) образуют монотонную последовательность и ограничены в совокупности, т.е. при любых  $x$  и  $n$  выполняется  $|a_n(x)| \leq K$ , где  $K$  – некоторая постоянная. Тогда ряд (11.8) сходится равномерно в области  $X$ .

Будем усиливать утверждение, последовательно снимая отдельные его предположения. Сначала допустим, что ряд (11.9) сходится неравномерно на  $X$ . Контрпример.

**11.11.** Ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$  такой, что ряд  $\sum b_n(x)$  сходится неравномерно, и также сходящийся неравномерно. Рассмотрим в интервале  $(0, \pi/2)$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n+1)}{n} (\sin x)^n$ . Здесь принимаем функ-

ции  $a_n(x) = \frac{x(n+1)}{n}$ ,  $b_n(x) = (\sin x)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Этот положитель-

ный ряд сходится, так как  $\frac{x(n+1)}{n} (\sin x)^n \leq 2x(\sin x)^n$ , а ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} 2x(\sin x)^n$  при любом фиксированном  $x \in (0, \pi/2)$  сходится как сумма бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  $q = \sin x$ ,  $0 < q < 1$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n$  в интервале  $(0, \pi/2)$  сходится неравномерно, см. пример 11.4. Все остальные предположения утверждения выполняются. Функции  $a_n(x) = \frac{x(n+1)}{n}$  (при каждом  $x$ ) образуют монотонную последовательность и в совокупности — при любых  $x \in (0, \pi/2)$  и  $n$  — ограничены, так как  $1 < \frac{n+1}{n} \leq 2$ , и  $|a_n(x)| < \pi$ . Покажем, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n+1)}{n} (\sin x)^n$  в интервале  $(0, \pi/2)$  сходится неравномерно. Пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда для любого, сколь угодно большого  $n = n_0$ , найдется достаточно близкое слева к  $\frac{\pi}{2}$  значение  $x$  (будем рассматривать  $x > \frac{\pi}{4}$ ), при котором остаток ряда больше  $\varepsilon = 1$ :

$$\varphi_{n_0}(x) = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{x(k+1)}{k} (\sin x)^k > \frac{\pi}{4} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} (\sin x)^k = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(\sin x)^{n_0+1}}{1 - \sin x} > \varepsilon = 1.$$

Существование такого  $x$  следует из существования (при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  слева) предела, равного  $\lim_{x \rightarrow \pi/2-0} \frac{(\sin x)^{n_0+1}}{1 - \sin x} = +\infty$ . Ряд сходится неравномерно.

Далее снимем в утверждении предположение о том, что функции  $a_n(x)$  (при каждом  $x$ ) образуют монотонную последовательность. Контрпример.

**11.12.** Ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$  такой, что функции  $a_n(x)$  при каждом  $x$  не образуют монотонную последовательность, и сходящийся неравномерно. Пусть  $a_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$ ,  $b_n(x) = (-1)^n \frac{x}{\sqrt[n]{n}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , в интервале  $(0, 1)$ . Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt[n]{n}}$  сходится при любом  $x \in (0, 1)$ . Заметим, что функции  $a_n(x)$  (при каждом  $x$ ) не образуют монотонную последовательность. Однако все осталь-



ные предположения выполняются. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{\sqrt[4]{n}}$  сходится равномерно в  $(0, 1)$ , так как абсолютная величина его остатка удовлетворяет (по признаку Лейбница сходимости знакопередающего ряда) ограничению  $|\varphi_n(x)| = x \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt[4]{k}} \right| < \frac{1}{\sqrt[4]{n+1}}$  и, независимо от значений  $x$ , может быть сделана меньше любого  $\varepsilon > 0$  при  $n > \frac{1}{\varepsilon^4} - 1$ . Функции  $a_n(x)$  в совокупности, при любых  $x$  и  $n$ ,

ограничены:  $|a_n(x)| \leq 1$ . В то же время ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  сходится неравномерно в интервале  $(0, 1)$ . Покажем это, используя критерий Коши равномерной сходимости ряда. Примем  $\varepsilon = 1$ , тогда для любого, сколь угодно большого, но фиксированного  $n$ , приняв  $m = n$ , получим при  $x$ , достаточно близком к 1,  $\sqrt[4]{2/n} < x < 1$ ,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x^k}{\sqrt{k}} \right| = \underbrace{\frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} + \frac{x^{n+2}}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{x^{2n}}{\sqrt{2n}}}_n > \frac{n x^{2n}}{\sqrt{2n}} = \frac{\sqrt{n} \cdot x^{2n}}{\sqrt{2}} > \varepsilon = 1.$$

Следовательно, ряд сходится неравномерно в  $(0, 1)$ .

Наконец, снимем в утверждении предположение о том, что функции  $a_n(x)$  в совокупности (при любых  $x$  и  $n$ ) ограничены. Контрпример.

**11.13.** Ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$  такой, что функции  $a_n(x)$  в совокупности (при любых  $x$  и  $n$ ) не ограничены, и сходящийся неравномерно. Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n+1)}{n} (\sin x)^n$  в интервале  $(0, \pi/2)$  из контрпримера 11.11. Здесь, однако, принимаем

$$a_n(x) = xn(n+1), \quad b_n(x) = \frac{(\sin x)^n}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin x)^n}{n^2}$  сходится равномерно в интервале  $(0, \pi/2)$ ,

так как для него существует сходящийся мажорантный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Функции  $a_n(x) = xn(n+1)$  (при каждом  $x$ ) образуют монотонную последовательность, но в совокупности, при любых  $x \in (0, \pi/2)$  и

$n$ , неограниченны. И наконец, заметим, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n+1)}{n} (\sin x)^n$  в интервале  $(0, \pi/2)$  сходится неравномерно, что показано выше в контрпримере 11.11.

Приведем пример, когда при нарушении всех трех условий признака Абеля ряд, все-таки, равномерно сходится.

**11.14. Ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$ , нарушающий все три предположения признака Абеля, но равномерно сходящийся.** Предположим

$a_n(x) = \frac{(-1)^n}{xn^2}$ ,  $b_n(x) = (-1)^n x^{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , в интервале  $(0, 1)$ . По-

лучим в  $(0, 1)$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ . Этот ряд равномерно схо-

дится в  $(0, 1)$ , так как имеет сходящийся мажорантный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

Наряду с этим все условия, данные в признаке Абеля, нарушаются.

Во-первых, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+1}$  сходится в интервале  $(0, 1)$

неравномерно. Действительно, если возьмем  $\varepsilon = 0,4$ , то при любом, сколь угодно большом фиксированном значении  $n$ , можно выбрать такое, достаточно близкое к единице, значение  $x$ , что абсолютная величина остатка ряда

$$|\varphi_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k x^{k+1} \right| = \left| \frac{x^{n+2}}{1+x} \right| = \frac{x^{n+2}}{1+x} > \varepsilon = 0,4.$$

Это следует из существования предела  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+2}}{1+x} = 0,5$ . Во-вторых,

функции  $a_n(x)$  (при каждом  $x$ ) не образуют монотонную последовательность. В-третьих, функции  $a_n(x)$  в совокупности – при любых  $x$  и  $n$  – неограниченны, так как при  $x \rightarrow 0$  все функции  $a_n(x)$  стремятся к бесконечности.

**Признак Дирихле равномерной сходимости ряда.** Пусть частичные суммы  $B_n(x)$  ряда (11.9) ограничены в совокупности, т.е. при любых  $x$  и  $n$  выполняется  $|B_n(x)| \leq M$ , где  $M$  – некоторая постоянная, а функции  $a_n(x)$  (при любом фиксированном  $x \in X$ ) образуют монотонную последовательность, которая равномерно сходится к нулю в области  $X$ . Тогда и ряд (11.8) сходится равномерно в  $X$ .

Отбросим предположение об ограниченности в совокупности частичных сумм ряда (11.9). Опровергнем полученное усиленное утверждение контр-примером.

**11.15.** Ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$  такой, что частичные суммы ряда  $\sum b_n(x)$  не ограничены в совокупности (при любых  $x$  и  $n$ ), и сходящийся неравномерно. Положим  $a_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}}$ ,  $b_n(x) = x^{n-1}$ ,

$n = 1, 2, \dots$ , в интервале  $(0, 1)$ , получим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ .

Частичные суммы ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$  неограниченны в  $(0, 1)$ , так как его сумма неограниченна в окрестности точки  $x = 1$ .

Все остальные предположения выполняются. Функции  $a_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}}$

(при каждом  $x$ ) образуют монотонную последовательность, сходящуюся к нулю. Эта сходимостъ к нулю равномерна в  $(0, 1)$ , так как существует сходящаяся к нулю мажорантная последовательность

$\frac{1}{\sqrt{n}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Напомним, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  рассмат-

ривался в контрпримере 11.12, где было показано, что он сходится неравномерно в  $(0, 1)$ .

Снимем предположение о том, что функции  $a_n(x)$  (при каждом  $x$ ) образуют монотонную последовательность. Контрпример.

**11.16.** Ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$  такой, что функции  $a_n(x)$  при каждом  $x$  не образуют монотонную последовательность, и сходящийся неравномерно. Примем, но в другом контексте, все исходные данные контрпримера 11.12. Положим

$$a_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n-1}}{\sqrt[4]{n}}, \quad b_n(x) = (-1)^n \frac{x}{\sqrt[4]{n}}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

в интервале  $(0, 1)$ . Получим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ . Заметим, что

функции  $a_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n-1}}{\sqrt[4]{n}}$  (при каждом  $x$ ) не образуют монотонную последовательность. Все остальные предположения утвержде-

ния выполняются. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x}{\sqrt[4]{n}}$  сходится равномерно в  $(0, 1)$ , это показано ранее в контрпримере 11.12, поэтому все его частичные суммы в совокупности – при любых  $x$  и  $n$  – ограничены. Функции  $a_n(x)$  образуют последовательность, которая сходится к нулю равномерно в интервале  $(0, 1)$ , так как мажорируется сходя-

щейся к нулю последовательностью  $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} : |a_n(x)| = \left| (-1)^n \frac{x^{n-1}}{\sqrt[4]{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$ .

При всем этом ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$  сходится неравномерно в  $(0, 1)$ , что показано в контрпримере 11.12.

Удалим из утверждения условие, что функции  $a_n(x)$  (при каждом  $x$ ) образуют последовательность, которая сходится к нулю. Контрпример.

**11.17. Ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$  такой, что функции  $a_n(x)$  при каждом  $x$  не образуют последовательность, сходящуюся к нулю, и сходящийся неравномерно.** Положим  $a_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x = \frac{n+1}{n}x$ ,

$b_n(x) = (-1)^n \frac{n}{n+1} x^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , в интервале  $(0, 1)$ . Получим ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+1}$ . Заметим, что функции  $a_n(x)$  (при каж-

дом  $x = x_0$ ) образуют последовательность, которая имеет предел,

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x_0) = x_0 \neq 0$ . Предельная функция  $f(x) = x$ . Все остальные

предположения утверждения сохраняют силу. Названная последовательность строго монотонна по  $n$  при любом  $x$  и сходится равномерно в интервале  $(0, 1)$ , так как величина

$|a_n(x) - f(x)| = \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)x - x \right| = \frac{x}{n} < \frac{1}{n}$  и, независимо от  $x$ , может быть

сделана меньше любого  $\varepsilon > 0$  при  $n > 1/\varepsilon$ . Частичные суммы  $B_n(x)$

ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1} x^n$  в совокупности – при любых  $x$  и  $n$  –

ограничены:  $|B_n(x)| \leq 1$ , что следует из теоремы Лейбница о сходимости и сумме знакочередующегося ряда. В то же время ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+1}$  сходится неравномерно на  $(0, 1)$ , это было показано ранее в примере 11.14.

Снимем, наконец, предположение о том, что функции  $a_n(x)$  образуют последовательность, которая сходится равномерно в области  $X$ .

**11.18.** Ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$  такой, что функции  $a_n(x)$  не образуют последовательность, сходящуюся равномерно, и сходящийся неравномерно. Предположим  $a_n(x) = x^n$ ,  $b_n(x) = (-1)^n x$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , в интервале  $(0, 1)$ . Получим  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+1}$ .

Видим, что функции  $a_n(x) = x^n$  при каждом  $x$  из  $(0, 1)$  образуют монотонную последовательность, которая сходится к нулю. Но последовательность функций  $a_n(x)$  сходится неравномерно в интервале  $(0, 1)$  к своей предельной функции  $f(x) \equiv 0$ . Покажем это. Возьмем  $\varepsilon = 0,5$  и любое, сколь угодно большое  $n$ . Для них найдется достаточно близкое к единице значение  $x$  ( $\sqrt[n]{\varepsilon} < x < 1$ ), для которого выполняется  $|a_n(x) - f(x)| = x^n > \varepsilon = 0,5$ . Заметим, что частичные суммы  $B_n(x)$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x = x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  в совокупности – при любых  $x$  и  $n$  – ограничены:  $|B_n(x)| \leq 1$ . И в этом случае получаем ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+1}$ , который, как ранее было показано, сходится в интервале  $(0, 1)$  неравномерно.

Нарушим все отмеченные выше предположения признака Дирихле, кроме сходимости последовательности  $a_n(x)$  (при каждом  $x$ ) к нулю, и все же получим равномерно сходящийся ряд. Пример.

**11.19.** Ряд  $\sum a_n(x)b_n(x)$ , нарушающий три из четырех предположений признака Дирихле, но равномерно сходящийся. Пусть  $a_n(x) = \frac{(-1)^n}{xn^{n+3}}$ ,  $b_n(x) = n^{n+1}x^{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , в интервале  $(0, 1)$ .

Получим в  $(0, 1)$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2}$ . Отметим следующее. Во-первых, неограниченны в совокупности (при любых  $x$  и  $n$ )

частичные суммы  $B_n(x)$  ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n x)^{n+1}$ ,

так как при любом  $x \in (0, 1)$  общий член ряда  $(n x)^{n+1} \rightarrow +\infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Во-вторых, функции  $a_n(x)$  (при каждом  $x$ ) не образуют монотонную последовательность. В-третьих, последовательность

функций  $a_n(x) = \frac{(-1)^n}{x n^{n+3}}$  сходится к своей предельной функции

$f(x) \equiv 0$  неравномерно в интервале  $(0, 1)$ . В самом деле выберем  $\varepsilon = 1$ , тогда для любого, сколь угодно большого  $n$ , взяв величину  $x$

близкой к нулю,  $0 < x < \frac{1}{n^{n+3}}$ , получим  $|a_n(x) - f(x)| = \frac{1}{x n^{n+3}} > \varepsilon = 1$ .

Однако, несмотря на все допущенные нарушения предположений

признака Дирихле, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n^2}$  получаем равно-

мерно сходящимся в  $(0, 1)$ . Так как  $\left| (-1)^n \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$  при  $x \in (0, 1)$ , для

него существует сходящийся мажорантный числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

## 11.2. Свойства предельной функции последовательности и суммы ряда

**Теорема о непрерывности суммы ряда в точке.** Пусть функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определены на отрезке  $[a, b]$  и в некоторой точке  $x_0 \in [a, b]$  все они непрерывны. Если ряд (11.2) на отрезке  $[a, b]$  сходится равномерно, то в точке  $x = x_0$  и сумма ряда  $f(x)$  также непрерывна.

Построим иллюстративный пример, не содержащий лишнего предположений. Члены ряда и сумма ряда будут непрерывны только в одной точке.

**11.20\*. Равномерно сходящийся функциональный ряд, и члены которого, и сумма непрерывны только в точке  $x = 0$ .** Рассмотрим на отрезке  $[-1, 1]$  функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n D(x)}{n!}, \quad (11.10)$$

где  $D(x)$  — функция Дирихле, см. пример 1.21. Функции

$u_n(x) = \frac{x^n D(x)}{n!}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , непрерывны только в точке  $x = 0$ , во всех других точках они разрывны, см. пример 2.1, где это показано для функции  $x D(x)$ . Рассуждения из примера 2.1 дословно аналогично переносятся и на все функции  $\frac{x^n D(x)}{n!}$ . При рациональных

значениях  $x$  ряд (11.10) сходится к функции  $e^x - 1$ , при иррациональных значениях  $x$  ряд (11.10) сходится к нулю. Получаем сумму

$$f(x) \text{ ряда, } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n D(x)}{n!} = (e^x - 1)D(x).$$

Ряд (11.10) сходится на отрезке  $[-1, 1]$  к своей сумме равномерно, так как выполняется  $\left| \frac{x^n D(x)}{n!} \right| \leq \frac{1}{n!}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , а мажорантный

числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$  сходится. Наконец, сумма ряда

$f(x) = (e^x - 1)D(x)$  непрерывна только в точке  $x = 0$ , во всех других точках она разрывна. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} ((e^x - 1)D(x)) = 0 = f(0) \text{ как предел произведения бесконечно}$$

малой функции  $e^x - 1$  на функцию ограниченную  $-D(x)$ . В то же время в любой точке  $x = x_0 \neq 0$  функция  $f(x) = (e^x - 1)D(x)$  разрывна, так как принимает в любой ее окрестности: в иррациональных точках — значения нуль, в рациональных — значения, сколь угодно близкие снизу и сверху к величине  $e^{x_0} - 1 \neq 0$ .

Заметим, что в утверждении требование равномерной сходимости ряда только достаточное, но не является необходимым. Приведем контрпример.

**11.21. Неравномерно сходящийся функциональный ряд, и члены которого, и сумма непрерывны только в точке  $x = 0$ .** Ряд из предыдущего примера сходится к своей сумме на всей числовой

оси:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n D(x)}{n!} = (e^x - 1)D(x)$  при любом  $x \in (-\infty, +\infty)$ . Но эта сходимость уже не будет равномерной. Действительно, пусть  $\varepsilon = 1$ , тогда при любом, сколь угодно большом, но фиксированном  $n$  можно

взять такое достаточно большое рациональное значение  $x$  (например,  $x > \sqrt[n+1]{(n+1)!}$ ), что для остатка ряда будет выполняться

$|\varphi_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k D(x)}{k!} \right| > \varepsilon = 1$ . Тем не менее непрерывность в точке  $x = 0$  всех членов ряда переходит и к его сумме.

**Теорема о непрерывности предельной функции последовательности в точке.** Пусть функции, составляющие последовательность (11.1), определены на отрезке  $[a, b]$  и в некоторой точке  $x_0 \in [a, b]$  все они непрерывны. Если последовательность (11.1) на отрезке  $[a, b]$  сходится к предельной функции  $f(x)$  равномерно, то в точке  $x = x_0$  и  $f(x)$  также непрерывна.

Построение примеров, аналогичных примерам 11.20 и 11.21, в которых функции (11.1) и предельная функция последовательности будут непрерывны действительно только в одной точке, помещено в упражнения к разделу.

**Теорема о непрерывности суммы ряда.** Если функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определены и непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и ряд (11.2) сходится на  $[a, b]$  к сумме  $f(x)$  равномерно, то и сумма  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ .

Предположим, что сумма сходящегося ряда, составленного из непрерывных функций, всегда непрерывна. Приведем контрпример, доказывающий ложность этого предположения.

**11.22. Сходящийся ряд, составленный из непрерывных функций, сумма которого разрывна.** Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n (1 - \sin x)$  на

отрезке  $[0, \pi/2]$ . При  $x = 0$  и  $x = \frac{\pi}{2}$  все члены ряда и соответствен-

но его сумма равны нулю. При  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  получим, используя формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  $0 < q = \sin x < 1$ ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n (1 - \sin x) = (1 - \sin x) \sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n = (1 - \sin x) \frac{\sin x}{1 - \sin x} = \sin x.$$

Сумма  $f(x)$  ряда равна  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \in [0, \pi/2), \\ 0, & \text{если } x = \pi/2, \end{cases}$  она имеет разрыв в точке  $x = \pi/2$ .

В то же время равномерная сходимостъ ряда является только достаточной, но не является необходимой для непрерывности суммы ряда, составленного из непрерывных функций. Контрпример.



**11.23. Неравномерно сходящийся ряд, составленный из непрерывных функций, сумма которого непрерывна.** Построим ряд, составленный из непрерывных функций, неравномерно сходящийся на отрезке  $[-\pi, \pi]$  к непрерывной функции (тождественному нулю). Для этого сначала рассмотрим последовательность непрерывных функций  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ , неравномерно сходящуюся на  $[-\pi, \pi]$  к тождественному нулю. Затем построим ряд, для которого эти функции будут последовательными частичными суммами. Пусть  $f_n(x) = \begin{cases} \sin(nx), & \text{если } x \in [-\pi/n, \pi/n], \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\pi/n, \pi/n], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$  (рис. 11.3). На рисунке изображены графики функций  $y = f_n(x)$  при

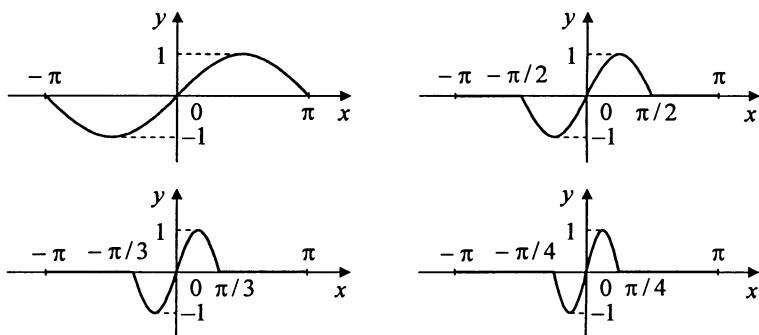


Рис. 11.3

$n = 1, 2, 3, 4$ . Для данной последовательности  $\{f_n(x)\}$  непрерывных функций предельная функция  $f(x) \equiv 0$ . Действительно, в точке  $x = 0$  все члены последовательности равны нулю и  $f(0) = 0$ , для любой другой точки  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $x \neq 0$ , существует такой номер  $N = \left\lceil \frac{\pi}{|x|} \right\rceil$ , что для всех  $n > N$  выполняется  $f_n(x) = 0$ , а значит, и  $f(x) = 0$ . Сходимость последовательности  $\{f_n(x)\}$  к ее предельной функции  $f(x) \equiv 0$  неравномерна на  $[-\pi, \pi]$ . На самом деле для  $\varepsilon = 0,5$  и для любого, сколь угодно большого  $n$  существует достаточно близкое к нулю число  $x$ ,  $x = \pi/(2n)$ , для которого  $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = 1 > \varepsilon = 0,5$ .

Построим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  из последовательности  $\{f_n(x)\}$  по схеме,

данной в примере 10.1. А именно, положим  $u_1(x) = f_1(x)$ ,  $u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Эта схема обеспечит тождественное равенство частичных сумм ряда функциям  $f_n(x)$ . Построенный таким образом ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  будет, с одной стороны, составлен из непрерывных функций, с другой стороны, последовательность его частичных сумм  $f_n(x)$  будет неравномерно сходиться к его сумме  $f(x) \equiv 0$  (непрерывной).

**Теорема о непрерывности предельной функции последовательности.** Если последовательность функций (11.1), определенных и непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , сходится к предельной функции  $f(x)$  равномерно на  $[a, b]$ , то и  $f(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ .

Предположим, что предельная функция  $f(x)$  сходящейся последовательности  $\{f_n(x)\}$  непрерывных функций всегда непрерывна. Приведем контрпример, который доказывает ложность этого предположения.

**11.24. Последовательность непрерывных функций, сходящаяся к разрывной предельной функции.** Такой контрпример дает последовательность из примера 11.2  $f_n(x) = (\sin x)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , на отрезке  $[0, \pi]$  (см. рис. 11.1). Все функции  $f_n(x)$  непрерывны на  $[0, \pi]$ . Однако последовательность имеет предельную функцию  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0, \pi], x \neq \pi/2, \\ 1, & \text{если } x = \pi/2, \end{cases}$  которая разрывна в точке  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Вместе с тем равномерная сходимость последовательности непрерывных функций является только достаточным, но не является необходимым условием для непрерывности предельной функции. Приведем контрпример.

**11.25. Последовательность непрерывных функций, сходящаяся (неравномерно) к непрерывной предельной функции.** Рассмотрим последовательность из контрпримера 11.23, все функции которой непрерывны и которая неравномерно сходится на отрезке  $[-\pi, \pi]$  к своей предельной функции. Напомним, что  $f_n(x) = \begin{cases} \sin(nx), & \text{если } x \in [-\pi/n, \pi/n], \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\pi/n, \pi/n], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$ , (см. рис. 11.3).

Несмотря на неравномерную сходимость данной последовательности  $\{f_n(x)\}$  непрерывных функций, ее предельная функция  $f(x) \equiv 0$  непрерывна.

С другой стороны, совсем необязательно для непрерывности предельной функции, чтобы функции последовательности были непрерывны.

**11.26. Последовательность всюду разрывных функций, равномерно сходящаяся к непрерывной функции.** Последовательность  $f_n(x) = \frac{D(x)}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $D(x)$  – функция Дирихле, состоит из всюду разрывных функций. Она в силу ограниченности функции Дирихле равномерно сходится на любом множестве и всей числовой оси к всюду непрерывной функции  $f(x) \equiv 0$ .

Более того, последовательность всюду разрывных функций может неравномерно сходиться к всюду непрерывной функции. Пример.

**11.27. Последовательность всюду разрывных функций, неравномерно сходящаяся к непрерывной функции.** Предположим

$$f_n(x) = \begin{cases} D(x), & \text{если } 0 < x < 1/n, \\ D(x)/n, & \text{если } x = 0 \text{ или } 1/n \leq x \leq 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (11.11)$$

функции последовательности, заданные на отрезке  $[0, 1]$ , где они всюду разрывны. Предельной функцией последовательности (11.11) является функция  $f(x) \equiv 0$ . Действительно, в точке  $x = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ в любой другой точке } x = x_0 \text{ отрезка } [0, 1],$$

начиная с достаточно большого  $n$ ,  $n > \left\lceil \frac{1}{x_0} \right\rceil$ , выполняется

$$f_n(x_0) = \frac{D(x_0)}{n} \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(x_0)}{n} = 0.$$

К своей предельной функции  $f(x) \equiv 0$  последовательность (11.11) сходится неравномерно. На самом деле для  $\varepsilon = 0,5$  и любого  $n$  существует достаточно близкое к нулю рациональное значение  $x$ ,  $0 < x < \frac{1}{n}$ , такое, что  $f_n(x) = 1 > \varepsilon = 0,5$ .

**Теорема о равномерной сходимости ряда.** Пусть члены ряда (11.2) непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и неотрицательны на нем. Если ряд имеет сумму  $f(x)$ , также непрерывную на  $[a, b]$ , то ряд сходится на  $[a, b]$  равномерно.

Снимем предположение о непрерывности членов ряда. Полученное усиленное утверждение опровергнем контрпримером.

**11.28. Ряд, составленный из разрывных неотрицательных**

функций, имеющий непрерывную сумму и сходящийся неравномерно. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  на отрезке  $[0, 1]$ , где

$$u_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 0, & \text{если } x \in (0, 1], \end{cases} \quad u_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (1/n, 1/(n-1)], \\ 0, & \text{если } x \in [0, 1] \setminus (1/n, 1/(n-1)], \end{cases}$$
  
 $n = 2, 3, \dots$  (рис. 11.4). На рисунке показаны графики функций  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ , и  $f(x)$ .

Кроме предположения о непрерывности членов ряда, все остальные предположения выполнены. Члены ряда неотрицательны.

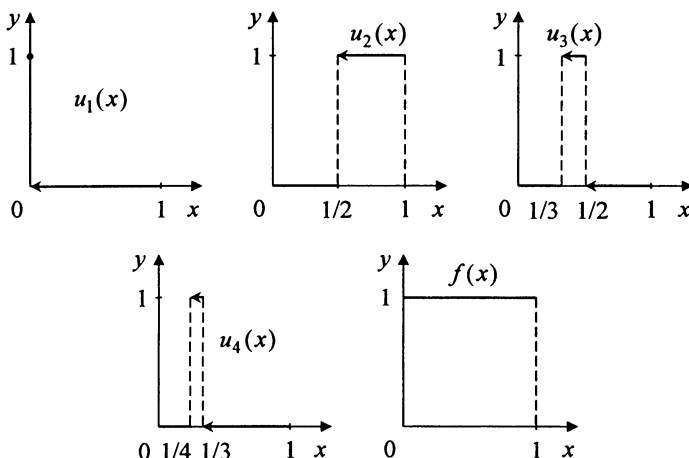


Рис. 11.4

Ряд сходится к непрерывной сумме  $f(x) \equiv 1$  на  $[0, 1]$ , так как по определению членов ряда для каждого  $x_0 \in [0, 1]$  есть один и только один член ряда, равный в точке  $x = x_0$  единице, а все остальные члены ряда равны нулю в этой точке. Отметим, что ряд сходится к своей сумме неравномерно. Действительно, при  $\varepsilon = 0,5$  и любом, сколь угодно большом,  $n$  существует  $x$ , достаточно близкий к нулю,  $0 < x < \frac{1}{n-1}$ , такой, что остаток ряда  $|\varphi_n(x)| = 1 > \varepsilon = 0,5$ .

Однако требование непрерывности членов ряда, являясь достаточным, не является необходимым для равномерной сходимости ряда с положительными членами к непрерывной сумме. Контрпример.

## 11.29. Ряд, составленный из всюду разрывных положительных

ных функций, имеющий непрерывную сумму и сходящийся равномерно. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  на отрезке  $[0, 1]$ , где

$$u_n(x) = \begin{cases} 1/2^n, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ 2/3^n, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Тогда сумма  $f(x)$  ряда: в рациональных точках  $x$  будет равна

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1, \text{ в иррациональных точках } x \text{ будет равна}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \frac{2/3}{1-1/3} = 1. \text{ Отсюда } f(x) \equiv 1 \text{ на отрезке } [0, 1], \text{ т.е. ряд}$$

сходится к непрерывной функции. Равномерность сходимости следует из существования сходящегося мажорантного ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ , где

$$c_n = \max\left(\frac{1}{2^n}, \frac{2}{3^n}\right), \text{ так как } 0 < u_n(x) < \max\left(\frac{1}{2^n}, \frac{2}{3^n}\right), n = 1, 2, \dots$$

Далее снимем предположение о неотрицательности членов ряда. Приведем контрпример к полученному усиленному утверждению.

**11.30. Ряд, составленный из непрерывных меняющих знак функций, имеющий непрерывную сумму и сходящийся неравномерно.** Ряд из контрпримера 11.23 можно использовать в данном контексте. Напомним, что этот ряд составлен из непрерывных на  $[-\pi, \pi]$  функций, сходится к непрерывной функции (тождественно нулю), но его сходимость неравномерна. Остается только отметить, что каждый член ряда является отличной от нуля нечетной функцией, т.е. не является неотрицательным.

Заметим, что неотрицательность членов ряда является только достаточным, но не является необходимым условием для равномерной сходимости рядов непрерывных функций к непрерывной сумме. Контрпример.

**11.31. Ряд, каждый нечетный член которого – меняющая знак функция, имеющий непрерывную сумму и сходящийся**

**равномерно.** Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  на отрезке  $[-1, 1]$ . Он состоит

из непрерывных функций. Каждый член ряда с нечетным номером является нечетной функцией и принимает значения разных знаков.

Этот ряд равномерно сходится на  $[-1, 1]$  к своей сумме  $f(x) = e^x$  (непрерывной).

Снимем предположение о непрерывности суммы ряда. Приведем контр-пример.

**11.32. Ряд, составленный из непрерывных неотрицательных функций, имеющий разрывную сумму и сходящийся неравномерно.** Используем ряд из примера 11.22  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n (1 - \sin x)$  на отрезке  $[0, \pi/2]$ . Все члены ряда непрерывны и неотрицательны на  $[0, \pi/2]$ . Однако сумма  $f(x)$  ряда имеет разрыв в точке  $x = \frac{\pi}{2}$ . Покажем, что ряд сходится к своей сумме неравномерно. Предполо-

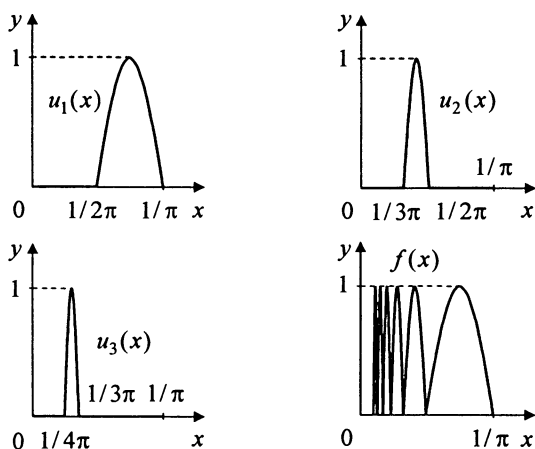


Рис. 11.5

жим противное. Тогда по теореме о непрерывности суммы ряда наш ряд, составленный из непрерывных на  $[0, \pi/2]$  функций и равномерно сходящийся на этом отрезке, должен иметь непрерывную сумму. Приходим к противоречию – ряд сходится неравномерно.

Заменим в утверждении отрезок  $[a, b]$ , например, на полуинтервал  $(a, b]$ . Полученное при этом утверждение опровергнем контрпримером.

**11.33. Ряд, составленный из непрерывных неотрицательных функций, имеющий непрерывную сумму и сходящийся нерав-**

номерно на полуинтервале. Рассмотрим на полуинтервале  $\left(0, \frac{1}{\pi}\right]$

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  (рис. 11.5), где

$$u_n(x) = \begin{cases} \left| \sin \frac{1}{x} \right|, & \text{если } \frac{1}{\pi(n+1)} < x \leq \frac{1}{\pi n}, \quad n = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{при всех других } x \text{ из } (0, 1], \end{cases}$$

На рис. 11.5 изображены графики функций  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3$ , и  $f(x)$ . Для наглядности масштаб по оси  $Ox$  увеличен.

Все функции  $u_n(x)$  непрерывны и неотрицательны на  $\left(0, \frac{1}{\pi}\right]$ .

Ряд сходится на  $\left(0, \frac{1}{\pi}\right]$  к непрерывной сумме  $f(x) = \left| \sin \frac{1}{x} \right|$ . Дейст-

вительно, при любом  $x \in \left(0, \frac{1}{\pi}\right]$  только один член ряда не равен ну-

лю, а именно, если  $\frac{1}{\pi(n+1)} < x \leq \frac{1}{\pi n}$ , то  $u_n(x) = \left| \sin \frac{1}{x} \right|$ . В то же

время сходимость не будет равномерной. В самом деле для  $\varepsilon = 0,5$  и

любого, сколь угодно большого,  $n$  существует такое, достаточно

близкое к нулю, значение  $x$ ,  $0 < x < \frac{1}{\pi n}$ , что для остатка ряда вы-

**Теорема о равномерной сходимости последовательности.** Пусть последовательность (11.1) непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций при  $n \rightarrow \infty$  стремится к своей предельной функции  $f(x)$ , монотонно возрастаая, т.е.  $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$  при всех  $x \in [a, b]$  и всех  $n = 1, 2, \dots$ . Если функция  $f(x)$  также непрерывна на  $[a, b]$ , то  $f_n(x)$  сходится к  $f(x)$  равномерно на  $[a, b]$ .

Будем усиливать утверждение, последовательно снимая по одному из его предположений. Полученные ложные утверждения опровергнем контрпримерами. Для начала допустим разрывность функций последовательности.

**11.34. Последовательность разрывных монотонно возрастающих функций, с непрерывной предельной функцией, сходящаяся неравномерно.** Несколько изменим последовательность из примера 11.27. Пусть

$$f_n(x) = \begin{cases} D(x) - 3, & \text{если } 0 < x < 1/n, \\ -D(x)/n, & \text{если } x = 0 \text{ или } 1/n \leq x \leq 1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots,$$

функции последовательности, заданные на отрезке  $[0, 1]$ . Они всюду разрывны. Нетрудно проверить, что  $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . При  $n \rightarrow \infty$  последовательность стремится к предельной функции

$$f(x) \equiv 0. \text{ На самом деле в точке } x = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0, \text{ в}$$

любой другой точке  $x = x_0$  отрезка  $[0, 1]$ , начиная с достаточно

большого  $n$ ,  $n > \left\lceil \frac{1}{x_0} \right\rceil$ , получаем  $f_n(x_0) = -\frac{D(x_0)}{n}$  и соответственно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{D(x_0)}{n} = 0. \text{ К непрерывной предельной функции}$$

$f(x) \equiv 0$  данная последовательность сходится неравномерно. Действительно, для  $\varepsilon = 0,5$  и любого, сколь угодно большого,  $n$  существует достаточно близкое к нулю рациональное значение  $x$ ,  $0 < x < 1/n$ , такое, что  $|f_n(x)| = 1 > \varepsilon = 0,5$ .

Однако требование непрерывности функций последовательности является только достаточным, но не является необходимым, для ее равномерной сходимости. Контрпример.

**11.35. Последовательность разрывных монотонно возрастающих функций, с непрерывной предельной функцией, сходящаяся равномерно.** Модифицируем последовательность из примера 11.26. Пусть  $f_n(x) = -\frac{D(x)}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и последовательность

состоит из всюду разрывных функций. Она отвечает условию монотонного возрастания и, так как функция Дирихле ограничена, равномерно сходится на любом множестве и всей числовой оси к всюду непрерывной функции  $f(x) \equiv 0$ .

Снимем условие монотонности возрастания последовательности. Приведем контрпример.

**11.36. Последовательность непрерывных не монотонно возрастающих функций, с непрерывной предельной функцией, сходящаяся неравномерно.** К данному случаю полностью подходит последовательность из контрпримеров 11.23 и 11.25. Все ее функции непрерывны, она сходится на отрезке  $[-\pi, \pi]$  к своей непрерывной предельной функции  $f(x) \equiv 0$ . Напомним, что



$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(nx), & \text{если } x \in [-\pi/n, \pi/n], \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\pi/n, \pi/n], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{см. рис. 11.3}).$$

Видим, что только одно требование утверждения нарушается – монотонность возрастания членов последовательности. Заметим, что при этом последовательность сходится неравномерно на  $[-\pi, \pi]$ .

Однако во многих простых и очевидных случаях нарушение условия монотонности не приводит к неравномерности сходимости. Пример.

**11.37. Последовательность непрерывных не монотонно возрастающих функций, с непрерывной предельной функцией, сходящаяся равномерно.** Пусть  $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Все функции последовательности непрерывны, предель-

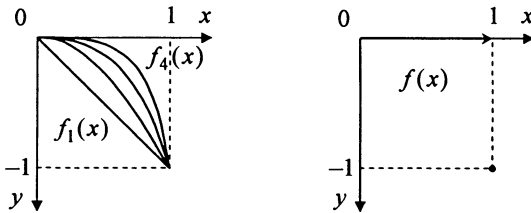


Рис. 11.6

ная функция  $f(x) \equiv 0$  непрерывна. Отметим, что для данной последовательности при нарушении условия монотонности, тем не менее, соблюдается равномерная сходимость.

Далее отбросим условие непрерывности предельной функции. Контр-пример.

**11.38. Последовательность непрерывных монотонно возрастающих функций, с разрывной предельной функцией, сходящаяся неравномерно.** Последовательность  $f_n(x) = -x^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , на отрезке  $[0, 1]$  (рис. 11.6). На рисунке показаны графики функций  $y = f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ , и  $y = f(x)$ . Все функции последовательности непрерывны, последовательность монотонно возрастает на  $[0, 1]$ . Но предельная функция имеет разрыв в точке  $x = 1$ . Действительно, при  $x = 1$  все функции  $f_n(1) = -1$  и  $f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = -1$ , а при любом другом  $x \in [0, 1]$ ,  $x \neq 1$ ,  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} -x^n = 0$ .

В этом случае последовательность сходится к предельной функции неравномерно. Это легко показать от противного. Если бы сходимости была равномерной, то согласно теореме о непрерывности предельной функции последовательности предельная функция была бы непрерывной.

Наконец, заменим в формулировке утверждения отрезок  $[a, b]$ , например, на полуинтервал  $[a, b)$ . Получим ложное утверждение, опровергаемое следующим контрпримером.

**11.39. Последовательность непрерывных монотонно возрастающих функций, с непрерывной предельной функцией, сходящаяся неравномерно на полуинтервале.** Подойдет последовательность из предыдущего контрпримера, но определенная на полуинтервале  $[0, 1)$ . Сразу заметим, что в этом случае предельная функция  $f(x) \equiv 0$  и непрерывна на  $[0, 1)$ . Таким образом, все предположения утверждения выполняются, кроме рассмотрения полуинтервала  $[0, 1)$  вместо отрезка  $[0, 1]$ . Покажем, что в этом случае сходимость неравномерна. Действительно, для  $\varepsilon = 0,5$  и любого, сколь угодно большого,  $n$  существует достаточно близкое к единице значение  $x$ ,  $\sqrt[n]{0,5} < x < 1$ , такое, что  $|f_n(x) - f(x)| = x^n > \varepsilon = 0,5$ .

**Теорема о почленном переходе к пределу.** Пусть  $X$  – некоторое бесконечное множество и точка  $a$  – его предельная точка (конечная или нет, принадлежащая или не принадлежащая  $X$ ). Пусть каждая из функций  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определена на множестве  $X$  и имеет, при  $x \rightarrow a$ , конечный предел:  $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = c_n$ . Если ряд (11.2) на множестве  $X$  сходится равномерно, то

сходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = C$ , составленный из этих пределов, и сумма  $f(x)$  ряда (11.2) также имеет при  $x \rightarrow a$  предел, равный  $C$ :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$ .

Удалим из утверждения требование равномерной сходимости ряда. Опровергнем полученное таким путем утверждение контрпримером.

**11.40. Неравномерно сходящийся ряд, для которого невыполним почленный переход к пределу.** Рассмотрим ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+1}$  в интервале  $(0, 1)$ . Как показано в примере 11.14, он

сходится неравномерно. Его сумма  $f(x)$  равна  $f(x) = -\frac{x^2}{1+x}$ . Видим, что в любой предельной точке  $0 \leq a < 1$  предельный переход

выполняется. Это следует из непрерывности членов и суммы ряда, и из самого получения суммы ряда по формуле суммы членов бесконечной геометрической прогрессии. Но в предельной точке  $a = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1} u_n(x) = \lim_{x \rightarrow 1} ((-1)^n x^{n+1}) = (-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и суммы полученных

пределов  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  не существует. Однако  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$ .

**Теорема о почленном переходе к пределу.** Пусть функции последовательности (11.1) определены на некотором множестве  $X$  и точка  $a$  – его предельная точка. Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ ,  $x \in X$ , и последовательность (11.1) сходится равномерно к функции  $f(x)$  на множестве  $X$ , а  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = C_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то существуют конечные и равные пределы:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n$ .

Снимем в данном утверждении предположение о том, что последовательность сходится к своей предельной функции равномерно. Контрпример.

**11.41. Неравномерно сходящаяся последовательность, для которой невыполним почленный переход к пределу.** Функциональная последовательность  $f_n(x) = (\sin x)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , на отрезке  $[0, \pi]$  из примера 11.2 (см. рис. 11.1) имеет предельную функцию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), \text{ где } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in [0, \pi], x \neq \pi/2, \\ 1, & \text{если } x = \pi/2. \end{cases}$$

Очевидно, что последовательность сходится неравномерно на  $[0, \pi]$ , иначе последовательность непрерывных (в данном случае) функций сходилась бы к непрерывной функции. Рассмотрим предельную

точку  $a = \frac{\pi}{2}$ . Имеем  $C_n = \lim_{x \rightarrow \pi/2} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^n = 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$

Существуют оба конечных предела  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 1$ , но

они не равны между собой. Заметим, что в любой другой предельной точке на отрезке  $[0, \pi]$  предельный переход осуществим. Показать это предоставляем читателям.

Заметим, что в утверждении предположение о равномерной сходимости последовательности только достаточное, но не является необходимым для возможности предельного перехода. Контрпример.

**11.42. Неравномерно сходящаяся последовательность, для которой выполним почленный переход к пределу в любой точке.** Рассмотрим на отрезке  $[-\pi, \pi]$  последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(nx), & \text{если } x \in [-\pi/n, \pi/n], \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\pi/n, \pi/n], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \text{ из контрпримеров 11.23 и 11.25 (см. рис. 11.3).}$$

Все ее функции непрерывны, и она неравномерно сходится к непрерывной предельной функции  $f(x) \equiv 0$ . Сначала примем  $a = 0$ . Тогда получаем  $C_n = \lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = 0$ , существуют оба конечных предела  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$  (равных). Затем примем  $a \in [-\pi, \pi]$ ,  $a \neq 0$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) = C_n \neq 0$  только для конечного числа номеров  $n$ , а для всех  $n > |\pi/a|$   $C_n = 0$ . Соответственно  $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$  и, очевидно,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . Оба предела опять равны. Таким образом, несмотря на неравномерную сходи-

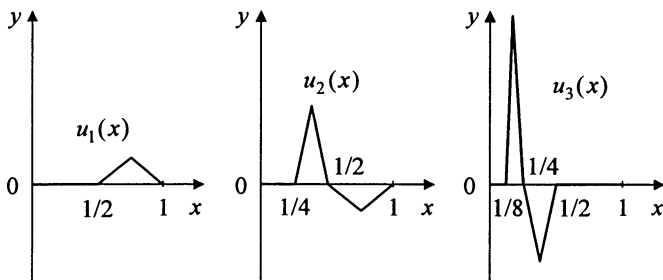


Рис. 11.7

мость последовательности к ее предельной функции, в любой предельной точке выполним предельный переход.

**Теорема о почленном интегрировании ряда.** Если составляющие ряд (11.2) функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , непрерывны на отрезке  $[a, b]$  и ряд (11.2) сходится на  $[a, b]$  равномерно, то выполняется равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (11.12)$$

Снимем требование о равномерной сходимости ряда. Полученное утверждение (некорректное) опровергнем контрпримером.

**11.43. Неравномерно сходящийся ряд, для которого несправедливо почленное интегрирование.** Построим на отрезке  $[0, 1]$

ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , где функции  $u_n(x)$  удобнее определить графически (рис. 11.7). На рисунке изображены графики функций  $u_n(x)$ ,

$n = 1, 2, 3$ . Для наглядности масштаб по оси  $Oy$  уменьшен. На оси  $Ox$  рассмотрим точки  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$ . На отрезках с концами в двух таких (подряд идущих) точках будем строить равнобедренные треугольники единичной площади, расположенные над или под отрезком. График функции  $u_1(x)$  составят боковые стороны треугольника, построенного над отрезком  $[1/2, 1]$ , вне этого отрезка график пройдет по оси  $Ox$ . График функции  $u_2(x)$  составят боковые стороны двух треугольников, построенных под отрезком  $[1/2, 1]$  и над отрезком  $[\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2}]$ , вне этих отрезков график пройдет по оси  $Ox$ . График функции  $u_n(x)$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , составят боковые стороны двух треугольников, построенных под отрезком  $[\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-2}}]$  и над отрезком  $[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ , вне этих отрезков график пройдет по оси  $Ox$ .

Такое построение графиков обеспечивает следующее. Во-первых, все функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , непрерывны на  $[0, 1]$ . Во-вторых,  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , так как  $f(x) \equiv 0$  на отрезке  $[0, 1]$ . Действи-

тельно, для любого значения  $x = 0$  и  $x = \frac{1}{2^n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , все члены ряда равны нулю, и сумма ряда  $f(x) = 0$ ; для любого  $\frac{1}{2^{n+1}} < x < \frac{1}{2^n}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , существует только два члена ряда:  $u_{n+1}(x)$  и  $u_{n+2}(x)$ , не равных нулю, и  $u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) = 0$ , отсюда получаем  $f(x) = 0$ . В-третьих, очевидно,  $\int_0^1 u_1(x) dx = 1$ ,  $\int_0^1 u_n(x) dx = 0$ ,  $n = 2, 3, \dots$

Замечаем, что  $\int_0^1 f(x) dx \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 u_n(x) dx$ . В этом случае почленное интегрирование ряда некорректно, и отсюда, кстати, следует (легко показать от противного), что ряд сходится неравномерно на отрезке  $[0, 1]$ .

Равномерная сходимость ряда не является необходимым условием его почленного интегрирования. Приведем контрпример.

**11.44. Неравномерно сходящийся ряд, для которого почленное интегрирование справедливо.** Используем рассмотренный в

другом контексте в [2], т. II, с. 75, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}(1-x)$  на отрезке  $[0, 1]$ . Члены ряда непрерывны на  $[0, 1]$ . Сумма  $f(x)$  ряда равна  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0, 1), \\ 0, & \text{если } x = 1, \end{cases}$  она имеет разрыв в точке  $x = 1$ , что, однако, не мешает ее интегрированию на  $[0, 1]$ . В [2], т. II, с. 75 показано, что ряд сходится к своей сумме неравномерно. Вычислим интегралы от членов ряда и их сумму

$$\int_0^1 x^{n-1}(1-x)dx = \int_0^1 x^{n-1}dx - \int_0^1 x^n dx = \frac{x^n}{n} \Big|_0^1 - \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 x^{n-1}(1-x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 1$ . За-

метим, что  $\int_0^1 f(x)dx = 1$  и выполняется  $\int_0^1 f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 u_n(x)dx = 1$ .

Несмотря на неравномерную сходимость ряда (ее легко показать от противного, так как члены ряда непрерывны, а его сумма разрывна), почленное его интегрирование выполнимо.

Заменим в утверждении отрезок  $[a, b]$  на неограниченный полуинтервал  $[0, +\infty)$  и рассмотрим несобственные интегралы. Покажем, что полученное утверждение уже не будет справедливо. Контрпример.

**11.45\*. Равномерно сходящийся ряд, составленный из непрерывных на  $[0, +\infty)$  функций, для которого несправедливо почленное интегрирование (несобственное).** Пусть

$$u_n(x) = \frac{1}{n^2} \cos \frac{x}{n^2}, \text{ если } x \in \left[ 2\pi n^3 - \frac{\pi}{2} n^2, 2\pi n^3 + \frac{\pi}{2} n^2 \right]$$

и  $u_n(x) = 0$  при всех других  $x$  из  $[0, +\infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (рис. 11.8). На рисунке изображены графики функций  $y = u_n(x)$  при  $n = 1, 2, 3$ . Для обозримости рисунка масштабы на осях искажены. Заметим, что каждая из функций  $u_n(x)$  отлична от нуля на одном полупериоде

функции  $\frac{1}{n^2} \cos \frac{x}{n^2}$ , а именно на том, где она неотрицательна.

Функции  $u_n(x)$  непрерывны. Отрезки, на которых отдельные функции  $u_n(x)$  отличны от нуля, не пересекаются. Действительно,

$2\pi n^3 + \frac{\pi}{2}n^2 < 2\pi(n+1)^3 - \frac{\pi}{2}(n+1)^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , что легко проверить

(оставляем это упражнение читателям). Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  сходится к своей сумме  $f(x)$  равномерно на  $[0, +\infty)$ , так как мажорируется сходящимся числовым рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Вычислим интегралы, перенеся для удобства пределы интегрирования на величину  $2\pi n^3$  – це-

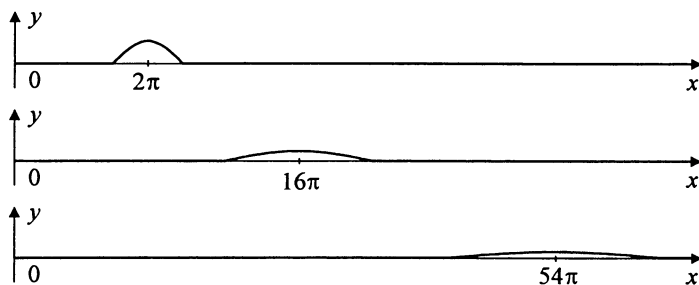


Рис. 11.8

лое число ( $n$ ) периодов ( $2\pi n^2$ ) подынтегральной функции,

$$\int_0^{+\infty} u_n(x) dx = \int_{-\pi n^2/2}^{\pi n^2/2} \frac{1}{n^2} \cos \frac{x}{n^2} dx = \sin \frac{x}{n^2} \Big|_{-\pi n^2/2}^{\pi n^2/2} = 2, \quad n = 1, 2, \dots \text{ Однако}$$

равенство  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x) dx$ , аналогичное (11.12), в данном

случае некорректно, так как ряд справа, составленный из интегралов, и несобственный интеграл слева расходятся. Очевидно, что для случая неограниченных промежутков необходимо введение в утверждение дополнительных предположений.

**Усиленная теорема о почленном интегрировании ряда.** Если функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , интегрируемы на отрезке  $[a, b]$  и составленный из них ряд (11.2) сходится равномерно на  $[a, b]$ , то сумма  $f(x)$  ряда также будет интегрируема и имеет место равенство (11.12).

Контрпримеры 11.43–11.45 имеют силу и в данном случае. Приведем иллюстративный пример, в котором все члены и сумма ряда – функции, имеющие точки разрыва, расположенные плотно на отрезке интегрирования.

**11.46\*. Равномерно сходящийся ряд, члены и сумма которо-**

го имеют точки разрыва плотно на отрезке интегрирования и для которого справедливо почленное интегрирование. Рассмотрим

на отрезке  $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (R(x))^n$ , где  $R(x)$  – функция Римана,

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{p}, & \text{если } x \text{ рациональное число } \frac{m}{p}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число,} \end{cases} \quad \text{здесь } \frac{m}{p} - \text{несократимая}$$

дробь,  $m$  – целое число,  $p$  – натуральное число. На отрезке  $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$

свое максимальное значение  $1/2$  функция  $R(x)$  принимает в точке  $x = \frac{1}{2}$ . Из свойств функции Римана следует, что члены ряда – функ-

ции, разрывные при всех рациональных и непрерывные при всех иррациональных значениях  $x$ . Очевидно, члены ряда при любом рациональном  $x$  образуют геометрическую прогрессию с первым членом  $a = 1/p$  и знаменателем  $q = 1/p \leq 1/2$ , поэтому сумма ряда

будет выражаться следующей функцией ( $\frac{m}{p}$  – несократимая дробь)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1/p}{1-1/p} = \frac{1}{p-1}, & \text{если } x \text{ рациональное число } \frac{m}{p}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррациональное число.} \end{cases}$$

Функция  $f(x)$ , как и члены ряда, разрывна при всех рациональных и непрерывна при всех иррациональных значениях  $x$ . Ряд сходится к своей сумме равномерно на отрезке  $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ , так как остаток ряда

$$0 \leq \varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (R(x))^k \leq \frac{(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

при любом  $x$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ . И члены ряда, и его сумма – интегри-

руемые на  $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$  функции, так как имеют разрывы только на счет-

ном множестве точек этого отрезка. Так как все эти функции почти всюду равны нулю, то интегралы от них также равны нулю и вы-

$$\text{полняется } \sum_{n=1}^{\infty} \int_{1/4}^{3/4} (R(x))^n dx = \int_{1/4}^{3/4} f(x) dx.$$



**Теорема о предельном переходе при почленном интегрировании последовательности.** Если последовательность (11.1) функций, непрерывных на отрезке  $[a, b]$ , сходится к предельной функции  $f(x)$  равномерно на  $[a, b]$ , то выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx. \quad (11.13)$$

Требование равномерной сходимости является в утверждении достаточным, но не является необходимым для выполнения предельного перехода (11.13). Приведем контрпример.

**11.47. Неравномерно сходящаяся последовательность, для которой предельный переход при интегрировании справедлив.** Рассмотрим на отрезке  $[-\pi, \pi]$  последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin(nx), & \text{если } x \in [-\pi/n, \pi/n], \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\pi/n, \pi/n], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \text{ из контрпримеров 11.23, 11.25 и 11.42 (см. рис. 11.3).}$$

Все члены последовательности — непрерывные функции, и, как было показано выше, она сходится к непрерывной предельной функции  $f(x) \equiv 0$  неравномерно.

Однако выполняется  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f_n(x)dx$ , так как интеграл

слева равен нулю ( $f(x) \equiv 0$ ), а все интегралы справа также равны нулю, в силу нечетности подынтегральных функций.

Снимем в утверждении предположение о равномерности сходимости. Полученное усиленное утверждение опровергнем контрпримером.

**11.48. Неравномерно сходящаяся последовательность, для которой предельный переход при интегрировании несправедлив.** Несколько модифицируем последовательность из предыдущего контрпримера, а именно положим на отрезке  $[0, \pi]$

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin(nx), & \text{если } x \in [0, \pi/n], \\ 0, & \text{если } x \in [0, \pi] \setminus [0, \pi/n], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \text{ Получим на } [0, \pi]$$

последовательность непрерывных функций. Она сходится к предельной функции  $f(x) \equiv 0$ . Покажем это. Выполняется  $f(0) = 0$ , так как при  $x = 0$  все члены последовательности равны нулю. Для любой другой точки  $x \in [0, \pi]$ ,  $x \neq 0$ , возьмем номер  $N = \left\lceil \frac{\pi}{x} \right\rceil$ , при ко-

тором для всех  $n > N$  выполняется  $f_n(x) = 0$ , следовательно,  $f(x) = 0$ . Последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится на  $[0, \pi]$  к предель-

ной функции  $f(x) \equiv 0$  неравномерно. Действительно, примем  $\varepsilon = 0,5$ , и для любого, сколь угодно большого  $n$  можно выбрать число  $x$ ,  $x = \frac{\pi}{2n}$ , для которого  $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = n > \varepsilon = 0,5$ .

Вычислим:  $\int_0^{\pi} f_n(x) dx = \int_0^{\pi/n} n \sin(nx) dx = -\cos(nx) \Big|_0^{\pi/n} = 2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

$\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$ . Предельный переход (11.13) не выполняется.

Заменим в утверждении отрезок  $[a, b]$  на бесконечный полуинтервал  $[0, +\infty)$  и рассмотрим несобственные интегралы. Модифицированное таким образом утверждение оказывается некорректным. Приведем контрпример.

**11.49\*. Равномерно сходящаяся последовательность, для которой предельный переход при интегрировании (несобственном) несправедлив на  $[0, +\infty)$ .** Используем подход, примененный

в контрпримере 11.45. Предположим, что  $f_n(x) = \frac{1}{n} \cos \frac{x}{n}$ , если

$x \in \left[ 2\pi n - \frac{\pi}{2}n, 2\pi n + \frac{\pi}{2}n \right]$ , и  $f_n(x) = 0$  при всех других  $x$  из  $[0, +\infty)$ ,

$n = 1, 2, \dots$ . Заметим, что каждая из функций  $f_n(x)$  отлична от нуля

на одном из полупериодов неотрицательности функции  $\frac{1}{n} \cos \frac{x}{n}$ .

Функции  $f_n(x)$  являются непрерывными. Последовательность

$\{f_n(x)\}$  сходится на  $[0, +\infty)$  равномерно к тождественному нулю,

$f(x) \equiv 0$ , так как члены последовательности  $\{f_n(x)\}$  мажорируются

членами сходящейся к нулю числовой последовательности  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ .

Вычислим интегралы, перенеся для удобства пределы интегрирования на величину  $2\pi n$  – период подынтегральной функции,

$$\int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\pi n/2}^{\pi n/2} \frac{1}{n} \cos \frac{x}{n} dx = \sin \frac{x}{n} \Big|_{-\pi n/2}^{\pi n/2} = 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

Однако равенство  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ , аналогичное (11.13),

не выполняется, так как  $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 0$ , а  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 2$ .

**Усиленная теорема о предельном переходе при почленном интегрировании последовательности.** Если последовательность (11.1) составлена из функций, интегрируемых на отрезке  $[a, b]$ , и сходится к предельной функции  $f(x)$  равномерно на  $[a, b]$ , то функция  $f(x)$  интегрируема на этом отрезке и выполняется равенство (11.13).

Контрпримеры 11.47–11.49 применимы и к данному случаю. Приведем пример последовательности, члены которой интегрируемы, но ее предельная функция неинтегрируема, и, следовательно, предельный переход (11.13) не имеет смысла.

**11.50. Неравномерно сходящаяся последовательность, для которой предельный переход при интегрировании несправедлив, так как предельная функция неинтегрируема.** Пусть на отрезке  $[-1, 1]$   $f_n(x) = \sqrt[n]{R(x)}$ . Покажем, что предельная функция в этом случае равна  $f(x) = D(x)$ . Действительно, если  $x$  – иррациональное число, то  $R(x) = 0$ ,  $f_n(x) = 0$  и  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ ; если  $x$  – рациональное число, то тогда  $0 < R(x) \leq 1$  и выполняется  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{R(x)} = 1$ .

Для установления интегрируемости функции  $f_n(x) = \sqrt[n]{R(x)}$  на  $[-1, 1]$  достаточно показать, что  $f_n(x)$  непрерывна при иррациональных значениях  $x$ . Это следует из непрерывности в любой иррациональной точке  $x$  функции Римана  $y = R(x)$  и непрерывности при любом неотрицательном аргументе  $y$  функции  $\sqrt[n]{y}$ . Так как у функции  $f_n(x) = \sqrt[n]{R(x)}$  множество точек разрыва (множество рациональных чисел) счетно, то существует  $\int_{-1}^1 f_n(x) dx = 0$ . Равенство

интеграла нулю следует из того, что почти всюду (в иррациональных точках) подынтегральная функция равна нулю. Таким образом, получаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f_n(x) dx = 0$ , но предельный переход (11.13) не имеет

смысла, так как предельная функция  $f(x) = D(x)$ , а функция Дирихле неинтегрируема на любом отрезке.

Заметим, что, используя теорему, легко показать (от противного), что последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится к своей предельной функции неравномерно.

**Теорема о предельном переходе при почленном дифференцировании**

последовательности. Пусть все функции  $f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , дифференцируемы на отрезке  $[a, b]$  и последовательность  $\{f'_n(x)\}$  производных сходится на отрезке  $[a, b]$  равномерно. Если последовательность функций  $\{f_n(x)\}$  сходится хотя бы в одной точке отрезка  $[a, b]$ , то эта последовательность сходится (и даже равномерно) на всем отрезке  $[a, b]$ , при этом предельная функция  $f(x)$  дифференцируема и выполняется:  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

Равномерная сходимость последовательности  $\{f'_n(x)\}$  является достаточным, но не является необходимым условием для выполнения предельного перехода  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ . Контрпример.

**11.51. Неравномерно сходящаяся последовательность производных, при которой предельный переход при дифференцировании справедлив.** Рассмотрим на отрезке  $[-\pi, \pi]$  последовательность  $f_n(x) = \begin{cases} -\cos(nx)/n, & \text{если } x \in [-\pi/n, \pi/n], \\ 1/n, & \text{если } x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\pi/n, \pi/n], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$  (рис. 11.9). На рисунке показаны графики функций  $y = f_n(x)$  при

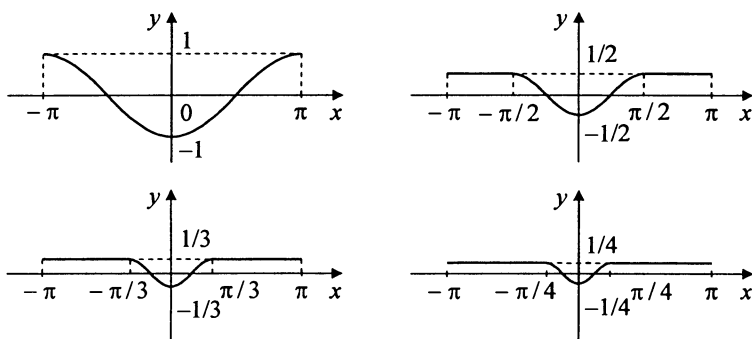


Рис. 11.9

$n = 1, 2, 3, 4$ . Члены этой последовательности дифференцируемы на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Последовательность производных

$$f'_n(x) = \begin{cases} \sin(nx), & \text{если } x \in [-\pi/n, \pi/n], \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\pi/n, \pi/n], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{см. рис. 11.3})$$

сходится неравномерно на  $[-\pi, \pi]$  к тождественному нулю,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \equiv 0$ , это было показано в контрпримере 11.23.

Последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится равномерно на  $[-\pi, \pi]$  к предельной функции  $f(x) \equiv 0$ , так как мажорируется сходящейся к

нулю числовой последовательностью:  $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$ . На всем отрезке  $[-\pi, \pi]$  получаем  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = 0$ .

Снимем в утверждении предположение о равномерной сходимости последовательности  $\{f'_n(x)\}$ . Опровергнем полученное усиленное утверждение контрпримером.

**11.52. Неравномерно сходящаяся последовательность производных, при которой предельный переход при дифференцировании несправедлив.** На отрезке  $[-\pi, \pi]$  определим последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} -\cos(nx), & \text{если } x \in [-\pi/n, \pi/n], \\ 1, & \text{если } x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\pi/n, \pi/n], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

(сравните с рис. 11.9). Члены этой последовательности дифференцируемы на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Последовательность производных

$$f'_n(x) = \begin{cases} n \sin(nx), & \text{если } x \in [-\pi/n, \pi/n], \\ 0, & \text{если } x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\pi/n, \pi/n], \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots, \text{ неравномерно}$$

сходится на  $[-\pi, \pi]$  к тождественному нулю,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \equiv 0$ . Пока-

жем это. В точке  $x = 0$  все члены последовательности  $\{f'_n(x)\}$  равны нулю, а значит,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(0) = 0$ , в любой другой точке  $x \in [-\pi, \pi]$ ,

$x \neq 0$ , все члены последовательности  $\{f'_n(x)\}$ , с номерами  $n > \frac{\pi}{|x|}$  будут равны нулю, и поэтому  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = 0$ . Следовательно, на отрез-

ке  $[-\pi, \pi]$  выполняется  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \equiv 0$ . Однако сходимость последо-

вательности  $\{f'_n(x)\}$  к ее предельной функции неравномерна. Для

$\varepsilon = 0,5$  и любого, сколь угодно большого,  $n$  существует  $x = \frac{\pi}{2n}$ , для

которого  $|f'_n(x) - 0| = n > \varepsilon = 0,5$ .

В то же время последовательность  $\{f_n(x)\}$  сходится неравно-

мерно на отрезке  $[-\pi, \pi]$  к своей предельной функции  $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x \in [-\pi, \pi], x \neq 0. \end{cases}$  Покажем это. В точке  $x = 0$  все

члены последовательности  $\{f_n(x)\}$  равны  $-1$ , и  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = -1$ , в любой другой точке  $x \in [-\pi, \pi]$ ,  $x \neq 0$ , все члены последовательно-

сти  $\{f_n(x)\}$ , с номерами  $n > \frac{\pi}{|x|}$  будут равны 1, и поэтому выполняется  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ . Сходимость последовательности  $\{f_n(x)\}$  к ее предельной функции  $f(x)$  неравномерна. Для  $\varepsilon = 0,5$  и любого, сколь угодно большого,  $n$ , существует  $x = \frac{\pi}{2n}$ , для которого  $|f_n(x) - f(x)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon = 0,5$ .

Заметим, что предельная функция  $f(x)$  недифференцируема в точке  $x = 0$ , и хотя в других точках она имеет нулевую производную, на отрезке  $[-\pi, \pi]$  предельный переход  $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$  не имеет места.

Наконец приведем пример равномерно сходящейся на отрезке к тождественному нулю последовательности  $\{f_n(x)\}$ , для которой последовательность  $\{f'_n(x)\}$  не имеет предельной функции.

**11.53. Равномерно сходящаяся последовательность, для которой последовательность производных не имеет предельной функции.** Последовательность  $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , равномерно сходится к предельной функции  $f(x) \equiv 0$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$ , так как мажорируется последовательностью  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ , сходящейся к нулю. Однако последовательность  $f'_n(x) = n \cos(n^2 x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , не имеет предельной функции на  $[-\pi, \pi]$ , так как при  $n \rightarrow \infty$  неограниченно возрастает хотя бы в точке  $x = 0$ .

**Теорема о почленном дифференцировании ряда.** Пусть функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , определены на отрезке  $[a, b]$  и имеют на нем непрерывные производные  $u'_n(x)$ . Если на  $[a, b]$  сходится ряд (11.2) и равномерно сходится ряд, составленный из производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x) + \dots, \quad (11.14)$$

то и сумма  $f(x)$  ряда (11.2) имеет на  $[a, b]$  производную и выполняется

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x). \quad (11.15)$$

Покажем, что в отдельных случаях, когда сходимость ряда (11.14), со-

ставленного из производных, является неравномерной, также может выполняться равенство (11.15). Контрпример.

**11.54. Неравномерно сходящийся ряд  $\sum u'_n(x)$ , при котором почленное дифференцирование ряда  $f(x) = \sum u_n(x)$  справедливо.**

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+2}}{n+2}$  в интервале  $(0, 1)$ . Используя известное разложение  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ , справедливое для

$-1 < x \leq 1$ , получим для суммы  $f(x)$  ряда:  $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n+1}$ , составленный из производных (непрерывных) членов исходного ряда, встречался нам в примерах 11.14 и 11.40.

Там было показано, что его сумма  $g(x) = -\frac{x^2}{1+x}$ , и он сходится в  $(0, 1)$  неравномерно. Убедимся, что равенство (11.15) выполняется, действительно, получим

$$f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-x(1+x)-1}{1+x} = -\frac{x^2}{1+x} = g(x).$$

Заметим, что почленное дифференцирование исходного ряда выполняется, несмотря на неравномерную сходимость ряда, составленного из производных, и рассмотрение интервала вместо отрезка.

В то же время совсем удалить из утверждения предположение о равномерной сходимости ряда, составленного из производных, нельзя. Иначе получим неверное утверждение. Контрпример.

**11.55. Неравномерно сходящийся ряд  $\sum u'_n(x)$ , при котором почленное дифференцирование ряда  $f(x) = \sum u_n(x)$  несправедливо.** Используем последовательность из контрпримера 11.52. Построим на отрезке  $[-\pi, \pi]$  ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ , члены которого зададим соотношениями  $u_1(x) = f_1(x)$ ,  $u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Такое задание членов ряда обеспечивает тождественное равенство частичных сумм ряда членам последовательности  $\{f_n(x)\}$ , см. пример 10.1. Отсюда получаем, что сумма такого ряда будет тождественно совпадать с предельной функцией последовательности

$\{f_n(x)\}$ :  $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x \in [-\pi, \pi], x \neq 0. \end{cases}$  Соответственно сходимость ряда (как и последовательности) будет неравномерной.

Ряд, составленный из производных,  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ , очевидно, будет иметь члены  $u'_1(x) = f'_1(x)$ ,  $u'_n(x) = f'_n(x) - f'_{n-1}(x)$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , т.е. его частичные суммы будут тождественно равны членам последовательности  $\{f'_n(x)\}$ . Так как на отрезке  $[-\pi, \pi]$  выполняется  $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \equiv 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  сходится на  $[-\pi, \pi]$  к тождественно нулю,  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \equiv 0$ . Эта сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  (как и последовательности  $\{f'_n(x)\}$ ) будет неравномерной.

Заметим, что сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  (предельная функция  $f(x)$  последовательности) недифференцируема в точке  $x = 0$ , и, хотя в других точках она имеет нулевую производную, почленное дифференцирование ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$  на отрезке  $[-\pi, \pi]$  невозможно.

### 11.3. Степенные ряды

**Достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора.** Если функция  $f(x)$  на отрезке  $[0, H]$  или  $[-H, 0]$ ,  $H > 0$ , включая концевые точки, имеет производные всех порядков (предполагается, что функция определена в некотором интервале, включающем данный отрезок), и на всем отрезке выполняется  $|f^{(n)}(x)| \leq L$ , где  $L$  — постоянная, которая не зависит от  $x$  и  $n$ , то на всем этом отрезке имеет место разложение:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (11.16)$$

Покажем, что условие ограниченности производных функции (независимо от  $n$ ) не является необходимым для разложения этой функции в ряд (11.16). Приведем контрпример.

**11.56. Функция  $f(x)$ , разложимая в ряд Тейлора в некотором полуинтервале, в любой точке которого не соблюдается ус-**



ловие  $|f^{(n)}(x)| \leq L$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = \ln(1+x)$ . Ее производные равны:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11.17)$$

Коэффициенты ряда Тейлора равны:

$$a_0 = f(0) = 0, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Соответственно получаем для функции  $f(x) = \ln(1+x)$  ряд Тейлора, который, см. [2], т. II, с. 56–57, сходится к функции  $\ln(1+x)$  на полуинтервале  $(-1, 1]$ :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (11.18)$$

Проверим выполнение условий утверждения. Для любого  $x_0 \in (-1, +\infty)$ , во-первых, существуют все производные (11.17), но, во-вторых, абсолютные величины этих производных не ограничены по  $n$ , так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} |f^{(n)}(x_0)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)!}{(1+x_0)^n} = +\infty$ . Равенство предела  $+\infty$  очевидно: при  $x_0 \in (-1, 0]$ , так как числитель дроби стремится к  $+\infty$ , а ее знаменатель – положителен и ограничен; при  $x_0 \in (0, +\infty)$  и  $n > 2[1+x_0]+1$ , так как при каждом увеличении  $n$  на единицу дробь, стоящая под знаком предела, умножается на величину, большую двух. Таким образом, условие ограниченности производных функции (независимо от  $n$ ) нигде в полуинтервале  $(-1, 1]$  не выполняется, но в этом полуинтервале имеет место разложение функции в ряд (11.18).

Снимем в утверждении условие ограниченности производных функции (независимо от  $n$ ), получим некорректное утверждение, опровергаемое следующим контрпримером.

**11.57.** Функция  $f(x)$ , для которой условие  $|f^{(n)}(x)| \leq L$  не соблюдается на отрезке, и которая не раскладывается в ряд Тейлора на этом отрезке. Используем предыдущий контрпример, только рассмотрим отрезок  $[0, 2]$ . Функция  $f(x) = \ln(1+x)$  имеет во всех точках этого отрезка производные (11.17) всех порядков. Однако, как было показано выше, все эти производные при изменении  $x$  в  $[0, 2]$  не оказываются по абсолютной величине ограниченными

одним и тем же числом  $L$ , которое не зависит от  $n$ . Видим, что функция  $f(x) = \ln(1+x)$  не раскладывается во всех точках отрезка  $[0, 2]$  в ряд (11.16), который для нашей функции записывается в виде (11.18).

**Теорема об абсолютной сходимости степенного ряда.** Если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (11.19)$$

сходится для значения  $x = \bar{x}$ ,  $\bar{x} \neq 0$ , то он абсолютно сходится для любого значения  $x$  такого, что  $|x| < |\bar{x}|$ .

Любой ряд вида (11.19) сходится как минимум в точке  $x = 0$ . Приведем известные примеры степенных рядов, сходящихся только при  $x = 0$ , для которых данная теорема, очевидно, неприменима.

**11.58. Примеры степенных рядов, сходящихся только в одной точке.** Ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$  при любом  $x = \bar{x} \neq 0$  расходятся,

так как общие члены числовых рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} n! \bar{x}^n$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n \bar{x}^n$  не стремятся к нулю, а неограниченно возрастают по абсолютной величине. Действительно, при всех  $n > \frac{2}{|\bar{x}|}$  выполняется: для первого ряда

отношение абсолютных величин его последовательных членов

$$\frac{|n! \bar{x}^n|}{|(n-1)! \bar{x}^{n-1}|} = n |\bar{x}| > 2, \text{ для второго ряда абсолютная величина его}$$

члена  $|n^n \bar{x}^n| = |n \bar{x}|^n = (n |\bar{x}|)^n > 2^n$ . Т.е. начиная с некоторого номера каждый последующий член: в первом случае — превышает предыдущий член по абсолютной величине более чем в два раза, во втором случае — больше по абсолютной величине  $2^n$ .

**Теорема об области сходимости степенного ряда.** Для любого степенного ряда (11.19), если он сходится не только при  $x = 0$ , существует такое положительное число  $R$  (оно может быть и  $+\infty$ ), что ряд абсолютно сходится для  $|x| < R$ , и ряд расходится для  $|x| > R$  (если  $R < +\infty$ ).

Число  $R$  называется радиусом сходимости ряда, интервал  $(-R, R)$  называется интервалом сходимости ряда. Если ряд всюду расходится (кроме точки  $x = 0$ ), то принимается  $R = 0$ . Такие случаи показаны в предыдущем примере.

Если ряд всюду на числовой оси сходится, то принимается  $R = \infty$ . Приведем известные примеры таких рядов.

### 11.59. Примеры степенных рядов, сходящихся всюду. Ряды

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$  при любом  $x_0$  сходятся. Это легко устанавливается с помощью признаков Даламбера и Коши абсолютной сходимости.

Действительно, для числовых рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0^n}{n^n}$  имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_0^{n+1}| n!}{(n+1)! |x_0^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_0|}{n+1} = 0 < 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_0^n / n^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_0|}{n} = 0 < 1,$$

где  $b_n$  и  $c_n$  — общие члены первого и второго числовых рядов.

Наконец простым примером покажем, что для любого  $R = R_0$ ,  $0 < R_0 < +\infty$ , существует степенной ряд с радиусом сходимости  $R = R_0$ .

**11.60\*. Степенной ряд с произвольным заданным радиусом сходимости.** Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{R_0^n}$  имеет радиус сходимости, рав-

ный  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_0^{n+1}}{R_0^n} = R_0$ , где  $a_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , — коэффициенты степенного ряда, и применена формула для радиуса сходимости в случае, когда коэффициенты ряда не равны нулю и существует использованный в формуле предел.

В теореме ничего не говорится о сходимости ряда на концах интервала сходимости. Возможны различные варианты. Приведем примеры.

**11.61. Степенные ряды с различными вариантами сходимости (расходимости) в концах интервала  $(-R, R)$ .** Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  имеет  $R = 1$ . На концах интервала сходимости получаем расходящиеся числовые ряды  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ . Промежуток сходимости  $(-1, 1)$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ,  $R = 1$ . На концах интервала:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ . Пер-

вый ряд сходится неабсолютно, второй расходится. Промежуток сходимости  $[-1, 1)$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$  имеет  $R = 1$ . На концах интервала  $(-1, 1)$  получаем ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ . Первый расходится, второй сходится неабсолютно. Промежуток сходимости  $(-1, 1]$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n}$ ,  $R = 1$ . На концах интервала  $(-1, 1)$  получаем одинаковые неабсолютно сходящиеся ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}$ . Промежуток сходимости  $[-1, 1]$ .

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ,  $R = 1$ . В точках  $x = \pm 1$  получаем ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , оба абсолютно сходятся. Промежуток сходимости  $[-1, 1]$ .

**Теорема о равномерной сходимости степенного ряда.** При любом числе  $r$ ,  $0 < r < R$ , где  $R$  – радиус сходимости ряда (11.19),  $R > 0$ , этот ряд сходится равномерно на отрезке  $[-r, r]$ .

Условие  $0 < r < R$  является в утверждении достаточным, но не является необходимым для равномерной сходимости ряда (11.15). Контрпример.

**11.62. Степенной ряд, равномерно сходящийся на всем отрезке  $[-R, R]$  своей сходимости.** Ряд из предыдущего примера

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ , имеющий радиус сходимости  $R = 1$ , равномерно сходится на всем отрезке  $[-1, 1]$  своей сходимости. Действительно, он мажорируется на всем этом отрезке сходящимся числовым рядом  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ :

$$\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}, \quad x \in [-1, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

**Теорема о непрерывности суммы степенного ряда.** Сумма  $f(x)$  степенного ряда (11.19) представляет собой непрерывную функцию на его интервале сходимости  $(-R, R)$ .

Заметим, что и в конечных точках интервала сходимости  $(-R, R)$  сумма ряда может быть непрерывна. Пример.

**11.63. Степенной ряд, имеющий непрерывную сумму на всем отрезке  $[-R, R]$  своей сходимости.** Ряд, рассмотренный в примере 11.62, имеет непрерывную на всем отрезке  $[-1, 1]$  сумму. Это следует из теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося на отрезке ряда, составленного из непрерывных на этом отрезке функций. Действительно, все члены ряда — непрерывные на  $[-1, 1]$  функции, и, как показано выше, ряд сходится равномерно на  $[-1, 1]$ .

**Теорема о тождестве степенных рядов.** Если суммы  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  степенных рядов  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  в окрестности (двусторонней или односторонней) точки  $x = 0$  тождественно равны:  $f_1(x) \equiv f_2(x)$ , то эти ряды тождественны, т.е. все соответствующие их коэффициенты попарно равны  $a_n = b_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Сформулируем обратное, в некотором смысле, утверждение: если две функции имеют один и тот же ряд Тейлора, то они тождественно равны. Проверим его контрпримером.

**11.64. Две функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$ , ряды Тейлора которых тождественны, но  $f(x) = \varphi(x)$  только при  $x = 0$ .** Рассмотрим функции  $f(x) = e^x$  и  $\varphi(x) = e^x + C(x)$ , где функция

$$C(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$$

это пример Коши функции, отличной от тождественного нуля, имеющей в точке  $x = 0$  нулевое значение и нулевые производные всех порядков, см. [2], т. II, с. 61–62. Эти функции являются всюду бесконечно дифференцируемыми и имеют одинаковые ряды Тейлора  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  и  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ , так как совпадают все коэффициенты:

$$a_0 = f(0) = \varphi(0) = b_0 = 1, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} = b_n = \frac{1}{n!},$$

$n = 1, 2, \dots$  Однако функции  $f(x) = e^x$  и  $\varphi(x) = e^x + C(x)$  совпадают только при  $x = 0$ .

**Теорема 1 о поведении степенного ряда вблизи конца интервала схо-**

димости. Если степенной ряд (11.19) на конце  $x = R$  его интервала сходимости расходится, то ряд не сходится на полуинтервале  $[0, R)$  равномерно.

**Теорема 2 о поведении степенного ряда вблизи конца интервала сходимости.** Если степенной ряд (11.19) сходится и при  $x = R$  (возможно, неабсолютно), то ряд сходится равномерно на всем отрезке  $[0, R]$ .

Аналогичные утверждения имеют место и в случае левого конца  $x = -R$  интервала сходимости. Приведем иллюстративные примеры.

**11.65. Степенной ряд, расходящийся в точке  $x = R$ , и сходящийся на полуинтервале  $[0, R)$  неравномерно.** Ряд из примера

11.61  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  сходится в интервале  $(-1, 1)$ . На концах интервала сходимости он расходится. Покажем, что его сходимось на полуинтервале  $[0, 1)$  является неравномерной. Рассмотрим остаток ряда

$\varphi_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ . Здесь использована формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии. Для  $\varepsilon = 1$  и любого, сколь угодно большого,  $n$  существует  $x = x_0$ , достаточно близкое к единице, такое, что  $|\varphi_n(x_0)| = \frac{x_0^{n+1}}{1-x_0} > \varepsilon = 1$ . Это следует из того, что

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^{n+1}}{1-x} = +\infty \text{ при любом значении } n.$$

**11.66. Степенной ряд, сходящийся в точке  $x = R$  (неабсолютно) и сходящийся на отрезке  $[0, R]$  равномерно.** Ряд из примера

11.61  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$  сходится на полуинтервале  $(-1, 1]$ . В точке

$x = 1$  получаем числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ , сходящийся неабсолютно.

Покажем, что на отрезке  $[0, 1]$  сходимось ряда будет равномерной.

Действительно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $N > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ , что для всех  $n > N$  и всех  $x \in [0, 1]$  выполняется

$$|\varphi_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \right| < \left| (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| \leq \frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

В данном случае (для знакопередающегося ряда) использована

оценка абсолютной величины остатка ряда абсолютной величиной первого члена остатка.

**Теорема Абеля о непрерывности на конце интервала сходимости.** Если степенной ряд (11.19) сходится (возможно, неабсолютно) при  $x = R$ , то в этой точке его сумма  $f(x)$  непрерывна слева, т.е.  $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ .

Приведем сначала иллюстративный пример.

**11.67. Степенной ряд, сходящийся в точке  $x = R$  (неабсолютно), сумма которого непрерывна в точке  $x = R$  слева.** Известно, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$  является рядом Тейлора функции  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  и сходится к ней на отрезке  $[-1, 1]$ , см. [2], т. II, с. 55–56. Проверим непрерывность слева суммы ряда в точке  $x = 1$ . При  $x = 1$  получаем неабсолютно сходящийся числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$ , известный как ряд Лейбница для числа  $\frac{\pi}{4}$ . Рассмотрим предел слева суммы ряда в точке  $x = 1$   $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$ . Видим, что он равен сумме ряда в точке  $x = 1$ . Непрерывность слева установлена.

Сформулируем обратное, в некотором смысле, утверждение: если степенной ряд (11.19) имеет интервал сходимости  $(-R, R)$  и  $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  существует и конечен, то сходится степенной ряд (хотя бы неабсолютно) при  $x = R$  и выполняется  $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ . Приведем следующий контрпример.

**11.68. Степенной ряд, для которого существует и конечен  $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , но который расходится в точке  $x = R$ .** Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$  имеет интервал сходимости  $(-1, 1)$ . В интервале сходимости сумма ряда  $f(x)$  равна:  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ . Существует при

$x \rightarrow 1-0$  конечный предел суммы ряда  $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$ . Однако при  $x = 1$  имеем расходящийся числовой ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ .

Внутри интервала сходимости  $(-R, R)$  степенной ряд сходится абсолютно, поэтому его члены можно переставлять, не изменяя суммы ряда. Однако для теоремы Абеля порядок следования членов степенного ряда существен, так как в ее формулировке не исключается возможность неабсолютной сходимости степенного ряда на конце интервала  $(-R, R)$ . Приведем пример.

**11.69. Степенной ряд, перестановка членов которого, не нарушая его сумму внутри интервала сходимости, делает ее разрывной в точке  $x = R$ .** Возьмем любой степенной ряд, неабсолютно сходящийся на концах интервала сходимости, например ряд из примера 11.67  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$ , который является рядом Тейлора функции  $f(x) = \arctg x$  и сходится к ней на отрезке  $[-1, 1]$ . На конце интервала сходимости (при  $x = 1$ ) получаем неабсолютно сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Согласно теореме Римана можно так переставить его члены, что сумма полученного ряда будет равна, скажем, единице. Если мы таким же образом переставим члены нашего степенного ряда, то получим, что внутри интервала сходимости  $(-1, 1)$ , где ряд сходится абсолютно, сумма  $f^*(x)$  нового ряда (с переставленными членами) останется прежней  $f^*(x) = f(x) = \arctg x$ , а в точке  $x = 1$ , где сходимость неабсолютная,  $f^*(1) = 1$ . Рассмотрим в точке  $x = 1$  предел слева суммы нового ряда  $\lim_{x \rightarrow 1-0} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \arctg x = \frac{\pi}{4}$ . Видим, что непрерывности уже нет, так как  $f^*(1) = 1$ .

**Теорема о почленном интегрировании степенного ряда.** Степенной ряд (11.19) на отрезке  $[0, x]$ , где  $|x| < R$ , можно интегрировать почленно:

$$\int_0^x f(x) dx = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \dots \quad (11.20)$$

Если ряд сходится на конце интервала сходимости, то по теореме Абеля



сумма ряда непрерывно продолжается на весь отрезок  $[0, R]$  и в выражении (11.20) можно положить  $x \in [0, R]$ , см. [8], т. II, с. 447. Приведем пример.

**11.70. Степенной ряд, для которого корректно почленное интегрирование на отрезке  $[0, R]$ . Ряд**

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

сходится на полуинтервале  $(-1, 1]$ . Почленно проинтегрируем ряд на отрезке  $[0, x]$ ,  $x < 1$ ,

$$\int_0^x \ln(1+u) du = \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \dots \quad (11.21)$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^x \ln(1+u) du &= \left| \begin{matrix} 1+u=t \\ du=dt \end{matrix} \right|_1^{1+x} = \int_1^{1+x} \ln t \, dt = (t \ln t - t) \Big|_1^{1+x} = \\ &= (1+x) \ln(1+x) - 1 - x + 1 = (1+x) \ln(1+x) - x. \end{aligned} \quad (11.22)$$

Положим в (11.22), а затем в (11.21)  $x = 1$ , получим  $2 \ln 2 - 1$  и

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Так как  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , то далее получаем

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots &= -1 + 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{6} + \dots = \\ &= -1 + 2 \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right) = 2 \ln 2 - 1, \end{aligned}$$

так как в скобках известный числовой ряд с суммой  $\ln 2$ . Видим, что равенство (11.21) выполняется и при  $x = 1$ .

Правая часть (11.20) выражает в виде ряда первообразную функцию для функции  $f(x)$ . Подставляя значения первообразной в формулу Ньютона – Лейбница, можем вычислять определенные интегралы. В отдельных случаях для получения определенного интеграла на отрезке, включающем конец интервала сходимости, применимы несобственные интегралы. Приведем иллюстративный пример.

**11.71\*. Пример корректного использования почленного интегрирования степенного ряда для вычисления несобственного интеграла.** Опять рассмотрим сходящийся на полуинтервале  $(-1, 1]$

ряд  $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$ , но на этот раз

обратим внимание на другой конец ( $x = -1$ ) интервала сходимости. Запишем для некоторого числа  $\delta$ , близкого справа к числу  $-1$ ,  $-1 < \delta < 0$ , интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} \ln(1+x) dx &= \left( \frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} + \dots \right) \Bigg|_0^{\delta} = \\ &= \frac{\delta^2}{1 \cdot 2} - \frac{\delta^3}{2 \cdot 3} + \frac{\delta^4}{3 \cdot 4} - \frac{\delta^5}{4 \cdot 5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{\delta^{n+1}}{n(n+1)} + \dots \quad (11.23) \end{aligned}$$

Выполним в (11.23) предельный переход при  $\delta \rightarrow -1+0$ . Так как в (11.23) слева получим сходящийся несобственный интеграл, то предельный переход справедлив.

Сначала вычислим несобственный интеграл слева. Получим, см.

$$\begin{aligned} (11.22), \int_0^{\delta} \ln(1+x) dx &= (1+\delta) \ln(1+\delta) - \delta, \text{ далее перейдем к пределу} \\ \int_0^{-1} \ln(1+x) dx &= \lim_{\delta \rightarrow -1+0} \int_0^{\delta} \ln(1+x) dx = \lim_{\delta \rightarrow -1+0} ((1+\delta) \ln(1+\delta) - \delta) = 1. \end{aligned}$$

Затем подставим в правую часть (11.23)  $\delta = -1$ , получим ряд  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$ , который сходится к 1. Дей-

ствительно,  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и ряд можно записать в

следующем виде  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = 1$ . Справедливость предельного перехода в данном случае подтверждена.

**Теорема о почленном дифференцировании степенного ряда.** Степенной ряд (11.19) внутри его интервала сходимости можно почленно дифференцировать, т.е. существует  $f'(x)$ ,  $x \in (-R, R)$ , и выполняется:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

Это утверждение справедливо и для концов интервала сходимости. Однако на конце интервала сходимости требуется, чтобы ряд, составленный из производных, сходиллся, см. [8], т. II, с. 447–448. Пример.

**11.72. Пример почленного дифференцирования степенного ряда в концах его интервала сходимости.** Рассмотрим сходящийся на отрезке  $[-1, 1]$  ряд

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + \dots \quad (11.24)$$

Его можно почленно продифференцировать в интервале сходимости  $(-1, 1)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{1+x}} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4}2x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}3x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}4x^3 + \dots = \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \right). \end{aligned} \quad (11.25)$$

В концах интервала сходимости ( $x = \pm 1$ ) потребуется, чтобы полученный при дифференцировании ряд (11.25) сходиллся.

Сначала обратимся к точке  $x = 1$ . Подставив  $x = 1$  в (11.25), получим  $\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots \right)$ . Ряд  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$  схо-

дится по признаку Лейбница, так как он знакопередающийся, абсолютные величины его членов монотонно убывают (каждый последующий есть произведение предыдущего на число с абсолютной величиной, меньшей единицы) и стремятся к нулю. Покажем последнее. Запишем абсолютную величину общего члена (начиная со второго) полученного числового ряда в виде произведения

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right).$$

Из теории бесконечных произведений известно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\dots(1+a_n)) = 0, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \text{ все } a_n < 0$$

и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  расходится, см. [2], т. II, с. 47. В нашем случае эти усло-

$$\text{вия выполняются и } \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \right) = 0.$$

Обратимся к точке  $x = -1$ . Подставив  $x = -1$  в (11.25), получим умноженный на  $\frac{1}{2}$  ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$ , который имеет бесконечную сумму  $(+\infty)$ . Покажем это. Запишем общий член (начиная со второго) полученного числового ряда в виде

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2n-1}{2n-2} \cdot \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n}.$$

Действительно, по признаку сравнения положительных рядов наш ряд расходится (имеет

сумму  $+\infty$ ), так как расходится ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ . Заметим, что хотя ряд, составленный из производных, расходится, но равенство суммы ряда  $+\infty$  соответствует бесконечному значению  $(+\infty)$  производной функции (11.24), т.е.  $\sqrt{1+x}$ , в точке  $x = -1$ .

**Теорема о степенном ряде как ряде Тейлора.** Функция, которая является суммой некоторого степенного ряда в его интервале сходимости, имеет внутри этого интервала производные всех порядков. Этот ряд, по отношению к функции (своей сумме), является не чем иным, как ее рядом Тейлора.

Однако обратное утверждение неверно, т.е. не всякая функция, имеющая в некотором интервале  $(-R, R)$  производные всех порядков, представляется в этом интервале некоторым степенным рядом вида (11.19). Для ряда Тейлора (по степеням  $x$ ), формально построенного для бесконечно дифференцируемой функции  $f(x)$ , возможно два особых случая: 1) он сходится в  $(-R, R)$ , но к функции, не равной тождественно  $f(x)$ , т.е. (11.16) не выполняется во всем интервале  $(-R, R)$ ; 2) радиус его сходимости оказался равным нулю. Приведем примеры.

**11.73, 11.74, 11.75. Примеры всюду бесконечно дифференцируемых функций, для которых их ряды Тейлора, формально построенные, либо не сходятся к ним, либо вообще сходятся только в точке  $x = 0$ .** Рассмотрим бесконечно дифференцируемую на всей числовой оси функцию, использованную в примере 11.64,

$$C(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases} \quad \text{— пример Коши функции, имеющей в точке}$$

$x = 0$  нулевое значение и нулевые производные всех порядков, см. [2], т. II, с. 61–62. Очевидно, что ее ряд Тейлора, построенный по степеням  $x$ , будет иметь коэффициенты, равные нулю, т.е. он будет сходиться (на всей числовой оси) к функции  $f(x) \equiv 0$ . Видим, что функции  $C(x)$  и  $f(x)$  равны только в точке  $x = 0$ .

Сошлемся на два примера из [1], с. 91–93. Там приводится всюду бесконечно дифференцируемая функция  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cos(n^2 x)$ , ряд Тейлора которой (по степеням  $x$ ) сходится только в точке  $x = 0$ .

Там же построена в виде суммы функционального ряда функция (всюду бесконечно дифференцируемая), ряд Тейлора которой есть

$\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$ . Этот ряд нами рассматривался в примере 11.58, где была показана его сходимость только в точке  $x = 0$ .

### Упражнения

11.1. Определить, в каких промежутках сходимость функциональной последовательности  $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$ ,  $-\infty < x < +\infty$ , равномерна и неравномерна.

11.2. Привести пример ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ , который на интервале  $(0, 1)$  равномерно сходится, хотя и нарушается предположение (только одно) признака Абеля – о равномерной сходимости ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ .

11.3. Привести пример ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ , который на интервале  $(0, 2)$  равномерно сходится, хотя и нарушается предположение (только одно) признака Дирихле – об ограниченности в совокупности частичных сумм ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ .

11.4. Построить равномерно сходящуюся последовательность, и члены которой, и предельная функция непрерывны только в одной точке.

11.5. Построить неравномерно сходящуюся функциональную последовательность со свойствами, данными в предыдущем упражнении.

11.6. Иллюстрировать теорему о почленном переходе к пределу примером равномерно сходящегося ряда, у которого все члены  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , и сумма  $f(x)$  имеют предел только в одной точке, во всех других точках предел, и даже пределы слева и справа, не существуют.

11.7. Удалим из теоремы о почленном переходе к пределу требование равномерной сходимости ряда. Опровергните полученное утверждение.

11.8\*. Показать контрпримером, что в усиленной теореме о предельном переходе при почленном интегрировании последовательности нельзя заменить (введя несобственные интегралы) отрезок  $[a, b]$  полуинтервалом  $[a, +\infty)$ .

11.9. Дополнительно к примеру 11.65, показать, что степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  сходится неравномерно и на полуинтервале  $(-1, 0]$ .

11.10. Опровергнуть контрпримером следующее утверждение: если степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  не имеет при  $x = R$ , где  $R$  – радиус сходимости, суммы (конечной или бесконечной), то его сумма  $f(x)$  также не имеет при  $x \rightarrow R-0$  предела, т.е.  $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  не существует.

## РАЗДЕЛ 12

### НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

#### 12.1. Несобственные интегралы на бесконечных промежутках

**Определение интегралов на бесконечных промежутках.** Пусть функция  $f(x)$  определена на промежутке  $[a, +\infty)$ , где  $a$  – действительное число, и интегрируема на отрезке  $[a, A]$  при любом  $A > a$ . Конечный или бесконечный предел при  $A \rightarrow +\infty$  интеграла  $\int_a^A f(x) dx$  называется несобственным интегралом функции  $f(x)$  на промежутке  $[a, +\infty)$  и обозначается символом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx. \quad (12.1)$$

Если предел (12.1) существует и конечен, то говорят, что интеграл сходится, а функцию  $f(x)$  называют интегрируемой на промежутке  $[a, \infty)$ . Если предел (12.1) бесконечен или не существует, то говорят, что интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл на  $(-\infty, a]$ :

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A' \rightarrow -\infty} \int_{A'}^a f(x) dx, \quad A' < a. \quad (12.2)$$

Интеграл на промежутке  $(-\infty, +\infty)$  принимают как сумму:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (12.3)$$

Предполагается существование в (12.3) обоих интегралов справа, исключая только случай, когда эти интегралы равны бесконечности разных знаков. Из определения следует, что интеграл (12.3) не зависит от числа  $a$ . Интегралы (12.1), (12.2), (12.3) называются несобственными интегралами первого рода.

Рассмотрим некоторые примеры функций, для которых не существуют несобственные интегралы на бесконечных промежутках.

**12.1, 12.2. Примеры расходящихся несобственных интегралов первого рода.** Для функции  $f(x) = \cos x$  на бесконечном полуинтервале  $(-\infty, 0]$  рассмотрим несобственный интеграл вида (12.2)

$$\int_{-\infty}^0 \cos x \, dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^0 \cos x \, dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} (\sin 0 - \sin A) = - \lim_{A \rightarrow -\infty} \sin A.$$

Заметим, что предел справа не существует, т.е. не существует несобственный интеграл.

Для функции  $f(x) = \frac{1}{x}$  на бесконечном полуинтервале  $[1, +\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln A - \ln 1) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln A = +\infty.$$

Несобственный интеграл равен  $+\infty$ , т.е. расходится.

Для существования определенного интеграла (собственного) на отрезке достаточны непрерывность и ограниченность подынтегральной функции (на отрезке ограниченность следует из непрерывности). В примерах 12.1 и 12.2 функции удовлетворяют этим требованиям, но интегралы (несобственные) расходятся. Это связано с неограниченным ростом длины отрезка интегрирования при предельном переходе. В примере 12.2 функция стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ , но этого оказывается недостаточно для сходимости интеграла. Рассмотрим подынтегральную функцию, которая при  $x \rightarrow +\infty$  является бесконечно малой по сравнению с функцией из примера 12.2.

### 12.3. Пример сходящегося несобственного интеграла первого

рода. Для функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  на бесконечном полуинтервале

$[1, +\infty)$   $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{A} - (-1) \right) = 1$ . Видим, что в этом случае несобственный интеграл сходится.

Ниже будет приведено утверждение о том, что для сходимости несобственного интеграла достаточно, чтобы подынтегральная функция являлась бесконечно малой функцией порядка  $\lambda > 1$  по сравнению с функцией  $\frac{1}{x}$ . В то же время стремление функции к нулю при  $x \rightarrow +\infty$  не является необходимым условием сходимости несобственного интеграла. Простой контрпример.

**12.4. Сходящийся интеграл первого рода на  $[1, +\infty)$  от функции  $f(x)$  такой, что  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$ .** Функцию из предыдущего

примера переопределим при натуральных  $x$ :  $f^*(x) = f(x) = \frac{1}{x^2}$ , если  $x$  не натуральное число;  $f^*(x) = 1$ , если  $x$  — натуральное.

Очевидно,  $\int_1^A f^*(x) dx = \int_1^A f(x) dx = \int_1^A \frac{dx}{x^2}$ , где  $A$  – любое число из интервала  $(1, +\infty)$ . Отсюда,  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f^*(x) dx = 1$ , как и в предыдущем примере, и несобственный интеграл  $\int_1^{+\infty} f^*(x) dx$  сходится, хотя функция  $f^*(x)$  не стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ .

Построим более сильный контрпример.

**12.5. Сходящийся интеграл первого рода на  $[0, +\infty)$  от функции, неограниченной на любом полуинтервале  $[A, +\infty)$ ,  $A > 0$ .** Рассмотрим на  $[0, +\infty)$  функцию  $y = f(x)$ , график которой есть ломаная (рис. 12.1, а) с последовательными вершинами в системе

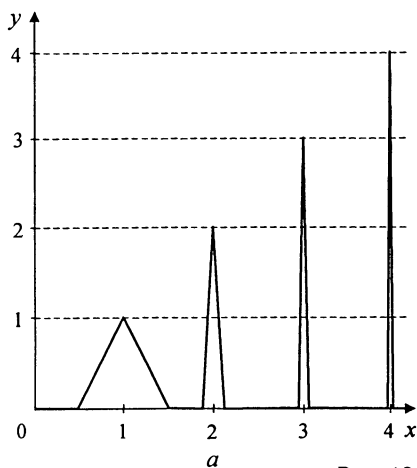
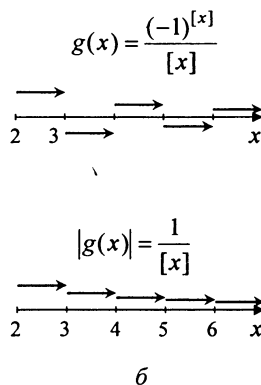


Рис. 12.1



теме координат  $Oxy$ :  $(0, 0)$ ,  $(1 - \delta_1, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1 + \delta_1, 0)$ ,  $(2 - \delta_2, 0)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2 + \delta_2, 0)$ ,  $(3 - \delta_3, 0)$ ,  $(3, 3)$ ,  $(3 + \delta_3, 0)$ , ..., где  $\delta_n = \frac{1}{n 2^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Функция  $f(x)$  непрерывная, и при любом  $A > 0$  существует  $\int_0^A f(x) dx$ , который, в силу неотрицательности  $f(x)$ , есть монотонно возрастающая функция верхнего предела интегрирования  $A$ .



Величина интеграла  $\int_0^A f(x)dx$  при значениях  $A = n + \frac{1}{2}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , равна суммарной площади треугольников, образуемых графиком функции и осью  $Ox$ , расположенных левее точки  $x = A$ . Площади  $S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n 2^n} \cdot n = \frac{1}{2^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , последовательных треугольников с серединами оснований в точках  $x = n$  образуют геометрическую прогрессию с первым членом  $1/2$  и знаменателем  $1/2$ . Очевидно, несобственный интеграл при  $A \rightarrow +\infty$  сходится к сумме  $S$  этой бесконечной геометрической прогрессии,  $S = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ .

**Теорема 1 сравнения для интегралов от неотрицательных функций.** Если существует такое число  $A$ ,  $A \geq a$ , что при всех  $x \geq A$  выполняется  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , то: 1) если сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ , то сходится и интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ; 2) если расходится  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , то расходится и  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ .

Если распространить данную теорему со случая неотрицательных функций на случай произвольных интегрируемых функций, то получим некорректное утверждение, опровергаемое следующим контрпримером.

**12.6. Пример неприменимости теоремы 1 сравнения для интегралов в случае произвольных по знаку подынтегральных функций.** Пусть  $f(x) = -\frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ , тогда  $f(x) < g(x)$  на бесконечном полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Хотя интеграл  $\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

сходится, но интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} -\frac{dx}{x}$  расходится.

Иногда возникает заблуждение, что данная теорема может быть перенесена на произвольные интегрируемые функции заменой неравенства  $f(x) \leq g(x)$  на неравенство  $|f(x)| \leq |g(x)|$ . Построим контрпример.

**12.7. Пример неприменимости теоремы 1 сравнения для интегралов в случае произвольных по знаку подынтегральных функций с заменой неравенства  $f(x) \leq g(x)$  на  $|f(x)| \leq |g(x)|$ .**

Пусть  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ ,  $g(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{[x]}$ , где  $[x]$  – целая часть числа  $x$  (рис. 12.1, б). Тогда на бесконечном полуинтервале  $[2, +\infty)$  выполняется  $\frac{1}{x \ln x} < \frac{1}{[x]}$  или  $\left| \frac{1}{x \ln x} \right| < \left| \frac{(-1)^{[x]}}{[x]} \right|$ , т.е.  $|f(x)| < |g(x)|$ . Заметим, что интеграл  $\int_2^{+\infty} g(x) dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{[x]} dx$  сходится, так как сходится отвечающий ему числовой ряд  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ . Сведение интеграла к данному ряду следует из того факта, что

$$\int_n^{n+1} \frac{(-1)^{[x]}}{[x]} dx = \frac{(-1)^n}{n} ((n+1) - n) = \frac{(-1)^n}{n}, \text{ где } n = 2, 3, \dots$$

В то же время интеграл  $\int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$  расходится. Покажем это. Вычислим интеграл  $\int_2^A \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^A \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln(\ln A) - \ln(\ln 2)$ . Видим, что  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln(\ln A) - \ln(\ln 2)) = +\infty$ .

### Теорема 2 сравнения для интегралов от неотрицательных функций.

Пусть существует предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$ . Тогда: при  $0 \leq K < +\infty$ , если сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ , то сходится и интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ; при  $0 < K \leq +\infty$ , если расходится первый интеграл, то расходится и второй; при  $0 < K < +\infty$  оба интеграла сходятся или оба расходятся.

Теорема 2 следует из теоремы 1. Ее, как правило, удобнее использовать, чем теорему 1, но при этом требуется существование предела  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ , что несколько сужает применимость теоремы 2. Приведем пример.

**12.8. Несобственные интегралы первого рода от неотрицательных функций, к сравнению которых применима теорема 1 и неприменима теорема 2.** Пусть  $f(x) = \frac{|\sin x|}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  на бес-

конечном полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Применим теорему 1. Очевидно, что при  $x \geq 1$  выполняется неравенство  $f(x) \leq g(x)$ . Интеграл

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ сходится, следовательно, сходится интеграл}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2} dx.$$

Применим теорему 2:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} |\sin x|$ , но этот предел не существует, так как при сколь угодно больших значениях  $x$  функция  $|\sin x|$  принимает значения и 0, и 1.

**Признак сходимости 1 для интегралов от неотрицательных функций.** Пусть существует число  $A$ ,  $A \geq a$ , такое, что для всех  $x \in [A, +\infty)$  имеем  $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ . Тогда: 1) если  $\lambda > 1$  и  $0 \leq \varphi(x) \leq c < +\infty$ , то интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится, 2) если  $\lambda \leq 1$  и  $\varphi(x) \geq c > 0$ , то этот интеграл расходится.

Приведем некоторые примеры интегралов, для которых данный признак сходимости неприменим.

**12.9, 12.10. Несобственные интегралы первого рода от неотрицательных функций, к которым неприменим признак сходимости 1.** Пусть  $\varphi(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x - \text{натуральное число,} \\ 1, & \text{при всех других } x, \end{cases}$  а функция

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^2}. \text{ Рассмотрим интеграл } \int_1^{+\infty} f(x) dx, \text{ он сходится, так как}$$

$\int_1^A f(x) dx = \int_1^A \frac{dx}{x^2}$  при любом  $A > 1$ . Однако для установления сходимости интеграла признак 1 не может быть применен, так как функция  $\varphi(x)$  не ограничена сверху на полуинтервале  $[1, +\infty)$ .

Пусть  $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$ , где  $\varphi(x) = \frac{1}{\ln x}$ . Рассмотрим интеграл

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}. \text{ В примере 12.7 была установлена расходимость данного интеграла, но ее не определить с помощью признака}$$

1, так как функция  $\varphi(x) = \frac{1}{\ln x}$  не удовлетворяет требованию  $\varphi(x) \geq c > 0$  при всех  $x \geq 2$  и при любом  $c > 0$ . Действительно,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$  и  $\varphi(x) = \frac{1}{\ln x} < c$  для достаточно больших  $x$ .

**Признак сходимости 2 для интегралов от неотрицательных функций.** Пусть при  $x \rightarrow +\infty$  функция  $f(x)$  является бесконечно малой порядка  $\lambda > 0$  по сравнению с  $\frac{1}{x}$ . Тогда: если  $\lambda > 1$ , то интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится; если  $\lambda \leq 1$ , то расходится.

Заметим, что более сильное (по сравнению со случаем  $\lambda > 1$ ) утверждение: если при  $x \rightarrow \infty$  функция  $f(x)$  является бесконечно малой по сравнению с функцией  $\frac{1}{x}$ , то интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится, несправедливо. Контрпример.

**12.11. Функция  $f(x) = o(1/x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ , несобственный интеграл первого рода на  $[2, +\infty)$  от которой расходится.** Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ , которая при  $x \rightarrow +\infty$  является бесконечно малой по сравнению с функцией  $\frac{1}{x}$ . Однако несобственный

интеграл  $\int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$  расходится, см. пример 12.7.

**Критерий Коши сходимости интеграла в общем случае.** Для сходимости несобственного интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  необходимо и достаточно, чтобы для любого числа  $\varepsilon > 0$  существовало число  $A_0 > a$  такое, что для всех чисел  $A$  и  $A'$ :  $A > A_0$ ,  $A' > A$  выполнялось неравенство

$$|\Phi(A') - \Phi(A)| = \left| \int_a^{A'} f(x) dx - \int_a^A f(x) dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Заметим, что числа  $A$  и  $A'$  не связаны зависимостью. Пусть, скажем,  $A' = A^\alpha$ , где  $\alpha > 1$  – любое, сколь угодно большое, но фиксированное число.

Если вместо последнего неравенства принять  $\left| \int_A^{A^\alpha} f(x) dx \right| < \varepsilon$ , то получим альтернативное, но некорректное утверждение. Построим контрпример.

**12.12. Контрпример, опровергающий одну из альтернатив критерия Коши сходимости интеграла первого рода.** Предположим, что  $f(x) = \frac{1}{x \ln x \cdot \ln \ln x}$ , и рассмотрим несобственный интеграл

$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln \ln x}$ . Заметим, что при любом  $\alpha > 1$  предел

$$\begin{aligned} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{A^\alpha} \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln \ln x} &= \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln \ln \ln(A^\alpha) - \ln \ln \ln A) = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{\ln \ln(A^\alpha)}{\ln \ln A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{\ln(\alpha \ln A)}{\ln \ln A} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \frac{\ln \alpha + \ln \ln A}{\ln \ln A} = \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln \left( \frac{\ln \alpha}{\ln \ln A} + 1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $A_0 > 3$ , что при любом  $A > A_0$  выполняется неравенство

$$\left| \int_A^{A^\alpha} f(x) dx \right| < \varepsilon. \text{ Но интеграл } \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln \ln x} \text{ расходится. Действи-}$$

$$\text{тельно, } \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_3^A \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln \ln x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} (\ln \ln \ln A - \ln \ln \ln 3) = +\infty.$$

**Достаточное условие сходимости интеграла в общем случае.** Если сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ , то сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Обратное утверждение неверно. Контрпример.

**12.13. Интегралы:**  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  – сходящийся, но  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  – расходящийся. Рассмотрим функцию  $f(x) = \frac{(-1)^{[x]}}{[x]}$  и несобственный интеграл

$$\int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{[x]} dx, \text{ где } [x] \text{ – целая часть числа } x.$$

Как было показано в примере 12.7, данный интеграл сходится, так как сходится отвечающий ему числовой ряд  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ . В то же

$$\text{время интеграл } \int_2^{+\infty} |f(x)| dx = \int_2^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{[x]}}{[x]} \right| dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{[x]} \text{ расходится, так}$$

как расходится отвечающий ему числовой ряд  $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ . Этот ряд получаем, учитывая, что  $\int_n^{n+1} \frac{dx}{[x]} = \frac{1}{n} ((n+1) - n) = \frac{1}{n}$ , где  $n = 2, 3, \dots$

**Признак Абеля сходимости.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в промежутке  $[a, +\infty)$ , причем: функция  $f(x)$  интегрируема на этом промежутке, т.е. интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x) dx$  сходится (возможно, неабсолютно); функция  $g(x)$  монотонна и ограничена,  $|g(x)| \leq L$ ,  $L = \text{const}$ ,  $x \in [a, +\infty)$ . Тогда интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится.

В признаке Абеля сформулированы достаточные условия сходимости интеграла, они не являются необходимыми. Приведем контрпримеры. Для начала – контрпример, в котором обе функции  $f(x)$  и  $g(x)$  не являются интегрируемыми в промежутке  $[a, +\infty)$ , но интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится.

**12.14. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  монотонные и ограниченные, но неинтегрируемые на  $[a, +\infty)$ , однако интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится.** Пусть  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$  на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Тогда первое условие утверждения не выполняется, так как расходится интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ . Второе условие выполняется: функция  $g(x) = \frac{1}{x}$  монотонна и ограничена на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Хотя условия признака Абеля в полном объеме не выполняются, интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  сходится.

Рассмотрим контрпример, в котором обе функции  $f(x)$  и  $g(x)$  являются интегрируемыми на промежутке  $[a, +\infty)$ , но не являются на нем монотонными, однако интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится.

**12.15. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемые, но не монотон-**

ные на  $[a, +\infty)$ , однако интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится. Пусть

$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{\cos x}{x^2}$  на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Тогда первое условие утверждения выполняется, так как сходится (абсолютно) интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ . Второе условие не выполняется:

функция  $g(x) = \frac{\cos x}{x^2}$  ограничена, но не монотонна на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Видим, что не все условия признака Абеля выполняются, но интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x^4} dx$  сходится.

Далее рассмотрим случай двух функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , интегрируемых на промежутке  $[a, +\infty)$ , но не монотонных и не ограниченных на нем, однако таких, что интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится.

**12.16. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемые, но не монотонные и не ограниченные на  $[a, +\infty)$ , при которых, однако, интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится.** Пусть на полуинтервале  $[1, +\infty)$

$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ ,  $g(x) = \frac{\cos x}{x^2}$ , если  $x$  не натуральное число, и  $f(x) = g(x) = x$ , если  $x = 1, 2, \dots$ . Заметим, что по сравнению с предыдущим примером функции переопределены при натуральных значениях  $x$ , что не влияет на существование и величину интегралов  $\int_1^A f(x) dx$  и  $\int_1^A g(x) dx$ , где  $A > 1$ , а значит, и на существование

(сходимость) и величину интегралов  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  и  $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ . По тем же причинам существует (сходится) и сохраняет свою величину интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) g(x) dx$ . Однако условия признака сходимости о монотонности и ограниченности функций  $f(x)$  и  $g(x)$  нарушены.

Наконец приведем контрпример, в котором нарушаются все предположения признака сходимости, но интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится.

**12.17. Функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , при которых нарушаются все предположения признака Абеля сходимости, однако интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится.** Положим на полуинтервале  $[1, +\infty)$

$f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ , если  $x$  не натуральное число, и  $f(x) = g(x) = x$ , если  $x = 1, 2, \dots$ . Отметим, что по сравнению с примером 12.14 функции переопределены при натуральных значениях  $x$ , что сохраняет расходимость интегралов  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  и  $\int_1^{+\infty} g(x) dx$ , а также сходимостью интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$ . При этом все предположения признака сходимости не выполняются: обе функции неинтегрируемые, немонотонные и неограниченные на полуинтервале  $[1, +\infty)$ .

Попробуем усилить признак Абеля сходимости интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  последовательным удалением отдельных его предположений. Сначала сни-  
 мем требование сходимости интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ . Контрпример.

**12.18. Функция  $f(x)$ , не интегрируемая на  $[a, +\infty)$ , при которой интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  расходится.** Примем  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x} + 1$  на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Заметим, что выполняются все требования признака Абеля, кроме сходимости интеграла, так как интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  расходится. Видим, что в данном случае интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) g(x) dx = \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \right) dx$  расходится.

Снимем предположение о монотонности функции  $g(x)$  на промежутке  $[a, +\infty)$ . Приведем контрпример.



**12.19. Функция  $g(x)$ , не монотонная на  $[a, +\infty)$ , при которой интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  расходится.** Пусть

$$f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{x}, \quad g(x) = \sin x + \cos x$$

на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Заметим, что выполняются все требования признака Абеля, кроме монотонности функции  $g(x)$  на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Действительно, интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  сходится в силу

сходимости интегралов  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  и  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ , [2], т. II, с. 120; а

функция  $g(x) = \sin x + \cos x$  ограничена. При этом видим, что интеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} f(x) g(x) dx &= \int_1^{+\infty} \frac{(\sin x + \cos x)^2}{x} dx = \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{2 \sin x \cos x}{x} \right) dx = \\ &= \int_1^{+\infty} \left( \frac{1}{x} + \frac{\sin 2x}{x} \right) dx \text{ расходится, так как расходится интеграл } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \\ \text{и сходится интеграл } \int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx &= \int_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x} d(2x) = \int_2^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt. \end{aligned}$$

Снимем предположение об ограниченности функции  $g(x)$  на промежутке  $[a, +\infty)$ . Контрпример.

**12.20. Функция  $g(x)$ , не ограниченная на  $[a, +\infty)$ , при которой интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  расходится.** Положим  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,

$g(x) = x$  на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Видим, что выполняются все требования признака Абеля, кроме ограниченности функции  $g(x)$  на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . При этом несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \text{ расходится.}$$

**Признак Дирихле сходимости.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в промежутке  $[a, +\infty)$ , причем: функция  $f(x)$  интегрируема на любом конечном промежутке  $[a, A]$ ,  $A > a$ , и интеграл  $\Phi(A) = \int_a^A f(x) dx$  ограничен:

$\left| \int_a^A f(x) dx \right| \leq K, K = \text{const}, A \in [a, +\infty);$  функция  $g(x)$  монотонно стремится к 0 при  $x \rightarrow +\infty: \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . Тогда интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится.

Заметим, что все контрпримеры 12.14–12.17 имеют силу и в случае признака Дирихле. Рассмотрим эти контрпримеры в их новом качестве.

**12.21. Контрпримеры, в которых нарушаются отдельные предположения признака Дирихле, но интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится.** В контрпримере 12.14 нарушается условие ограниченности интеграла  $\Phi(A) = \int_1^A f(x) dx, A > 1$ , на полуинтервале  $[1, +\infty)$ , но выполняется условие монотонного стремления к нулю функции  $g(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$ .

В контрпримере 12.15 уже выполняется условие ограниченности упомянутого интеграла на полуинтервале  $[1, +\infty)$ , выполняется также условие  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ , но нарушается условие монотонности стремления функции  $g(x)$  к нулю.

В контрпримере 12.16 выполняется первое условие признака Дирихле – ограниченности интеграла на полуинтервале  $[1, +\infty)$ , но полностью нарушается второе – функция  $g(x)$  не монотонна и не имеет предела при  $x \rightarrow +\infty$ .

В контрпримере 12.17 существует интеграл  $\Phi(A) = \int_1^A f(x) dx$  для любого  $A > 1$ , но на полуинтервале  $[1, +\infty)$  он не ограничен, при этом второе условие признака Дирихле полностью нарушается.

Сделаем попытку усилить признак Дирихле сходимости интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  путем последовательного удаления отдельных его предположений. Сначала снимем требование ограниченности интеграла  $\int_a^A f(x) dx$  на промежутке  $[a, \infty)$ . Приведем контрпример.

**12.22. Интеграл  $\int_a^A f(x) dx$ , не ограниченный при  $A \in [a, +\infty)$ ,**

при котором интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  расходится. Предположим,

что  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\ln x}$  на полуинтервале  $[2, +\infty)$ . Тогда выполняются все условия признака Дирихле, кроме ограниченности интеграла  $\Phi(A) = \int_2^A f(x) dx$  на  $[2, +\infty)$ . Действительно, функция  $f(x)$

интегрируема на любом конечном отрезке  $[2, A]$ ,  $A > 2$ ; функция  $g(x)$  монотонно стремится к 0 при  $x \rightarrow +\infty$ . При этом интеграл

$$\int_2^{+\infty} f(x) g(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} \text{ расходится, см. контрпример 12.7.}$$

Снимем предположение о монотонности стремления функции  $g(x)$  к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ . Контрпример.

### 12.23. Функция $g(x)$ , не монотонно стремящаяся к нулю при

$x \rightarrow +\infty$ , при которой интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  расходится. Пусть

$$f(x) = \sin x + \cos x, \quad g(x) = \frac{\sin x + \cos x}{x} \text{ на полуинтервале } [1, +\infty).$$

Тогда все условия признака Дирихле выполняются, кроме монотонности стремления функции  $g(x)$  к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ . Действительно,  $f(x)$  интегрируема на любом конечном отрезке  $[1, A]$ ,  $A > 1$ ; интеграл  $\Phi(A) = \int_1^A f(x) dx$  ограничен на  $[1, +\infty)$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ . При

$$\text{всем этом интеграл } \int_1^{+\infty} f(x) g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{(\sin x + \cos x)^2}{x} dx \text{ расходится, что показано в контрпримере 12.19.}$$

И наконец, снимем предположение о стремлении функции  $g(x)$  к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ . Контрпример.

### 12.24 Функция $g(x)$ , не стремящаяся к нулю при $x \rightarrow +\infty$ ,

при которой интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  расходится. Положим

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = 1 + \frac{1}{x} \text{ на полуинтервале } [1, +\infty). \text{ Тогда выпол-}$$

няются все условия признака Дирихле, кроме стремления функции  $g(x)$  к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ . Действительно, функция  $f(x)$  интегрируема на любом конечном отрезке  $[1, A]$ ,  $A > 1$ ; интеграл

$\Phi(A) = \int_1^A f(x) dx$  ограничен на полуинтервале  $[1, +\infty)$ ; функция  $g(x)$  монотонна на  $[1, +\infty)$ . При всем этом несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) g(x) dx = \int_1^{+\infty} \sin x \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} \left(\sin x + \frac{\sin x}{x}\right) dx \quad \text{расходится,}$$

так как интегралы:  $\int_1^{+\infty} \sin x dx$  — расходится,  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  — сходится.

## 12.2. Несобственные интегралы от неограниченных функций

**Определение интегралов от неограниченных функций.** Пусть функция определена на отрезке  $[a, b]$ . Предположим, что она интегрируема на любом отрезке  $[a, b - \eta]$ , где  $0 < \eta < b - a$ , но оказывается неинтегрируемой на любом отрезке  $[b - \eta, b]$ . Точка  $b$  при этом называется особой.

Конечный или бесконечный предел, если он существует, при  $\eta \rightarrow 0$  интеграла  $\int_a^{b-\eta} f(x) dx$  называется несобственным интегралом функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначается:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_a^{b-\eta} f(x) dx. \quad (12.4)$$

Если существует конечный предел (12.4), то говорят, что интеграл сходится, а функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a, b]$ . Если предел бесконечен или не существует, то говорят, что интеграл расходится.

Если точка  $a$  особая, то тогда несобственный интеграл функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  аналогично определяется равенством

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta' \rightarrow 0} \int_{a+\eta'}^b f(x) dx. \quad (12.5)$$

Если обе точки  $a$  и  $b$  оказываются особыми, то принимают:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (12.6)$$

Предполагается, что  $a < c < b$  и оба несобственных интеграла в (12.6) справа существуют, исключая только случай, когда эти интегралы равны бесконеч-

ности разных знаков. Интеграл (12.6) не зависит от числа  $c$ . Интегралы (12.4), (12.5), (12.6) называются несобственными интегралами второго рода.

Известно, [8], т. II, с. 581–582, что вблизи так определенных особых точек  $a$  и  $b$  функция  $f(x)$  необходимо будет неограниченной.

Заметим, что сходящийся несобственный интеграл из примера 12.5 в некотором смысле является «гибридным», так как совмещает особенности интегралов первого и второго рода. Действительно, он берется на бесконечном промежутке от неограниченной функции.

Рассмотрим некоторые примеры неограниченных на конечном отрезке функций, несобственные интегралы от которых расходятся.

**12.25. Пример расходящегося несобственного интеграла второго рода.** Функция  $f(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases}$  на отрезке  $[0, 1]$  неограниченна, так как выполняется  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = +\infty$ . Используем для вычисления несобственного интеграла  $\int_0^1 f(x) dx$  формулу (12.5).

Получим  $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\eta \rightarrow 0} (\ln 1 - \ln \eta) = -\lim_{\eta \rightarrow 0} \ln \eta = +\infty$ . Видим, что интеграл расходится – равен  $+\infty$ .

**12.26. Расходящийся несобственный интеграл второго рода на  $[0, 1]$  от неотрицательной функции  $f(x)$  такой, что точка  $x = 0$  особая, но  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) \neq +\infty$ .** Построим на  $[0, 1]$  функцию  $y = f(x)$ , график которой – ломаная с последовательными вершинами в системе координат  $Oxy$ :

$$(1, 0), \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(\frac{1}{2^2}, 0\right), \left(\frac{1}{2^3}, 2^3\right), \left(\frac{1}{2^4}, 0\right), \left(\frac{1}{2^5}, 2^5\right), \left(\frac{1}{2^6}, 0\right), \dots,$$

$(0, 0)$  (рис. 12.2, а). Для наглядности график сжат на рисунке по оси  $Oy$ . График функции образует с осью  $Ox$  треугольники с основаниями на отрезках  $\left[\frac{1}{2^{2k+2}}, \frac{1}{2^{2k}}\right]$  оси  $Ox$  и высотами, равными  $2^{2k+1}$ ,

где  $k = 0, 1, 2, \dots$  – номер треугольника. Площадь  $S_k$  треугольника  $k$  равна  $S_k = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{2k}} - \frac{1}{2^{2k+2}} \right) 2^{2k+1} = \frac{2^2 - 1}{2^{2k+2}} 2^{2k} = \frac{3}{4}$  для любого  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Заметим, что по самому построению функции

$\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$  не существует, но интеграл  $\int_{\eta}^1 f(x) dx$  существует для

любого  $0 < \eta < 1$ . Однако, при  $\eta \rightarrow 0$   $\int_{\eta}^1 f(x) dx \rightarrow +\infty$ , так как для

$\eta = \frac{1}{2^{2k+2}}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , имеем  $\int_{\eta}^1 f(x) dx = (k+1) \frac{3}{4}$ . Таким образом,

интеграл расходится, так как  $\int_0^1 f(x) dx = +\infty$ .

Выше в примерах расходимость несобственных интегралов определялась тем, что предел (12.5) был равен бесконечности. Построим пример несобственный интеграл второго рода, для которого предел (12.5) не существует.

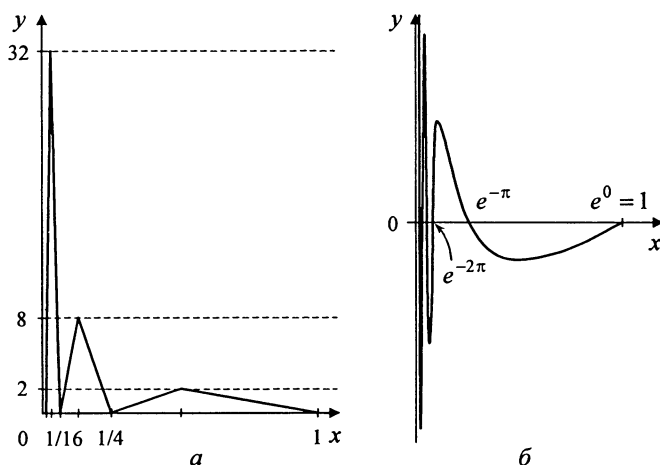


Рис. 12.2

**12.27. Расходящийся несобственный интеграл второго рода на  $[0, 1]$  от функции  $f(x)$  такой, что точка  $x = 0$  особая, и**

$\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{\eta}^1 f(x) dx$  не существует. Пусть  $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ , если

$0 < x \leq 1$ ,  $f(0) = 0$  (рис 12.2, б). На рисунке для наглядности график функции сжат по оси  $Oy$  и растянут в окрестности нуля по оси  $Ox$ . Эта функция во многом схожа с функцией из предыдущего примера, так как она неограниченна на  $[0, 1]$ , совершает бесконечное чис-

ло колебаний в любой окрестности нуля (принимает там бесконечное число раз нулевые значения) и, следовательно, для нее также  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)$  не существует. В то же время эта функция знакопеременная, и для нее не существует также и

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{0+\eta}^1 f(x) dx.$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin(\ln x)}{x} dx &= \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{0+\eta}^1 \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{\eta}^1 \sin(\ln x) d(\ln x) = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \left( -\cos(\ln x) \Big|_{\eta}^1 \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0+0} (-\cos 0 + \cos(\ln \eta)) = \lim_{\eta \rightarrow 0+0} \cos(\ln \eta) - 1. \end{aligned}$$

Предел  $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \cos(\ln \eta)$ , очевидно, не существует. Следовательно,

интеграл  $\int_0^1 f(x) dx$  расходится.

**Признак сходимости 1 для интегралов от неотрицательных функций.**

Пусть существует число  $\eta$ ,  $0 < \eta < b - a$ , такое, что для всех  $x \in [b - \eta, b]$ :

$f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\lambda}$ ,  $\lambda > 0$ . Тогда: 1) если  $\lambda < 1$  и  $0 \leq \varphi(x) \leq c < \infty$ , то интеграл

$\int_a^b f(x) dx$  сходится, 2) если  $\lambda \geq 1$  и  $\varphi(x) \geq c > 0$ , то этот интеграл расходится.

Приведем некоторые примеры интегралов, для которых данный признак сходимости неприменим.

**12.28. Сходящийся несобственный интеграл второго рода, к которому неприменим признак сходимости 1.** Предположим, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{если } x = \frac{n}{n+1}, \text{ где } n - \text{натуральное число;} \\ 1, & \text{при всех других значениях } x. \end{cases}$$

функцию  $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x}}$ , если  $0 \leq x < 1$ ,  $f(1) = 0$ . Так как значение

интеграла не меняется от переопределения подынтегральной функции при натуральных значениях  $x$ , то  $\int_0^{1-\eta} f(x) dx = \int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$  при

всех значениях  $0 < \eta < 1$ . Следовательно, несобственный интеграл

$\int_0^1 f(x)dx$  сходится. Но непосредственно с помощью данного признака этот факт установить нельзя, так как функция  $\varphi(x)$  неограниченна в любой левой окрестности точки  $x = 1$ .

**12.29. Расходящийся несобственный интеграл второго рода, к которому неприменим признак сходимости 1.** Предположим, что  $f(x) = -\frac{1}{(1-x)\ln(1-x)}$ , если  $\frac{1}{2} \leq x < 1$ ,  $f(1) = 0$ . Заметим, что на отрезке  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$   $f(x) \geq 0$ . Покажем, что интеграл  $\int_{1/2}^1 f(x)dx$  расходится. Вычислим для  $0 < \eta < 1/2$  интеграл

$$\int_{1/2}^{1-\eta} -\frac{dx}{(1-x)\ln(1-x)} = \int_{1/2}^{1-\eta} \frac{d(\ln(1-x))}{\ln(1-x)} = \ln|\ln(1-x)| \Big|_{1/2}^{1-\eta} =$$

$$= \ln|\ln \eta| - \ln\left|\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right|. \text{ Видим, что при } \eta \rightarrow 0 \text{ он стремится к } +\infty, \text{ т.е.}$$

интеграл  $\int_{1/2}^1 f(x)dx$  расходится. Однако использовать данный признак для установления расходимости интеграла нельзя. Действительно, так как в данном случае  $\varphi(x) = -\frac{1}{\ln(1-x)}$ , и для любого  $c > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что для всех  $x$ :  $1 - \delta < x < 1$  выполняется  $0 < \varphi(x) < c$ .

**Признак сходимости 2 для интегралов от неотрицательных функций.** Пусть при  $x \rightarrow b$  функция  $f(x)$  является бесконечно большой порядка  $\lambda > 0$  по сравнению с  $\frac{1}{b-x}$ . Тогда: если  $\lambda < 1$ , то интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится; если  $\lambda \geq 1$ , то расходится.

Заметим, что более сильное (по сравнению со случаем  $\lambda < 1$ ) утверждение: если при  $x \rightarrow b$  функция  $f(x)$  является бесконечно большой низшего порядка, чем функция  $\frac{1}{b-x}$ , то интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  сходится, несправедливо. Приведем контрпример.

**12.30. Функция  $f(x)$  является при  $x \rightarrow b-0$  бесконечно**



большой низшего порядка, чем  $1/(b-x)$ , но  $\int_a^b f(x) dx$  расходится. Рассмотрим функцию  $f(x) = -\frac{1}{(1-x)\ln(1-x)}$ , если  $\frac{1}{2} \leq x < 1$ ,  $f(1) = 0$ , из предыдущего примера. Она является бесконечно большой функцией низшего порядка по сравнению с функцией  $\frac{1}{1-x}$  при  $x \rightarrow 1-0$ . Однако интеграл  $\int_{1/2}^1 f(x) dx$  расходится, что показано в предыдущем примере.

**Критерий Коши сходимости интеграла в общем случае.** Для сходимости несобственного интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ , где  $b$  – особая точка, необходимо и достаточно, чтобы для любого числа  $\varepsilon > 0$  существовало число  $\delta > 0$  такое, что для всех  $0 < \eta < \delta$  и  $0 < \eta' < \delta$  выполнялось неравенство  $\left| \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x) dx \right| < \varepsilon$ .

В утверждении величины  $\eta$  и  $\eta'$  не связаны никакой зависимостью. Изменим утверждение, предположив, что  $\eta' = k\eta$ , где  $k = \text{const}$ ,  $0 < k < 1$ . Полученное утверждение опровергнем контрпримером.

**12.31. Контрпример, опровергающий одну из альтернатив критерия Коши сходимости интеграла второго рода. Примем**

$$f(x) = \frac{\sin(\ln(1-x))}{1-x}, \text{ если } 0 \leq x < 1, f(1) = 0.$$

Пусть  $k = e^{-2\pi}$  и вычислим интеграл  $J(\eta) = \int_{1-\eta}^{1-e^{-2\pi}\eta} \frac{\sin(\ln(1-x))}{1-x} dx$  для  $\eta: 0 < \eta < 1$ . Из контрпримера 12.27 имеем

$$J(\eta) = \cos(\ln(1-x)) \Big|_{1-\eta}^{1-e^{-2\pi}\eta} = \cos(\ln(e^{-2\pi}\eta)) - \cos(\ln \eta) =$$

$= \cos(-2\pi + \ln \eta) - \cos(\ln \eta) = 0$ . Отсюда  $|J(\eta)| < \varepsilon$  при любом  $0 < \eta < 1$ ,

но интеграл  $\int_0^1 f(x) dx$  расходится, см. контрпример 12.27.

Достаточное условие сходимости интеграла в общем случае. Если сходится интеграл  $\int_a^b |f(x)| dx$ , то сходится интеграл  $\int_a^b f(x) dx$ .

Обратное утверждение неверно. Контрпример.

**12.32. Интегралы:**  $\int_a^b f(x) dx$  – сходящийся, но  $\int_a^b |f(x)| dx$  – расходящийся. Зададим на отрезке  $[-1, 0]$  ступенчатую функцию  $f(x)$ : на полуинтервале  $\left[-1, -\frac{1}{2}\right)$   $f(x) = 2$ , на  $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2^2}\right)$   $f(x) = -\frac{2^2}{2}$ , на  $\left[-\frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}\right)$   $f(x) = \frac{2^3}{3}$ , ..., на  $\left[-\frac{1}{2^{n-1}}, -\frac{1}{2^n}\right)$

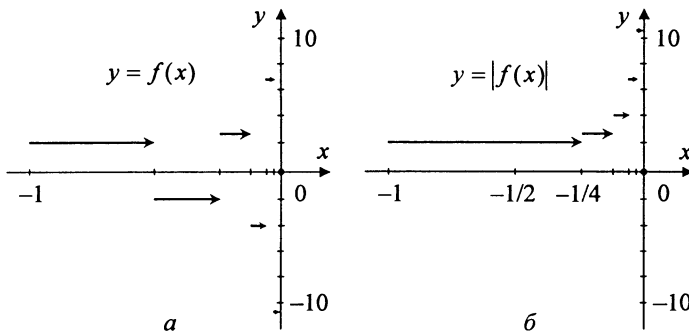


Рис. 12.3

$f(x) = (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n}$ , ...,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $f(0) = 0$  (рис. 12.3, а). На рисунке для наглядности графики функций  $y = f(x)$  и  $y = |f(x)|$  сжаты по оси  $Oy$ . Так как на любом отрезке  $[-1, 0 - \eta]$ ,  $0 < \eta < 1$ , функция ограничена и имеет конечное число точек разрыва, то существует интеграл  $\int_{-1}^{0-\eta} f(x) dx$ . Используя применительно к данной ступенчатой функции теорему о связи сходимости несобственного интеграла со сходимостью ряда, [8], т. II, с. 586, получим числовой ряд

$$\int_{-1}^{-1/2} f(x) dx + \int_{-1/2}^{-1/4} f(x) dx + \int_{-1/4}^{-1/8} f(x) dx + \dots + \int_{-1/2^{n-1}}^{-1/2^n} f(x) dx + \dots \quad (12.7)$$

По построению (ступенчатой) функции  $f(x)$  интегралы, входящие в ряд (12.7), равны взятым с соответствующими знаками площадям  $S_n$  прямоугольников, с основаниями на отрезках  $\left[-\frac{1}{2^{n-1}}, -\frac{1}{2^n}\right]$  оси  $Ox$  и высотами, равными  $\frac{2^n}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Нетрудно увидеть, что длины отрезков будут равны  $\frac{1}{2^n}$ , а  $S_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^n}{n} = \frac{1}{n}$ . Следовательно, ряд (12.7) суть  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$ , т.е. известный сходящийся ряд. По упомянутой теореме несобственный интеграл  $\int_{-1}^0 f(x) dx$  сходится вместе с рядом (12.7).

Рассмотрим далее ступенчатую функцию  $|f(x)|$  (рис. 12.3, б). Ей уже отвечает гармонический ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  (расходящийся), и, следовательно, интеграл  $\int_{-1}^0 |f(x)| dx$  расходится.

**Достаточное условие абсолютной интегрируемости функции.** Если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема на отрезке  $[a, b]$ , а функция  $g(x)$  интегрируема на  $[a, b]$  в собственном смысле, то и функция  $f(x)g(x)$  будет абсолютно интегрируема на  $[a, b]$ .

Сформулированные достаточные условия, наложенные на функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , не являются необходимыми для абсолютной интегрируемости функции  $f(x)g(x)$ . Сначала снимем условие абсолютной интегрируемости  $f(x)$ . Приведем контрпример.

**12.33. Функция  $f(x)$ , интегрируемая на  $[a, b]$  не абсолютно,** при которой интеграл  $\int_a^b f(x) g(x) dx$  сходится абсолютно. Используем функцию  $f(x)$  из предыдущего контрпримера. Она интегрируема на отрезке  $[-1, 0]$ , но неабсолютно. Пусть функция  $g(x)$  определяется на  $[-1, 0]$  в виде ступенчатой функции на той же системе полуинтервалов, что и функция  $f(x)$ : на полуинтервале

$\left[-\frac{1}{2^{n-1}}, -\frac{1}{2^n}\right) g(x) = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, g(0) = 0$ . Заметим, что функция  $g(x)$  ограничена на отрезке  $[-1, 0]$  и имеет на нем счетное множество точек разрыва:  $x = -\frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots$ , и  $x = 0$ . Следовательно,

существует собственный интеграл  $\int_{-1}^0 g(x) dx$ . Тогда на том же полу-

интервале функция  $f(x)g(x) = (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2}$ , а упомянутые в преды-

дущем контрпримере площади  $S_n$  прямоугольников (уже для функ-

ции  $f(x)g(x)$ ) будут равны  $S_n = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ . В этом случае, по

анalogии с предыдущим контрпримером, несобственным интег-

рам будут соответствовать:  $\int_{-1}^0 f(x)g(x) dx$  — сходящийся числовой

ряд  $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \dots$ ,  $\int_{-1}^0 |f(x)g(x)| dx$  — сходящийся чи-

словой ряд  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ . Следовательно, наша функция  $f(x)g(x)$  будет абсолютно интегрируема на отрезке  $[-1, 0]$ .

В то же самое время, отбрасывая требование абсолютной интегрируемо-

сти функции  $f(x)$ , мы получаем неверное утверждение. Опровергнем его

**12.34. Функция  $f(x)$ , интегрируемая на  $[a, b]$  не абсолютно,**

при которой интеграл  $\int_a^b f(x) g(x) dx$  расходится. Возьмем функ-

цию  $f(x)$  из контрпримера 12.32. Как было показано, она интегри-

руема на  $[-1, 0]$ , но неабсолютно. Предположим, что функция

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(x) \geq 0, \\ -1, & \text{если } f(x) < 0. \end{cases}$$

Она ограничена на отрезке  $[-1, 0]$  и имеет на нем счетное множест-

во точек разрыва:  $x = -\frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots$ , и  $x = 0$ . Следовательно, су-

существует собственный интеграл  $\int_{-1}^0 g(x) dx$ . Из самого задания функции  $g(x)$  имеем  $f(x)g(x) \equiv |f(x)|$  на отрезке  $[-1, 0]$ . Но в контрпримере 12.32 было показано, что функция  $|f(x)|$  неинтегрируема на  $[-1, 0]$ , значит, и  $f(x)g(x)$  — функция, не интегрируемая на том же отрезке.

Условие интегрируемости функции  $g(x)$  в собственном смысле также не является необходимым для абсолютной интегрируемости функции  $f(x)g(x)$ . Контрпример.

**12.35. Функция  $g(x)$ , не интегрируемая на  $[a, b]$  в собственном смысле, при которой интеграл  $\int_a^b f(x) g(x) dx$  сходится аб-**

**солютно.** Положим  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$ , если  $0 \leq x < 1$ ,  $f(1) = 0$ , а  $g(x) \equiv f(x)$ . Как видим, обе функции не интегрируемы на отрезке  $[0, 1]$  в собственном смысле. Но, согласно признаку сходимости 1, несобственные интегралы  $\int_0^1 f(x) dx$  и  $\int_0^1 g(x) dx$  сходятся (абсолютно). По той же причине сходится абсолютно несобственный интеграл  $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ .

Однако, отбрасывая требование интегрируемости функции  $g(x)$  в собственном смысле, мы получаем ложное утверждение. Опровергнем его контрпримером.

**12.36. Функция  $g(x)$ , не интегрируемая на  $[a, b]$  в собственном смысле, при которой интеграл  $\int_a^b f(x) g(x) dx$  расходится.**

По аналогии с предыдущим контрпримером примем  $g(x) \equiv f(x)$ , но уже  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ , если  $0 \leq x < 1$ ,  $f(1) = 0$ . Тогда обе функции также не интегрируемы на отрезке  $[0, 1]$  в собственном смысле. Несобственные интегралы  $\int_0^1 f(x) dx$  и  $\int_0^1 g(x) dx$ , согласно признаку схо-

димости 1, сходятся (абсолютно). Однако в данном случае несобственный интеграл  $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$  расходится.

### 12.3. Преобразование несобственных интегралов

**Первая теорема о среднем значении.** Пусть: 1) функции  $f(x)$  и  $g(x)$  интегрируемы на промежутке  $[a, b]$ ; 2)  $f(x)$  ограничена,  $m \leq f(x) \leq M$ ; 3)  $g(x)$  не меняет знака. Тогда функция  $f(x)g(x)$  интегрируема и выполняется:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx, \quad m \leq \mu \leq M. \quad (12.8)$$

Заметим, что в теореме рассматриваются функции, интегрируемые (в собственном или несобственном смысле) на конечном или бесконечном промежутке  $[a, b]$ , т.е.  $a$  и  $b$  могут быть как конечными, так и означать  $-\infty$  и  $+\infty$  соответственно.

Покажем, что некоторые отдельные предположения теоремы не являются необходимыми для выполнения равенства (12.8). Сначала отбросим в теореме требование интегрируемости функции  $f(x)$ . Приведем простой контрпример.

**12.37. Неинтегрируемая функция  $f(x)$ , при которой выполняется заключение первой теоремы о среднем значении.** Пусть  $f(x) \equiv 1$ ,  $g(x) = 1/x^2$  на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Все предположения теоремы выполняются, кроме интегрируемости функции  $f(x)$  на  $[1, +\infty)$ . Заметим, что в данном случае  $m = M = 1$ . Очевидно, равенство (12.8) выполняется при значении  $\mu = 1$ , что соответствует условию  $m \leq \mu \leq M$ .

Отбросим далее требование ограниченности снизу функции  $f(x)$ . Простой контрпример.

**12.38. Неограниченная функция  $f(x)$ , при которой выполняется заключение первой теоремы о среднем значении.** Пусть  $f(x) = \ln x$ , если  $0 < x \leq 1$ ,  $f(0) = 0$ ;  $g(x) \equiv 1$  на отрезке  $[0, 1]$ . Все условия теоремы соблюдаются, кроме ограниченности  $f(x)$  снизу. В данном случае  $m = -\infty$ ,  $M = 0$ . Видим, что равенство (12.8) выполняется при значении  $\mu = -1$ , так как  $\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 \ln x dx = -1$ ,

$\int_0^1 g(x) dx = 1$ . Заметим, что выполняется  $m \leq \mu \leq M$ .

Затем отбросим требование знакопостоянства функции  $g(x)$ . Приведем контрпример.

**12.39. Знакопеременная функция  $g(x)$ , при которой выполняется заключение первой теоремы о среднем значении.** Пусть на полуинтервале  $[1, +\infty)$   $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ;  $g(x) = f(x)$ , если  $x \neq n$ ,  $g(n) = -1$ , где  $n = 1, 2, \dots$ . Все требования теоремы, кроме знакопостоянства функции  $g(x)$ , выполняются,  $m = 0$ ,  $M = 1$ . Оба интеграла в равенстве (12.8) существуют и конечны. Причем, имеем  $\int_1^{+\infty} f(x)g(x) dx = \int_1^{+\infty} (f(x))^2 dx$  и  $\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx$ , так как значения подынтегральных функций отличаются друг от друга только при натуральных значениях  $x$ . В то же время выполняется  $\int_1^{+\infty} f(x)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} \leq \int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ , так как  $0 < \frac{1}{x^4} \leq \frac{1}{x^2}$  при  $x \in [1, +\infty)$ . Отсюда (и также из положительности обоих интегралов) имеем  $0 < \mu \leq 1$ , т.е. выполняется (12.8) и  $m \leq \mu \leq M$ .

В то же время, отбрасывая отдельные предположения теоремы, мы получаем неверные утверждения. Сначала отбросим в теореме требование интегрируемости функций  $f(x)$  и  $g(x)$ . Приведем простой контрпример, опровергающий полученное ложное утверждение.

**12.40. Неинтегрируемые функции  $f(x)$  и  $g(x)$ , при которых заключение первой теоремы о среднем значении не выполняется.** Пусть заданы функции  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$  на полуинтервале  $[1, +\infty)$ . Они ограничены и знакопостоянны. Интеграл слева в (12.8)  $\int_1^{+\infty} f(x)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  сходится и равен некоторому положительному числу, а интеграл справа  $\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$  расходится (равен  $+\infty$ ). При этом равенство (12.8) не выполняется ни при каком  $\mu$ .

Далее отбросим в теореме требование знакопостоянства функции  $g(x)$ . Контрпример.

**12.41. Знакопеременная функция  $g(x)$ , при которой заключение первой теоремы о среднем значении не выполняется.** По-

ложим на отрезке  $[0, 1]$   $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2}$ , если  $0 \leq x < 1$ ,  $g(1) = 1$ ;

$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } g(x) \leq 0, \\ 1, & \text{если } g(x) > 0. \end{cases}$  Обе функции интегрируемы, а  $f(x)$  ограничена на  $[0, 1]$ . Вычислим интеграл

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2} \int_0^1 dx =$$

$$= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \arcsin(1-\eta) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0. \text{ Заметим, что}$$

функция  $g(x)$  строго монотонно возрастающая и непрерывная на

$[0, 1)$ ,  $g(0) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = +\infty$ , поэтому она меняет свой

знак на этом отрезке один раз, в некоторой точке  $x_0$ :  $0 < x_0 < 1$ . Со-

ответственно по самому заданию функции  $f(x)$  интеграл

$$\int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_{x_0}^1 g(x) dx > 0, \text{ так как } g(x) > 0 \text{ на полуинтервале}$$

$(x_0, 1]$ . Видим, что интеграл слева в (12.8) сходится и равен некоторому положительному числу, а интеграл справа сходится и равен нулю. При этом равенство (12.8) невыполнимо ни при каком  $\mu$ .

**Вторая теорема о среднем значении.** Пусть: 1) функция  $f(x)$  монотонна и ограничена на промежутке  $[a, b]$ ; 2) функция  $g(x)$  интегрируема на этом промежутке. Тогда функция  $f(x)g(x)$  также интегрируема, и выполняется:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^{\xi} g(x) dx + f(b) \int_{\xi}^b g(x) dx, \quad a \leq \xi \leq b. \quad (12.9)$$

И в данном случае действует замечание к первой теореме о среднем значении. При этом под  $f(-\infty)$  и  $f(+\infty)$  понимаются соответствующие пределы.

Снятие предположения об интегрируемости  $g(x)$  на  $[a, b]$  означает, что хотя бы один из интегралов справа не существует и (12.9) не имеет смысла.

Предположим, что в теореме снято предположение о монотонности функции  $f(x)$ . Полученное таким образом утверждение опровергнем контр-примерами.

**12.42, 12.43. Не монотонные функции  $f(x)$ , при которых заключение второй теоремы о среднем значении не выполняется.**

Пусть на отрезке  $[0, 1]$   $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } 1, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 1, \end{cases} \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$



Функция  $f(x)$  ограничена, а функция  $g(x)$  интегрируема, см. предыдущий пример, на  $[0, 1]$ . Функция  $f(x)g(x)$  также интегрируема, так как отличается от  $g(x)$  значениями в двух точках:  $x=0$  и  $x=1$ . Но равенство (12.9) не выполняется ни при каком значении  $\xi$ , так как его правая часть равна нулю ( $f(0)=f(1)=0$ ), а левая часть равна  $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ . Подчеркнем, что монотонность

функции  $f(x)$  нарушена только в одной точке  $x=1$ .

Пусть на полуинтервале  $[0, +\infty)$   $f(x) = \cos x$ ,  $g(x) = \sin x/x$ . Функция  $f(x)$  ограничена, а функция  $g(x)$  интегрируема на  $[0, +\infty)$ . Функция  $f(x)g(x) = \frac{\cos x \sin x}{x} = \frac{\sin 2x}{2x}$  интегрируема на  $[0, +\infty)$ , как и функция  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Но правая часть (12.9) не определена, так как не существует предел  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ .

**Интегрирование по частям в случае несобственных интегралов.** Если на полуинтервале  $[a, b)$ , точка  $b$  может быть особой или означать  $+\infty$ , функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$ : 1) определены и непрерывны; 2) имеют непрерывные производные, то выполняется:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du, \quad (12.10)$$

где  $uv \Big|_a^b = \lim_{x \rightarrow b} (u(x)v(x)) - u(a)v(a)$ . При этом предполагается, что два из трех входящих в равенство (12.10) выражений (два интеграла и двойная подстановка) имеют конечные значения, тогда и третье будет конечным.

Приведем пример, в котором способ записи подынтегрального выражения повлиял на применимость формулы (12.10) к вычислению сходящегося несобственного интеграла.

**12.44. Две записи подынтегрального выражения, при которых применима и не применима формула интегрирования по частям для сходящегося несобственного интеграла.** Применим (12.10) к вычислению следующего сходящегося несобственного интеграла:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \sin x d(\ln x). \text{ Получим}$$

$$\int_1^{+\infty} \sin x d(\ln x) = \sin x \ln x \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \ln x d(\sin x) =$$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x \ln x) - \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} \ln x \cos x \, dx$ . Пределы справа не существуют, формула (12.10) неприменима.

Запишем подынтегральную функцию иначе:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(-\cos x). \text{ Тогда получим иной результат}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} d(-\cos x) &= -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} (-\cos x) d\left(\frac{1}{x}\right) = \\ &= -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} + \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx, \text{ т.е. } \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

На этот раз мы выразили интеграл, сходящийся неабсолютно, через абсолютно сходящийся интеграл. Формула (12.10) применима.

С помощью формулы (12.10) можно свести несобственный интеграл к интегралу собственному. Пример.

**12.45. Применение формулы интегрирования по частям к сходящемуся несобственному интегралу, сводящее его к интегралу собственному.** Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^1 \ln x \cos x \, dx = \int_0^1 \ln x \, d(\sin x). \text{ Применим к нему формулу (12.10):}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x \, d(\sin x) &= \ln x \sin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \sin x \, d(\ln x) = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln x \sin x) - \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx, \text{ так как } \lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln x \sin x) = 0, \end{aligned}$$

что получаем по правилу Лопиталя, т.е.  $\int_0^1 \ln x \cos x \, dx = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ .

Видим, что несобственный интеграл слева сводится к интегралу справа, который является собственным, если учесть первый замечательный предел и доопределить подынтегральную функцию единственным значением в нуле.

**Замена переменных в несобственных интегралах.** Предположим, что функция  $f(x)$  определена и непрерывна на полуинтервале  $[a, b)$ , точка  $b$  может быть особой или означать  $+\infty$ . Рассмотрим функцию  $x = \varphi(t)$  такую, что: 1) она непрерывна вместе со своей производной  $\varphi'(t)$  на полуинтервале

$[\alpha, \beta)$ , где  $\beta$  может быть и  $+\infty$ ; 2)  $\varphi(\alpha) = a$  и  $\lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = b$ ; 3)  $\varphi(t)$  монотонно возрастает на  $[\alpha, \beta)$ . При таких предположениях выполняется равенство:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (12.11)$$

Если один из этих интегралов сходится, то сходится и другой. Интеграл справа может быть либо собственным, либо несобственным – с особой точкой  $\beta$ .

Предположения, сделанные в утверждении, являются достаточными, но не являются необходимыми, для использования формулы (12.11). Нарушим сначала условие непрерывности функции  $f(x)$ . Приведем контрпример.

**12.46. Разрывная функция  $f(x)$ , при которой справедлива формула**  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ . Предположим, что

$$f(x) = \begin{cases} 1/x^2, & \text{если } x \text{ не натуральное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ натуральное число,} \end{cases} \text{ и примем } x = \varphi(t) = 2t,$$

$a = 1$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $b = \beta = +\infty$ . При этих условиях существует интеграл

(сходящийся) слева в (12.11) и выполняется  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_{0,5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ , так

как изменение значений подынтегральной функции при натуральных значениях  $x$  не влияет на существование и величину интеграла. Следовательно, можно применить формулу (12.11), и мы получим

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_{0,5}^{+\infty} \frac{2dt}{(2t)^2} = \frac{1}{2} \int_{0,5}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{t} \right) \Big|_{0,5}^{+\infty} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

что известно и без применения подстановки.

Нарушим условие монотонности функции  $x = \varphi(t)$ . Контрпример.

**12.47. Не монотонная функция  $x = \varphi(t)$ , при которой справедлива формула**  $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$ . Рассмотрим сходя-

щийся интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ . Выполним подстановку  $x = \sin t$ ,

$\sin 0 = 0$ ,  $\sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 1$ . Заметим, что на отрезке  $\left[0, \frac{5}{2}\pi\right]$  функция

$x = \sin t$  не монотонна. Запишем, используя формулу (12.11),

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{5\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} dt = \int_0^{5\pi/2} \frac{\cos t}{|\cos t|} dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} dt - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} dt + \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} dt = \frac{\pi}{2} - \pi + \pi = \frac{\pi}{2}. \text{ Вычислим данный интеграл без}$$

подстановки  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^{1-\eta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \arcsin(1-\eta) = \frac{\pi}{2}$ . Видим, что применение формулы (12.11) дало верный результат.

Нарушим условие непрерывности функции  $x = \varphi(t)$ . При этом в точках разрыва также не будет существовать  $\varphi'(t)$ . Контрпример.

**12.48. Разрывная функция  $x = \varphi(t)$ , при которой справедлива формула**  $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ . Рассмотрим сходящийся

интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2^x}$ . Пусть  $x = \varphi(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \text{ не натуральное число,} \\ 0, & \text{если } t \text{ натуральное число,} \end{cases}$

$1 \leq t < +\infty$ . Данная подстановка переопределяет подынтегральную функцию при натуральных значениях аргумента. Формула (12.11) непосредственно не может быть применена, так как в натуральных точках у функции  $x = \varphi(t)$  не существует производная. Но интеграл можно разбить на счетное множество интегралов, взятых (каждый) на интервалах непрерывности и дифференцируемости функции  $x = \varphi(t)$ , расширенных до отрезков. При этом на концах отрезков функция  $x = \varphi(t)$  доопределяется (по непрерывности) с сохранением на каждом отрезке непрерывности и дифференцируемости (на концах — односторонней). После такой разбивки интеграла уже можно к каждому из полученных интегралов применить формулу (12.11) и, учитывая, что на каждом из отрезков  $\varphi'(t) \equiv 1$ , записать:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dx}{2^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{dt}{2^t} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2^t} = -\frac{2^{-t}}{\ln 2} \Big|_1^{+\infty} = \frac{1}{2 \ln 2}.$$

Попробуем усилить данное утверждение, снимая его отдельные предположения. Полученные (уже неверные) утверждения будем опровергать контрпримерами. Начнем с монотонности функции  $x = \varphi(t)$ .

**12.49. Не монотонная функция  $x = \varphi(t)$ , при которой форму-**

ла  $\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$  несправедлива. Рассмотрим сходя-

щийся интеграл  $\int_0^1 \ln x dx$ . Выполним подстановку  $x = \varphi(t) = \sin t$ ,  
 $-\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Заметим, что  $\varphi(-\pi) = 0$ ,  $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ . Однако функция

$x = \varphi(t) = \sin t$  не монотонна на отрезке своего задания. Отвлекаясь от этого, формально используем (12.11). Получим

$$\int_0^1 \ln x dx = \int_{-\pi}^{\pi/2} \ln(\sin t) \cos t dt = \int_{-\pi}^0 \ln(\sin t) \cos t dt + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) \cos t dt.$$

Видим, что использование формулы (12.11) в данном случае некорректно, так как во втором и третьем интегралах происходит выход за область определения функции  $\ln x$ . Если использовать данную

подстановку, но ограничиться отрезком  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  задания функции

$x = \varphi(t) = \sin t$ , на котором она монотонна, то получим верное ра-

венство 
$$\int_0^1 \ln x dx = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) \cos t dt.$$

Снимем предположение о непрерывности функции  $x = \varphi(t)$ .

**12.50. Разрывная функция  $x = \varphi(t)$ , при которой формула**

**$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$  несправедлива.** Применим формулу

(12.11) к сходящемуся интегралу  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ , выполнив подстановку

$x = \varphi(t) = [t]$ ,  $0 \leq t < +\infty$ , где  $[t]$  — целая часть числа  $t$ . Функция  $\varphi(t)$  монотонная, но имеет разрывы в натуральных точках. Казалось бы, можно использовать прием из контрпримера 12.48. А именно, разбить исходный интеграл на счетное множество интегралов — по одному на каждом отрезке непрерывности функции  $\varphi(t)$ , доопределив (по непрерывности) в концах отрезков функцию  $\varphi(t)$  и ее производную  $\varphi'(t)$ . Однако в данном случае этот прием не пройдет, так как, применяя формулу (12.11) к каждому из полученных интегралов, мы имеем  $\varphi'(t) \equiv 0$  на каждом из отрезков. От этого все интегралы будут равны нулю, и их сумма окажется нулевой. В то же время

$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx > 0$ . Формула (12.11) неприменима. Напомним, что в контрпримере 12.48 на каждом из отрезков выполнялось  $\varphi'(t) \equiv 1$ .

### Упражнения

12.1. Пусть функция  $f(x)$  интегрируема на любом отрезке  $[a, A]$ ,  $A > a$ . Показать, что если  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  расходится, то расходится и  $\int_A^{+\infty} f(x) dx$ , и наоборот.

12.2. Опровергнуть контрпримером утверждение: если  $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{A+d} f(x) dx = 0$ , где  $d > 0$  любое, сколь угодно большое, постоянное число, то интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится.

12.3. Утверждение: если  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  расходится, то расходится и  $\int_a^{+\infty} c f(x) dx$ ,  $c = \text{const}$ , опровергнуть контрпримером.

12.4. Опровергнуть контрпримером утверждение, обратное к следующему: из сходимости  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  и  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  следует сходимость  $\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x)) dx$ .

12.5. Построить контрпример, в котором нарушаются все предположения признака Дирихле, но интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x) dx$  сходится.

12.6. Дать пример функций:  $f(x)$  – неинтегрируема на  $[a, b]$  в несобственном смысле,  $g(x)$  – интегрируема на  $[a, b]$  в собственном смысле,  $f(x)g(x)$  – абсолютно интегрируема на  $[a, b]$ .

12.7. Задать такую немонотонную функцию  $f(x)$ , при сохранении всех других предположений второй теоремы о среднем значении, чтобы правая часть равенства (12.9) существовала, а левая не существовала.

## РАЗДЕЛ 13

### ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

#### 13.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

**Определение равномерной сходимости к предельной функции.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена на множестве  $M = X \times Y$ , где  $x \in X$ ,  $y \in Y$ . И пусть множество  $Y$  имеет конечную предельную точку  $y_0$ . Если при  $y \rightarrow y_0$  существует конечная предельная функция  $\varphi(x)$ :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) = \varphi(x), \quad x \in X, \quad (13.1)$$

и для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое не зависящее от  $x$  число  $\delta > 0$ , что при любом  $y$ :  $|y - y_0| < \delta$  выполняется  $|f(x, y) - \varphi(x)| < \varepsilon$  для всех  $x \in X$ , то говорят, что функция  $f(x, y)$  сходится к предельной функции  $\varphi(x)$  равномерно относительно  $x$  на множестве  $X$ .

Простейшим примером функции, которая равномерно сходится к предельной функции, является определенная на прямоугольнике константа. Легко привести более содержательные примеры таких функций. Однако любопытно построить функции, которые не подчиняются условиям данного определения. Приведем примеры.

**13.1. Функция  $f(x, y)$ , сходящаяся при  $y \rightarrow y_0$  к своей предельной функции  $\varphi(x)$  неравномерно на множестве  $X$ .** Функция  $f(x, y) = y \operatorname{tg} x$ , определенная на множестве  $M = X \times Y$ , где  $X = [0, \pi/2)$ ,  $Y = [-1, 1]$ . Она непрерывна на всем множестве  $M$  по совокупности аргументов. Рассмотрим значение  $y = y_0 = 0$ . Для функции  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow 0$  существует конечная предельная функция (13.1)  $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} (y \operatorname{tg} x) = 0$  при всех  $x \in [0, \pi/2)$ .

Покажем, что функция  $f(x, y) = y \operatorname{tg} x$  при  $y \rightarrow 0$  сходится к предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$  неравномерно на  $X = [0, \pi/2)$ . Действительно, для  $\varepsilon = 1$  и любого числа  $\delta > 0$  найдется такое значение  $x = x_0$ , что для любого  $y$ :  $0 < |y - y_0| = |y| < \delta$  выполнится

$|f(x_0, y) - \varphi(x_0)| = |y \operatorname{tg} x_0| > \varepsilon = 1$ . Существование такого числа  $x_0$ ,  $x_0 \in [0, \pi/2)$ , следует из неограниченного возрастания функции  $\operatorname{tg} x$  при  $x \rightarrow \pi/2 - 0$ .

Отметим, что построенная функция является неограниченной. Эта неограниченность, в конечном счете, привела к ее неравномерной сходимости к предельной функции. Однако неравномерная сходимость к предельной функции возможна и для функции ограниченной. Пример.

**13.2. Ограниченная функция  $f(x, y)$ , сходящаяся к своей предельной функции  $\varphi(x)$  при  $y \rightarrow y_0$  неравномерно на множестве  $X$ .**

Функция  $f(x, y) = \frac{x/y}{1 + (x/y)^2}$ , если  $-1 \leq x, y \leq 1$  ( $y \neq 0$ ),

$f(x, y) = 0$ , если  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $y = 0$ . Пусть  $y_0 = 0$ . Заметим, что при любом  $-1 \leq x \leq 1$  имеем  $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ , т.е. предельная

функция при  $y \rightarrow 0$  тождественный нуль:  $\varphi(x) \equiv 0$ , что отвечает значениям функции  $f(x, 0) = 0$  при  $y = 0$ . Если к этому добавить, что функция и в других точках области определения непрерывна, то она непрерывна всюду на квадрате  $-1 \leq x, y \leq 1$ . Так как функция непрерывна на замкнутом квадрате, то по теореме Вейерштрасса является ограниченной на этом квадрате.

Однако сходимость при  $y \rightarrow 0$  функции  $f(x, y)$  к предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$  не является равномерной. Действительно, для  $\varepsilon = 1/3$  и любого числа  $\delta > 0$ , для любого  $y: 0 < |y - y_0| = |y| < \delta$  найдется такое значение  $x = x_0$ , а именно  $x_0 = y$ , что выполнится  $|f(x_0, y) - \varphi(x_0)| = |f(y, y)| = 1/2 > \varepsilon = 1/3$ .

Из приведенных примеров следует, что непрерывность функции (даже дополненная ограниченностью) не является достаточной для ее равномерной сходимости к предельной функции. Покажем, что для этого непрерывность функции не является и необходимым условием. Контрпример.

**13.3. Всюду разрывная функция  $f(x, y)$ , сходящаяся при  $y \rightarrow y_0$  к своей предельной функции  $\varphi(x)$  равномерно на множестве  $X$ .** Рассмотрим функцию  $f(x, y) = y + D(x)$  в квадрате  $0 \leq x, y \leq 2$ , где  $D(x)$  – функция Дирихле. Она всюду в этом квадрате разрывна, так как в любой окрестности любой точки принимает значения, отличные друг от друга на единицу. В то же время при  $y \rightarrow 1$  существует предельная функция  $\varphi(x) = 1 + D(x)$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , и



сходимость функции  $f(x, y)$  к предельной функции  $\varphi(x)$  равномерна. Действительно, для любого числа  $\varepsilon > 0$  возьмем число  $\delta$ :  $0 < \delta < \varepsilon$ , при этом для всех  $y$ :  $|y - y_0| = |y - 1| < \delta$  будет выполняться  $|f(x, y) - \varphi(x)| = |y + D(x) - 1 - D(x)| = |y - 1| < \delta < \varepsilon$  для всех  $0 \leq x \leq 2$ .

**Критерий равномерной сходимости к предельной функции.** Для того чтобы функция  $f(x, y)$  имела при  $y \rightarrow y_0$  предельную функцию и сходилась к ней равномерно на множестве  $X$ , необходимо и достаточно, чтобы для любого числа  $\varepsilon > 0$  существовало такое не зависящее от  $x$  число  $\delta > 0$ , чтобы для всех  $y, y' \in Y$ :  $|y - y_0| < \delta$ ,  $|y' - y_0| < \delta$ , и для всех  $x \in X$  выполнялось

$$|f(x, y') - f(x, y)| < \varepsilon. \quad (13.2)$$

Применим данный критерий к функциям, рассмотренным в примерах 13.2–13.3. Получим следующие иллюстративные примеры.

**13.4. Пример использования критерия равномерной сходимости для функции  $f(x, y)$ , сходящейся к своей предельной функции  $\varphi(x)$  неравномерно на  $X$ .** Рассмотрим функцию  $f(x, y)$  из примера 13.2. Пусть  $\varepsilon = 1/3$ , а число  $\delta > 0$  произвольное, сколь угодно малое. Возьмем некоторые числа  $y$  и  $y'$  ( $y \neq y'$ ), такие, что  $0 < |y - y_0| < \delta$ ,  $0 < |y' - y_0| < \delta$  или  $0 < |y| < \delta$ ,  $0 < |y'| < \delta$ , так как  $y_0 = 0$ . Запишем величину (13.2):

$$|f(x, y') - f(x, y)| = \left| \frac{x/y'}{1 + (x/y')^2} - \frac{x/y}{1 + (x/y)^2} \right|, \quad (13.3)$$

где  $-1 \leq x \leq 1$ . Выберем значение переменной  $x$ :  $x = y$ , получим

для правой части (13.3) величину  $\left| \frac{x/y'}{1 + (x/y')^2} - \frac{1}{2} \right|$ . Затем, выполняя

условие  $|y'| < \delta$ , выберем число  $y'$  настолько малым, чтобы выпол-

нялось  $\left| \frac{x/y'}{1 + (x/y')^2} \right| < \frac{1}{6}$ . Это возможно, так как  $\lim_{y' \rightarrow 0} \frac{x/y'}{1 + (x/y')^2} = 0$ .

В результате получим  $\left| \frac{x/y'}{1 + (x/y')^2} - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{3}$ , а следовательно, и для

левой части (13.3) будем иметь  $|f(x, y') - f(x, y)| > \varepsilon = 1/3$ . Делаем вывод, что функция  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow 0$  сходится к предельной функции неравномерно.

**13.5. Пример использования критерия равномерной сходимости для функции  $f(x, y)$ , сходящейся к своей предельной**

**функции  $\varphi(x)$  равномерно на  $X$ .** Снова обратимся к функции  $f(x, y) = y + D(x)$  из контрпримера 13.3, где  $0 \leq x, y \leq 2$ ,  $y_0 = 1$ . Рассмотрим произвольное, сколь угодно малое, число  $\varepsilon > 0$ . Имеем

$$|f(x, y') - f(x, y)| = |y' + D(x) - y - D(x)| = |y' - y|. \quad (13.4)$$

Величину (13.4) можно сделать меньше  $\varepsilon$ , если, например, выбрать значения  $y$  и  $y'$  согласно неравенствам:  $|y - y_0| = |y - 1| < \varepsilon/2$  и  $|y' - y_0| = |y' - 1| < \varepsilon/2$ , т.е. положить  $\delta = \varepsilon/2$ . Заметим, что неравенство  $|f(x, y') - f(x, y)| = |y' - y| < \varepsilon$  будет выполняться для всех  $y$  и  $y'$ :  $|y - 1| < \delta$ ,  $|y' - 1| < \delta$  и всех значений  $x$ :  $0 \leq x \leq 2$ . Согласно критерию, имеем при  $y \rightarrow 1$  равномерную на отрезке  $0 \leq x \leq 2$  сходимость функции  $f(x, y)$  к предельной функции.

**Достаточное условие непрерывности предельной функции.** Если функция  $f(x, y)$  при любом  $y \in Y$  непрерывна по  $x$  на отрезке  $X = [a, b]$  и при  $y \rightarrow y_0$  равномерно сходится к предельной функции  $\varphi(x)$ , то и  $\varphi(x)$  непрерывна на отрезке  $X = [a, b]$ .

Равномерная сходимость функции  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow y_0$  к предельной функции не является необходимым условием непрерывности последней. Приведем контрпример.

**13.6. Непрерывные функции  $f(x, y)$ , сходящиеся к своим непрерывным предельным функциям  $\varphi(x)$  неравномерно на  $X$ .** Функции из примеров 13.1 и 13.2 при любом  $y$  из  $Y$  непрерывны по  $x$  в промежутке  $X$ , но сходятся к предельным функциям неравномерно. Последнее обстоятельство не мешает этим предельным функциям быть непрерывными.

В то же время равномерная сходимость функции  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow y_0$  к предельной функции не является и достаточной для непрерывности последней, т.е. отбрасывая из утверждения требование непрерывности функции  $f(x, y)$  по переменной  $x$  при любом фиксированном  $y$ , мы получаем ложное утверждение. Опровергнем его контрпримером.

**13.7. Всюду разрывная по  $x$  функция  $f(x, y)$ , равномерно сходящаяся к всюду разрывной предельной функции  $\varphi(x)$ .** Функция из контрпримера 13.3  $f(x, y) = y + D(x)$  в квадрате  $0 \leq x, y \leq 2$ , где  $D(x)$  – функция Дирихле, при любом фиксированном  $y$  всюду разрывна по  $x$ . Однако при  $y \rightarrow 1$  существует пре-

дельная функция  $\varphi(x) = 1 + D(x)$ ,  $0 \leq x \leq 2$ , и сходимость функции  $f(x, y)$  к предельной функции  $\varphi(x)$  равномерна. Отметим, что предельная функция всюду разрывна.

Тем не менее условие непрерывности функции  $f(x, y)$  по переменной  $x$  при любом фиксированном  $y$  не является необходимым для непрерывности предельной функции. Контрпример.

**13.8. Всюду разрывная по  $x$  (при всех  $y \neq y_0$ ) функция  $f(x, y)$ , равномерно сходящаяся при  $y \rightarrow y_0$  к непрерывной предельной функции  $\varphi(x)$ .** Функция  $f(x, y) = yD(x)$ , где  $D(x)$  – функция Дирихле, определенная на всей плоскости  $Oxy$ , при любом значении  $y \neq 0$  всюду разрывна по переменной  $x$ . Однако при  $y \rightarrow 0$  функция  $f(x, y)$  равномерно сходится на всей оси  $Ox$  к непрерывной предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$ . Действительно, во-первых,  $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} (yD(x)) = 0$  при любом  $x$ ; во-вторых, для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое не зависящее от  $x$  число  $\delta > 0$ , а именно  $\delta = \varepsilon$ , что при  $|y - y_0| = |y| < \delta$  будет выполняться  $|f(x, y) - \varphi(x)| = |yD(x)| \leq |y| < \delta = \varepsilon$  для всех  $x$ .

**Обобщение теоремы Дини.** Пусть функция  $f(x, y)$ : 1) при любом  $y \in Y$  непрерывна по  $x$  на отрезке  $X = [a, b]$ ; 2) при возрастании  $y$  монотонно возрастает (при любом  $x \in X$ ) и сходится к непрерывной на  $X$  предельной функции  $\varphi(x)$ . Тогда эта сходимость равномерна на отрезке  $X = [a, b]$ .

Условие непрерывности по  $x$  на отрезке  $X$  функции  $f(x, y)$  при любом  $y$  из  $Y$  не является необходимым для равномерной на  $X$  сходимости этой функции к функции предельной. Построение соответствующего контрпримера включаем в упражнения к разделу.

Однако удалить из теоремы упомянутое условие нельзя, так как это приведет к некорректности получаемого утверждения. Приведем контрпример.

**13.9. Разрывная по  $x$  функция  $f(x, y)$ , монотонно возрастающая по  $y$ , и неравномерно сходящаяся к непрерывной предельной функции  $\varphi(x)$ .** Функция  $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > y, \\ 1, & \text{если } x \leq y \end{cases}$  в квадрате  $0 \leq x, y \leq 1$ . Иными словами, под диагональю квадрата функция равна нулю, на и над диагональю – единице. Она имеет один разрыв по переменной  $x$  при каждом  $y$  ( $y \neq 1$ ). При возрастании  $y$  ( $y \rightarrow 1$ ) функция, монотонно возрастающая, сходится к непрерывной предель-

ной функции  $\varphi(x) \equiv 1$ . Отметим, что при  $y \rightarrow 1$  сходимость функции  $f(x, y)$  к предельной функции  $\varphi(x) \equiv 1$  не является равномерной. Покажем это. Пусть  $\varepsilon = 1/2$ , а  $\delta > 0$  произвольное, сколь угодно малое, число. Тогда для любого числа  $y$ :  $0 < |y - 1| < \delta$  найдется такое число  $x = x_0$ , а именно  $y < x_0 \leq 1$ , что будет выполняться неравенство  $|f(x_0, y) - \varphi(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon = 1/2$ .

Условие монотонного возрастания функции при возрастании  $y$  не является необходимым для равномерной ее сходимости к предельной функции. Контрпример.

**13.10. Непрерывная по  $x$  функция  $f(x, y)$ , не монотонно возрастающая по  $y$ , но равномерно сходящаяся к непрерывной предельной функции  $\varphi(x)$ .** Функция

$$f(x, y) = xy \sin \frac{1}{y}$$

на множестве  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1/\pi \leq y < 0$ . Она при любом  $y$ ,  $-1/\pi \leq y < 0$ , непрерывна по  $x$  на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ . При  $y \rightarrow 0$  функция сходится к непрерывной предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$ . Очевидно, что при возрастании  $y$  функция изменяется немонотонно, более того, она немонотонна в любой окрестности точки  $y = 0$  (при любом  $x \neq 0$ ). Однако сходимость функции  $f(x, y) = xy \sin \frac{1}{y}$  при  $y \rightarrow 0$  к предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$  равномерна. Действительно, для любого числа  $\varepsilon > 0$ , при любом значении  $x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , величина

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = \left| xy \sin \frac{1}{y} \right| = |y| \cdot \left| x \sin \frac{1}{y} \right| < \varepsilon \quad (13.5)$$

как только  $|y - y_0| = |y| < \delta$ , где  $\delta < \varepsilon$ . Неравенство (13.5) выполняется, так как  $\left| x \sin \frac{1}{y} \right| \leq 1$ .

В то же время отбросить условие монотонного возрастания функции при возрастании  $y$  нельзя, так как полученное при этом утверждение будет ложным. Контрпример.

**13.11. Непрерывная по  $x$  функция  $f(x, y)$ , не монотонно возрастающая по  $y$  и сходящаяся к непрерывной предельной**

**функции  $\varphi(x)$  неравномерно.** Вернемся к функции из примера

$$13.2 \quad f(x, y) = \frac{x/y}{1+(x/y)^2}, \text{ если } -1 \leq x, y \leq 1 \ (y \neq 0), \quad f(x, y) = 0, \text{ если } -1 \leq x \leq 1, y = 0.$$

Пусть  $y_0 = 0$ , и мы рассматриваем ее сходимость при  $y \rightarrow 0$  (слева) к предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$ , см. пример 13.2. Покажем, что при этом все предположения теоремы выполняются, кроме условия монотонного возрастания функции при возрастании  $y$ . Функция  $f(x, y)$  при любом  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , непрерывна по  $x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , и при возрастании  $y$  от  $-1$  до  $0$  сходится к непрерывной же предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$ . Однако при возрастании  $y$  от  $-1$  до  $0$  монотонного возрастания функции  $f(x, y)$  нет.

Так, например, при  $y = -1$   $f(x, -1) = \frac{-x}{1+x^2}$ , при  $y = 0$   $f(x, 0) = 0$  и

для отрицательных  $x$  при возрастании  $y$  от  $-1$  до  $0$  вообще происходит не возрастание, а убывание функции. Для  $x = 1/2$  имеем  $f(1/2, -1) = -2/5$ ,  $f(1/2, -1/2) = -1/2$ ,  $f(1/2, 0) = 0$ , т.е. монотонности нет. Наконец отметим, что в примере 13.2 была установлена неравномерность относительно  $x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , сходимости функции  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow 0$  (слева) к предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$ .

Заметим, что также нельзя удалить из теоремы условие непрерывности предельной функции. Полученное при таком удалении некорректное утверждение опровергнем контрпримером.

**13.12. Непрерывная по  $x$  функция  $f(x, y)$ , монотонно возрастающая по  $y$  и сходящаяся к разрывной предельной функции  $\varphi(x)$  неравномерно.** Функция  $f(x, y) = -x^{-1/y}$  на множестве  $1/2 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y < 0$ . Эта функция при любом  $y$ ,  $-1 \leq y < 0$ , непрерывна по  $x$ ,  $1/2 \leq x \leq 1$ . При возрастании  $y$  она монотонно возрастает. Ее предельной функцией при  $y \rightarrow 0$  (слева) является имеющая разрыв в точке  $x = 1$  функция  $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 1/2 \leq x < 1, \\ -1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$

Для любого  $x$ ,  $1/2 \leq x < 1$ ,  $\lim_{y \rightarrow 0-0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-0} -x^{-\frac{1}{y}} = 0$ , а для

$x = 1$   $f(1, y) \equiv -1$ ,  $-1 \leq y < 0$ , и  $\lim_{y \rightarrow 0-0} f(1, y) = -1$ . Заметим, что

сходимость функции  $f(x, y) = -x^{-1/y}$  при  $y \rightarrow 0-0$  к разрывной

предельной функции  $\varphi(x)$  неравномерна на  $1/2 \leq x \leq 1$  в силу достаточного условия непрерывности предельной функции, см. выше.

**Теорема о предельном переходе под знаком интеграла.** Пусть функция  $f(x, y)$ : 1) при любом  $y \in Y$  непрерывна по  $x$  на отрезке  $X = [a, b]$ ; при  $y \rightarrow y_0$  сходится к предельной функции  $\varphi(x)$  равномерно на  $X = [a, b]$ . Тогда имеет место равенство:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (13.6)$$

Условие непрерывности функции  $f(x, y)$  при любом  $y \in Y$  по  $x$  на  $[a, b]$  не является необходимым для выполнения равенства (13.6). В то же время отбросить в теореме это условие нельзя, так как получим при этом некорректное утверждение. Построение соответствующих контрпримеров выносим в упражнения к разделу.

Условие сходимости функции  $f(x, y)$  к предельной функции  $\varphi(x)$ , равномерно относительно  $x$ , не является необходимым для выполнения равенства (13.6). Контрпример.

### 13.13. Функция $f(x, y)$ , сходящаяся к предельной функции

$\varphi(x)$  неравномерно, но для которой  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$ .

Функция из примера 13.2  $f(x, y) = \frac{x/y}{1+(x/y)^2}$ , если  $-1 \leq x, y \leq 1$

( $y \neq 0$ ),  $f(x, y) = 0$ , если  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $y = 0$ . Заметим, что при  $y \rightarrow 0$  существует предельная функция  $\varphi(x) \equiv 0$ , см. пример 13.2. Как при  $y = 0$ , так и при других значениях  $y$  функция  $f(x, y)$  непрерывна по  $x$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . Сходимость при  $y \rightarrow 0$  функции  $f(x, y)$  к предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$  не является равномерной на любом отрезке оси  $Ox$ , содержащем точку  $x = 0$ , что было фактически показано в примере 13.2. При этом равенство (13.6) выполняется. Рас-

смотрим интеграл  $I(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$ , имеем  $I(0) = 0$ , так как

$f(x, 0) \equiv 0$ , при  $y \neq 0$  получаем

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{x/y}{1+(x/y)^2} dx = y \int_0^{1/y} \frac{t}{1+t^2} dt = \frac{y}{2} \int_0^{1/y} \frac{d(1+t^2)}{1+t^2} = \\ &= \frac{y}{2} \ln(1+t^2) \Big|_0^{1/y} = \frac{y}{2} \ln \left( 1 + \frac{1}{y^2} \right). \end{aligned}$$

Легко показать, используя правило

Лопиталя, что  $\lim_{y \rightarrow 0} I(y) = \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 f(x, y) dx = 0$ . Это отвечает значению

$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0$ , так как  $\varphi(x) \equiv 0$ . Равенство (13.6) выполняется.

В то же время условие равномерной относительно  $x$  сходимости функции  $f(x, y)$  к предельной функции  $\varphi(x)$  нельзя изъять из теоремы, так как это приведет к ложному утверждению. Опровергнем его контрпримером.

**13.14. Функция  $f(x, y)$ , сходящаяся к предельной функции  $\varphi(x)$  неравномерно, и для которой  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx \neq \int_a^b \varphi(x) dx$ .**

Функцию  $z = f(x, y)$  зададим геометрически через описание ее графика (рис. 13.1), так как ее аналитическое задание слишком громоздко. Функцию определим в квадрате  $ABCD$ ,  $0 \leq x, y \leq 1$ . На диа-

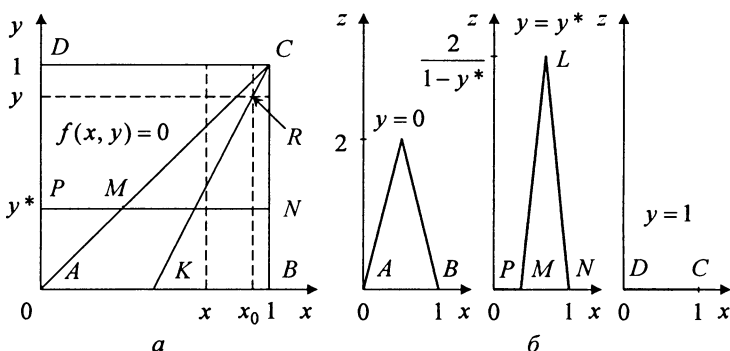


Рис. 13.1

гонали  $AC$  квадрата и выше, там, где  $0 \leq x \leq y \leq 1$ , положим  $f(x, y) = 0$ , т.е. при  $0 \leq x \leq y \leq 1$  график лежит в плоскости  $Oxy$ . Ниже диагонали, там, где  $0 \leq y < x \leq 1$ , составим график функции, задавая его сечения в плоскостях  $y = y^* = \text{const}$ , для каждого  $0 \leq y^* < 1$ . А именно (рис. 13.1, б), в сечении  $y = y^*$  график зададим боковыми сторонами  $ML$  и  $LN$  равнобедренного треугольника  $MNL$  с единичной площадью, основанием  $MN$  и вершиной  $L$ , расположенной выше плоскости  $Oxy$  (там, где координата  $z > 0$ ). Таким образом (рис. 13.1, б), в сечении  $y = 0$ , где точки  $A$  и  $M$ ,  $B$  и  $N$  попарно совпадут, график будет составлен только боковыми сто-

ронами равнобедренного треугольника с основанием  $AB$  и высотой, равной 2. В сечении  $y = y^*$ ,  $0 < y^* < 1$ , график будет составлен отрезком  $PM$ , лежащим в плоскости  $Oxy$ , и боковыми сторонами равнобедренного треугольника с основанием  $MN$  и высотой, равной  $\frac{2}{1-y^*} > 2$ . В сечении  $y = 1$  график будет совпадать с отрезком

$DC$ . При таком задании функции  $f(x, y)$ , очевидно, что она при любом постоянном  $y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , непрерывна по  $x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

При  $y \rightarrow 1-0$  функция  $f(x, y)$  сходится к предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Покажем это. При любом фиксированном  $x$ ,  $0 \leq x < 1$ , в некоторой ненулевой левой полуокрестности точки  $y = 1$  функция  $f(x, y) \equiv 0$  (рис. 13.1,  $a$ ). При  $x = 1$   $f(1, y) \equiv 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , по своему построению. Следовательно,  $\lim_{y \rightarrow 1-0} f(x, y) = 0$  при любом

$x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ . Покажем, что функция  $f(x, y)$  сходится к предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , неравномерно по  $x$ . Пусть  $\varepsilon = 1$ , а  $\delta > 0$  произвольное, сколь угодно малое, число. Возьмем любое число  $y$ :  $|y - 1| < \delta$ ,  $y < 1$ , для него можно взять число  $x = x_0$ ,  $y < x_0 < 1$ , такое, что точка  $(x_0, y)$  лежит на медиане  $CK$  треугольника  $ABC$ , на рис. 13.1,  $a$  точка с координатами  $(x_0, y)$  обозначена через  $R$ . Так как по построению функции  $f(x, y)$  в точках медианы  $CK$  значения функции (высот построенных равнобедренных треугольников) больше, или равны 2, то  $|f(x_0, y) - \varphi(x_0)| = |f(x_0, y)| > \varepsilon = 1$ .

Наконец покажем, что равенство (13.6) не выполняется. При любом фиксированном значении  $y = \tilde{y}$ ,  $0 \leq \tilde{y} < 1$ ,  $\int_0^1 f(x, \tilde{y}) dx = 1$ ,

так как площадь под графиком функции в сечении  $y = \tilde{y}$  (площадь соответствующего равнобедренного треугольника) равна 1. Отсюда,

$\lim_{y \rightarrow 1-0} \int_0^1 f(x, y) dx = 1$ . Однако  $\int_0^1 \varphi(x) dx = 0$ , так как  $\varphi(x) \equiv 0$ .

**Теорема о достаточных условиях непрерывности интеграла как функции от параметра.** Если функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в прямоугольнике  $[a, b; c, d]$ , то интеграл  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  — непрерывная функция от параметра  $y$  на отрезке  $[c, d]$ .



Непрерывность  $f(x, y)$ , как функции от двух переменных, не является необходимым условием непрерывности интеграла  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , как функции от параметра  $y$ . Приведем контрпример.

**13.15. Всюду разрывная функция  $f(x, y)$ , при которой интеграл  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  – непрерывная функция от  $y$ .** Функция  $f(x, y) = D(y) \operatorname{sgn} x$ , где  $D(y)$  – функция Дирихле, в квадрате  $-1 \leq x, y \leq 1$ . Эта функция всюду разрывна в данном квадрате. Однако  $I(y) = \int_{-1}^1 f(x, y) dx = D(y) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Получили непрерывную функцию  $I(y) \equiv 0$  на отрезке  $[-1, 1]$ .

Однако отбросить в теореме условие непрерывности  $f(x, y)$ , как функции от двух переменных, мы не можем. Контрпример.

**13.16. Разрывная функция  $f(x, y)$ , при которой интеграл  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  – разрывная функция от  $y$ .** Определенная в квадрате  $-1 \leq x, y \leq 1$  функция  $f(x, y) = \operatorname{sgn} x + \operatorname{sgn} y$  не является непрерывной на нем, как функция от двух переменных. Вычислим интеграл  $I(y) = \int_{-1}^1 f(x, y) dx$  отдельно для  $y < 0$ ,  $y = 0$ ,  $y > 0$ . В первом случае имеем  $I(y) = \int_{-1}^1 (\operatorname{sgn} x - 1) dx = -x|_{-1}^1 = -2$ , во втором –  $I(y) = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x dx = 0$ , в третьем –  $I(y) = \int_{-1}^1 (\operatorname{sgn} x + 1) dx = x|_{-1}^1 = 2$ . Имеем разрывную функцию  $I(y)$  на отрезке  $[-1, 1]$ .

**Теорема о достаточных условиях выполнения дифференцирования под знаком интеграла.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена на прямоугольнике  $[a, b; c, d]$  и непрерывна по  $x$  на  $[a, b]$  при любом постоянном  $y \in [c, d]$ . Предположим, что на всем прямоугольнике существует непрерывная частная производная  $f'_y(x, y)$ . Тогда при любом  $y \in [c, d]$  имеет место равенство

$$I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx. \quad (13.7)$$

Заметим, что предположение о непрерывности  $f(x, y)$  по  $x$  на  $[a, b]$  при любом постоянном  $y$  в  $[c, d]$  не является необходимым для выполнения формулы (13.7). Приведем контрпример.

**13.17. Разрывная по  $x$  функция  $f(x, y)$ , при которой выполняется  $I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$ , где  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ .** Функция

$$f(x, y) = y + R(x),$$

заданная в квадрате  $-1 \leq x, y \leq 1$ , где  $R(x)$  – функция Римана, см. ее определение в примере 2.3. Она разрывна при всех рациональных  $x$  на отрезке  $[-1, 1]$  при любом постоянном  $y$  в  $[-1, 1]$ . Другие предположения теоремы выполняются, т.е. существует частная производная  $f'_y(x, y) \equiv 1$ , непрерывная как функция двух переменных во всем квадрате  $-1 \leq x, y \leq 1$ . Вычислим

$$I(y) = \int_{-1}^1 f(x, y) dx = \int_{-1}^1 (y + R(x)) dx = \int_{-1}^1 y dx + \int_{-1}^1 R(x) dx = 2y, \text{ так как}$$

$$\int_{-1}^1 R(x) dx = 0, \text{ см. пример 8.13; отсюда получаем } I'(y) = 2;$$

$$\int_{-1}^1 f'_y(x, y) dx = \int_{-1}^1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2. \text{ Видим, что (13.7) выполняется.}$$

Однако удаление из теоремы предположения о непрерывности  $f(x, y)$  по  $x$  в  $[a, b]$  при любом постоянном  $y$  в  $[c, d]$  приводит к ложному утверждению. Контрпример.

**13.18. Разрывная по  $x$  функция  $f(x, y)$ , при которой не имеет смысла формула  $I'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$ , так как не существует**

**и  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ .** Рассмотрим функцию из контрпримера

13.3  $f(x, y) = y + D(x)$  в квадрате  $0 \leq x, y \leq 2$ , где  $D(x)$  – функция Дирихле. При любом  $y$ ,  $0 \leq y \leq 2$ , функция  $f(x, y)$  всюду разрывна по  $x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ . Остальные предположения теоремы выполняются, т.е. существует частная производная  $f'_y(x, y) \equiv 1$ , непрерывная как функция двух переменных во всем квадрате  $0 \leq x, y \leq 2$ . При этом формула (13.7) не имеет смысла, так как не существует интеграл

$$I(y) = \int_0^2 f(x, y) dx = \int_0^2 (y + D(x)) dx = \int_0^2 y dx + \int_0^2 D(x) dx$$

в силу несуществования интеграла  $\int_0^2 D(x) dx$ , см. пример 8.8.

Условие существования во всей области частной производной  $f'_y(x, y)$ , непрерывной по совокупности двух переменных, не является необходимым для выполнения формулы (13.7). В то же время удалить из теоремы это условие мы не можем, так как получаемое при этом утверждение будет ложным. Построение контрпримеров выносим в упражнения к разделу.

**Теорема о достаточных условиях интегрирования под знаком интеграла.** Если функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в прямоугольнике  $[a, b; c, d]$ , то имеет место равенство

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (13.8)$$

Обратная теорема не имеет места, т.е. непрерывность функции  $f(x, y)$  по обоим переменным не является необходимым условием для выполнения равенства (13.8). Приведем простой контрпример.

**13.19. Разрывная функция  $f(x, y)$ , для которой выполняется равенство**  $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ . Пусть функция  $f(x, y) = R(x) + R(y)$  в произвольном прямоугольнике  $[a, b; c, d]$ . Тогда  $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_c^d dy \int_a^b (R(x) + R(y)) dx = \int_c^d R(y)(b-a) dy = 0$ , так как интеграл от функции Римана на любом отрезке равен нулю. В силу симметрии функции  $f(x, y)$  относительно перестановки ее аргументов аналогично покажем, что  $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = 0$ . Равенство (13.8) выполняется. Но функция  $f(x, y) = R(x) + R(y)$  имеет разрывы во всех точках с рациональными координатами  $x$  и (или)  $y$ .

Однако разрыв функции  $f(x, y)$  только в одной единственной точке способен привести к невыполнению равенства (13.8). Приведем контрпример из [8], т. II, с. 665.

**13.20. Разрывная в одной точке функция  $f(x, y)$ , для кото-**

рой  $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \neq \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ . Пусть  $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$

в квадрате  $0 \leq x, y \leq 1$ , кроме точки  $x = y = 0$ ;  $f(0, 0) = 0$ . Функция

имеет разрыв только в точке  $(0, 0)$ . При этом  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = \frac{\pi}{4}$ , а

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = -\frac{\pi}{4}.$$

**Теорема о достаточных условиях непрерывности интеграла как функции от параметра – более общий случай.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в прямоугольнике  $[a, b; c, d]$ , а функции  $x = \alpha(y)$ ,  $x = \beta(y)$  определены и непрерывны на отрезке  $[c, d]$ , а их графики не выходят за пределы указанного прямоугольника. Тогда интеграл

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \quad (13.9)$$

суть непрерывная функция от  $y$  на отрезке  $[c, d]$ .

Приведенные выше контрпримеры 13.15 и 13.16 применимы и к данной, более общей, теореме. Поэтому здесь коснемся только новых моментов. Так, покажем, что непрерывность кривых не является необходимым условием непрерывности функции  $I(y)$ . Приведем контрпример.

**13.21. Разрывные функции  $x = \alpha(y)$ ,  $x = \beta(y)$ , при которых функция  $I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$  непрерывна.** Пусть  $f(x, y) = y \cos x$ ,

$\alpha(y) = R(y)$ ,  $\beta(y) = R(y) + 2\pi$ ,  $0 \leq x \leq 1 + 2\pi$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в прямоугольнике  $[0; 1 + 2\pi; -1; 1]$ . Кривые  $x = \alpha(y)$ ,  $x = \beta(y)$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , не выходят за пределы данного прямоугольника, но имеют при каждом рациональном  $y$  точки разрыва. Вычислим интеграл

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{R(y)}^{R(y)+2\pi} y \cos x dx = y \sin x \Big|_{R(y)}^{R(y)+2\pi} = 0. \text{ Видим, что}$$

$I(y)$  непрерывная функция.

В то же время отбросить требование непрерывности кривых в теореме нельзя, так как получим некорректное утверждение. Контрпример.

**13.22. Разрывная в одной точке функция  $x = \beta(y)$ , при кото-**

рой функция  $I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$  разрывна. Предположим, что

$f(x, y) = y + \cos x$ ,  $\alpha(y) = 0$ ,  $\beta(y) = \operatorname{sgn} y$ , в квадрате  $-1 \leq x, y \leq 1$ . Функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна в данном квадрате. Кривые  $x = \alpha(y)$ ,  $x = \beta(y)$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , не выходят за пределы этого квадрата, но кривая  $x = \beta(y)$  имеет одну точку разрыва (при  $y = 0$ ). Вычислим интеграл

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_0^{\operatorname{sgn} y} (y + \cos x) dx = y x \Big|_0^{\operatorname{sgn} y} + \sin x \Big|_0^{\operatorname{sgn} y} =$$

$= y \operatorname{sgn} y + \sin(\operatorname{sgn} y) = |y| + \sin(\operatorname{sgn} y)$ . Видим, что  $I(y)$  не является непрерывной функцией на отрезке  $-1 \leq y \leq 1$ .

**Теорема о достаточных условиях существования у интеграла производной по параметру.** Если выполняются предположения предыдущей теоремы и (дополнительно) у функции  $f(x, y)$  существует в прямоугольнике  $[a, b; c, d]$  непрерывная производная  $f'_y(x, y)$ , а также существуют производные  $\alpha'(y)$ ,  $\beta'(y)$ , то интеграл (13.9) имеет производную по параметру  $y$ ,  $y \in [c, d]$ , которая выражается формулой

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y)f(\beta(y), y) - \alpha'(y)f(\alpha(y), y). \quad (13.10)$$

Формула (13.7) является частным случаем формулы (13.10) при  $\alpha(y)$  и  $\beta(y)$ , равных константам. Данные выше контрпримеры 13.17 – 13.18 применимы и к данной, более общей, теореме. Сейчас коснемся только вновь появившихся условий теоремы. Покажем, что существование всюду на отрезке  $[c, d]$  производной  $\alpha'(y)$  или  $\beta'(y)$  не является необходимым условием выполнения формулы (13.10). Контрпример.

**13.23. Функция  $x = \alpha(y)$ , не имеющая  $\alpha'(0)$ , при которой**

$$I'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y)f(\beta(y), y) - \alpha'(y)f(\alpha(y), y), \quad -1 \leq y \leq 1.$$

Пусть  $f(x, y) = xy$ ,  $\alpha(y) = |y|$ ,  $\beta(y) = 1$  в прямоугольнике  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Нетрудно видеть, что все предположения теоремы выполняются, кроме существования всюду на отрезке  $-1 \leq y \leq 1$  производной  $\alpha'(y)$ . Действительно,  $\alpha'(0)$  не существует. Вычислим

$$I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx = \int_{|y|}^1 xy dx = y \frac{x^2}{2} \Big|_{|y|}^1 = \frac{1}{2}(y - y^3);$$

отсюда получаем  $I'(y) = \frac{1}{2}(1 - 3y^2)$ ; далее

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f'_y(x, y) dx + \beta'(y)f(\beta(y), y) - \alpha'(y)f(\alpha(y), y) = \\ &= \int_{|y|}^1 x dx - \alpha'(y)|y|y = \frac{x^2}{2} \Big|_{|y|}^1 - \operatorname{sgn} y|y|y = \frac{1}{2} - \frac{y^2}{2} - y^2 = \frac{1}{2}(1 - 3y^2). \end{aligned}$$

Здесь использовано то, что  $\beta'(y) \equiv 0$ , а  $\operatorname{sgn} y|y| = y$ . Однако последние выкладки нуждаются в следующей оговорке:  $\alpha'(y)|y| = \operatorname{sgn} y|y|$ , если выполнено доопределение функции  $\alpha'(y)$  любым конечным значением  $a$ ,  $\alpha'(0) = a$ . С точностью до сделанной оговорки, формула (13.10) выполняется.

Вместе с тем очевидно, что условие существования производных  $\alpha'(y)$  и  $\beta'(y)$  всюду на отрезке  $[c, d]$  нельзя удалить из теоремы, так как в основной массе случаев правая часть равенства (13.10) будет терять смысл.

### 13.2. Равномерная сходимость интегралов

**Определение равномерной сходимости интеграла первого рода.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена для всех значений  $x \geq a$  и всех значений  $y$  на некоторой области  $Y$ . И пусть при каждом  $y \in Y$  существует интеграл

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (13.11)$$

По своему определению интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_a^A f(x, y) dx$ , т.е. интеграл

$F(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx$ , как функция от  $A$  и  $y$ , при  $y = \text{const}$  и  $A \rightarrow +\infty$

имеет своим пределом  $I(y)$ . Если  $F(A, y)$  сходится при  $A \rightarrow +\infty$  к предельной функции  $I(y)$  равномерно на  $Y$ , то интеграл (13.11) называют равномерно сходящимся на области  $Y$ .

Это означает, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое не зависящее от  $y$  число  $A_0 \geq a$ , что для всех  $A > A_0$  и всех  $y \in Y$  выполняется:

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| = \left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Равномерность сходимости интеграла первого рода при заданной функции  $f(x, y)$  может зависеть от области  $Y$  изменения переменной  $y$ . Приведем пример.

**13.24. Пример интеграла первого рода, сходимость которого равномерна на одной и неравномерна на другой области изменения параметра.** Пусть  $f(x, y) = \frac{1}{yx^2}$ , интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{yx^2}$ , очевидно, сходится при любом  $y \neq 0$ . Вычислим интеграл

$$F(A, y) = \int_1^A \frac{dx}{yx^2} = -\frac{1}{yx} \Big|_1^A = \frac{1}{y} \left( 1 - \frac{1}{A} \right), \text{ где } A \geq 1.$$

Интеграл (13.11) в данном случае равен

$$I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{yx^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A, y) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{yx^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{y} \left( 1 - \frac{1}{A} \right) = \frac{1}{y}.$$

Установим равномерность или неравномерность сходимости при  $A \rightarrow +\infty$  функции (интеграла)  $F(A, y) = \frac{1}{y} \left( 1 - \frac{1}{A} \right)$  к функции (интегралу)  $I(y) = \frac{1}{y}$  относительно  $y$  при различных областях  $Y$ .

Рассмотрим сначала область  $Y_1: y_0 \leq y < +\infty$ , где  $y_0 > 0$ . В этом случае для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое не зависящее от  $y$  число  $A_0 \geq 1$ , а именно,  $A_0 = \max \left( \frac{1}{\varepsilon y_0}, 1 \right)$ , что, лишь только  $A > A_0$ ,

$$\text{неравенство } \left| \int_1^{+\infty} f(x, y) dx - \int_1^A f(x, y) dx \right| = |I(y) - F(A, y)| = \frac{1}{yA} < \varepsilon$$

выполняется для всех значений  $y$  в  $Y_1: y_0 \leq y < +\infty$ . Видим, что интеграл  $I(y)$  сходится равномерно на  $Y_1$ .

Рассмотрим область  $Y_2: 0 < y < +\infty$ . В данном случае для  $\varepsilon = 1$  и для любого, сколь угодно большого, числа  $A^* \geq 1$  существует число  $0 < y^* < 1/A^*$ , при котором выполняется

$$\left| \int_1^{+\infty} f(x, y^*) dx - \int_1^{A^*} f(x, y^*) dx \right| = |I(y^*) - F(A^*, y^*)| = \frac{1}{y^* A^*} > \varepsilon = 1.$$

Отмечаем, что интеграл  $I(y)$  сходится неравномерно на  $Y_2$ .

**Критерий равномерной сходимости интеграла.** Для равномерной сходимости интеграла (13.11) на области  $Y$  необходимо и достаточно, чтобы для

любого числе  $\varepsilon > 0$  существовало число  $A_0 \geq a$ , не зависящее от  $y$ , такое, что для всех  $A' > A > A_0$  и всех  $y \in Y$  выполнялось неравенство:

$$\left| \int_a^{A'} f(x, y) dx - \int_a^A f(x, y) dx \right| = \left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Применим критерий к интегралу из предыдущего примера.

**13.25. Примеры использования критерия равномерной сходимости интеграла для определения равномерной и неравномерной сходимости.** Имеем интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{yx^2}$ , сходящийся при лю-

бом  $y \neq 0$ . Вычислим при  $A' > A$   $\int_A^{A'} f(x, y) dx = \int_A^{A'} \frac{dx}{yx^2} = \frac{1}{y} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{A'} \right)$ .

В случае области  $Y_1: y_0 \leq y < +\infty$  ( $y_0 > 0$ ), для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $A_0 \geq 1$ , а именно  $A_0 = \max \left( \frac{1}{\varepsilon y_0}, 1 \right)$ , при котором выполня-

ется неравенство  $\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| = \frac{1}{y} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{A'} \right) < \frac{1}{yA} < \frac{1}{yA_0} \leq \varepsilon$  для всех  $y$  из  $Y_1$ , лишь только  $A' > A > A_0$ . Получаем подтверждение сходимости интеграла, равномерной относительно  $y$  в области  $Y_1$ .

В случае области  $Y_2: 0 < y < +\infty$ , для  $\varepsilon = 1$  и для любого, сколь угодно большого, числа  $A_0 \geq 1$ , и любых чисел  $A', A$  ( $A' > A > A_0$ ), существует число  $0 < y^* < \frac{1}{A} - \frac{1}{A'}$ , при котором выполняется нера-

венство  $\left| \int_A^{A'} f(x, y^*) dx \right| = \frac{1}{y^*} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{A'} \right) > \varepsilon = 1$ . Неравномерная относительно  $y$  в области  $Y_2$  сходимость интеграла подтверждается.

Усилим утверждение, заменив произвольность выбора числа  $A'$  (в рамках условия  $A' > A > A_0$ ) на его равенство  $A' = A + C$ , где  $C > 0$  – произвольное, сколь угодно большое, но фиксированное число. Построение контрпри-  
мера, опровергающего такое усиленное утверждение, вынесем в упражнения.

**Достаточный признак равномерной сходимости интеграла.** Если существует функция  $\varphi(x)$ , интегрируемая на бесконечном промежутке  $[a, +\infty)$ , такая, что для всех  $y \in Y$   $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$ , при любом  $x \geq a$ , то интеграл (13.11) сходится равномерно на области  $Y$ .



Не всякий сходящийся интеграл (13.11) мажорируется сходящимся интегралом  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ . Приведем примеры.

**13.26. Сходящийся при любом значении параметра интеграл первого рода, который не мажорируется сходящимся интегралом.** Интеграл из примера 13.24  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{yx^2}$ ,  $y$  в области  $Y: 0 < y < +\infty$ . Он сходится при любом значении  $y \in Y$ . Очевидно, из-за неограниченности функции  $f(x, y) = \frac{1}{yx^2}$  по переменной  $y$ ,  $0 < y < +\infty$ , эта функция не имеет мажоранты  $\varphi(x)$ , т.е. нет такой функции  $\varphi(x)$ , чтобы при всех значениях  $y$  в  $Y$   $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$  (для  $x \geq 1$ ).

Напомним, что в данном примере функция  $f(x, y)$  неограниченна по  $y$ ,  $y \in Y$ . Однако и при ограниченной по совокупности переменных функции  $f(x, y)$  не всякий сходящийся интеграл мажорируется сходящимся интегралом. Пример.

**13.27. Сходящийся интеграл первого рода от функции, ограниченной по совокупности переменных, который не мажорируется сходящимся интегралом.** Интеграл  $\int_1^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dx$ ,  $y$  в области  $1 \leq y < +\infty$ , как известно, сходится при любом  $y$ . Функция  $f(x, y)$  ограничена:  $0 < e^{-(x-y)^2} \leq 1$ . Мажоранта с минимально возможными значениями это  $\varphi(x) \equiv 1$ , так как для любого  $x$  существует  $y$ ,  $y = x$ , при котором  $f(x, x) = 1$ . Но интеграл  $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_1^{+\infty} dx$  расходится.

Заметим, что в двух уже приведенных примерах интеграл сходится неравномерно относительно параметра  $y$  (для второго примера это легко показать, применив критерий равномерной сходимости интеграла). Однако и не всякий интеграл, сходящийся равномерно по  $y$ , мажорируется сходящимся интегралом. Иными словами, утверждение, обратное данному, неверно. Приведем контрпример.

**13.28. Равномерно сходящийся интеграл первого рода, который не мажорируется сходящимся интегралом.** Дан интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x, y) dx$ , где  $f(x, y) = \begin{cases} 1/x, & \text{если } y \leq x \leq y+1, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad 1 \leq x, y < +\infty$

(рис. 13.2). Он сходится при любом  $y$ ,  $1 \leq y < +\infty$ , так как подынтегральная функция отлична от нуля только на отрезке единичной длины и ограничена единицей. Его сходимость является равномерной относительно параметра  $y$  в данной области. Действительно, применяя критерий равномерной сходимости интеграла, получим: для любого  $\varepsilon > 0$  существует такое число  $A_0 \geq 1$ , а именно  $A_0 > 1/\varepsilon$ ,

не зависящее от  $y$ , что неравенство  $\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \frac{1}{A_0} < \varepsilon$  выполняется для всех  $y$ ,  $1 \leq y < +\infty$ , лишь только  $A' > A > A_0$ . Это объясняется тем, что на отрезке  $A \leq x \leq A'$  подынтегральная функ-

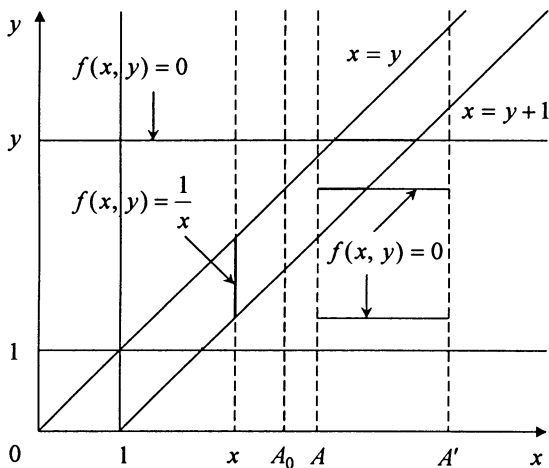


Рис. 13.2

ция  $f(x, y)$  при любом  $y$ ,  $1 \leq y < +\infty$ , либо равна нулю, либо отлична от нуля на отрезке единичной, или меньшей, длины; при этом  $0 < f(x, y) < \frac{1}{A_0}$ , так как  $A' > A > A_0$ . В то же время  $f(x, y)$  имеет мажоранту  $\varphi(x) = \max_{1 \leq y < +\infty} f(x, y) = 1/x$ , у которой минимально воз-

можные значения. Но интеграл  $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$  расходится.

**Достаточный признак 1 равномерной сходимости интеграла.** Рассмотрим несобственный интеграл первого рода

$$\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x) dx, \quad (13.12)$$

где функции  $f(x, y)$  и  $g(x)$  непрерывные по  $x$ , а  $g(x)$  монотонная и имеющая непрерывную производную. Пусть: 1) интеграл  $\Phi(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx$  равномерно ограничен при всех  $A$  и всех  $y$ :  $|\Phi(A, y)| \leq K$ ,  $K = \text{const}$ ; 2)  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Тогда интеграл (13.12) сходится равномерно на  $Y$ .

Покажем, что предположение о непрерывности функции  $f(x, y)$  по переменной  $x$  не является необходимым для равномерной сходимости интеграла (13.12). Контрпример.

**13.29. Разрывная по  $x$  функция  $f(x, y)$ , при которой интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x) dx$  сходится равномерно.** Предположим, что

$f(x, y) = R(x) + xy e^{-x}$ ,  $g(x) = 1/x$ . Рассмотрим интеграл

$$I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{R(x) + xy e^{-x}}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{R(x)}{x} dx + \int_1^{+\infty} y e^{-x} dx,$$

$y \in Y$ ,  $Y = [0, 1]$ . Первый интеграл справа равен нулю, потому что

на любом конечном отрезке  $[1, A]$ ,  $A > 1$ ,  $\int_1^A \frac{R(x)}{x} dx = 0$ , так как

функция Римана интегрируема на любом отрезке и отлична от нуля

только на счетном множестве точек. Отсюда,  $I(y) = \int_1^{+\infty} y e^{-x} dx$ .

Функция  $f(x, y) = R(x) + xy e^{-x}$  имеет разрывы по переменной  $x$  во всех рациональных точках. Все остальные предположения утверждения выполняются: функция  $g(x)$  непрерывная, монотонная и имеет непрерывную производную;  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ ; интеграл

$\Phi(A, y) = \int_1^A f(x, y) dx$  равномерно ограничен при всех  $A$  и всех  $y$ .

Покажем последнее.  $\Phi(A, y) = \int_1^A (R(x) + xy e^{-x}) dx =$

$$= y \int_1^A x e^{-x} dx = y(-x e^{-x} - e^{-x}) \Big|_1^A = -y(Ae^{-A} + e^{-A} - 2e^{-1}).$$

Так как  $0 \leq y \leq 1$ ,  $1 \leq A < +\infty$  и  $\lim_{A \rightarrow +\infty} (Ae^{-A} + e^{-A}) = 0$ , то интеграл

$\Phi(A, y)$  равномерно ограничен при всех  $A$  и всех  $y$ . Заметим, что при этом интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} y e^{-x} dx$  сходится равномерно на  $Y$ , так

как мажорируется сходящимся интегралом  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ .

В то же время совсем убрать из утверждения условие непрерывности функции  $f(x, y)$  по  $x$  нельзя, так как будет получено ложное утверждение. Приведем простой контрпример.

**13.30. Разрывная по  $x$  функция  $f(x, y)$ , при которой интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x) dx$  не существует.** Если в предыдущем контрпримере вместо функции Римана (интегрируемой по Риману) подставить неинтегрируемую по Риману функцию Дирихле, то вообще придем к несуществованию интеграла

$$I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{D(x) + xy e^{-x}}{x} dx = \int_1^{+\infty} \frac{D(x)}{x} dx + \int_1^{+\infty} y e^{-x} dx.$$

Заметим, что можно рассмотреть аналогичный контрпример и в случае функции  $g(x)$ , но при этом надо будет снимать и другие предположения об этой функции.

Сейчас же покажем, что предположения о непрерывности и непрерывной дифференцируемости функции  $g(x)$  не являются необходимыми для равномерной сходимости интеграла (13.12). Контрпример.

**13.31. Разрывная функция  $g(x)$ , при которой равномерно сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x) dx$ .** Положим  $f(x, y) = y e^{-x}$ ,

$g(x) = \frac{1}{[x]}$ , где  $[x]$  — целая часть числа  $x$ ,  $x \geq 1$ ,  $y \in Y$ ,  $Y = [0, 1]$ .

Получим интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y e^{-x}}{[x]} dx$ ,  $Y \in [0, 1]$ .

Функция  $g(x)$  имеет разрывы и соответственно не имеет производной при натуральных значениях  $x$ . Все другие предположения утверждения выполняются: функция  $g(x)$  монотонная,  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ ; функция  $f(x, y) = y e^{-x}$  непрерывная по  $x$ ; интеграл

$\Phi(A, y) = \int_1^A f(x, y) dx = y \int_1^A e^{-x} dx = y(e^{-1} - e^{-A})$  равномерно ограничен при всех  $A$ ,  $A \geq 1$ , и всех  $y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

Заметим, что при этом интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{ye^{-x}}{[x]} dx$  сходится равномерно относительно  $y$  на  $Y$ , так как мажорируется сходящимся интегралом  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ .

Заметим, что предположение о монотонности функции  $g(x)$  не является необходимым для равномерной сходимости интеграла (13.12). Контрпример.

**13.32. Немонотонная функция  $g(x)$ , при которой равномерно сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x) dx$ .** Положим  $f(x, y) = ye^{-x}$ ,

$g(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Рассмотрим  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{ye^{-x} \sin x}{x} dx$ ,  $y \in Y$ ,  $Y = [0, 1]$ . Функция  $g(x)$  немонотонная. Все остальные предположения утверждения выполняются: функция  $f(x, y)$  непрерывная по  $x$ , функция  $g(x)$  непрерывная и имеет всюду непрерывную производную,  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ ; интеграл

$\Phi(A, y) = \int_1^A f(x, y) dx = y \int_1^A e^{-x} dx = y(e^{-1} - e^{-A})$  равномерно ограничен при всех  $A$ ,  $A \geq 1$ , и всех  $y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . При этом интеграл

$I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{ye^{-x} \sin x}{x} dx$  сходится равномерно относительно  $y$  из  $Y$ ,

так как мажорируется сходящимся интегралом  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ .

С другой стороны, снять в утверждении предположение о монотонности функции  $g(x)$  нельзя – получим неверное утверждение. Контрпример.

**13.33. Немонотонная функция  $g(x)$ , при которой интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x) dx$  расходится.** Пусть  $f(x, y) = y \sin x$ ,  $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

Получим интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y \sin^2 x}{x} dx$ ,  $y \in Y$ ,  $Y = [0, 1]$ . Функция  $g(x)$  немонотонная. Все остальные предположения утверждения выполняются: функция  $f(x, y)$  непрерывная по  $x$ , функция  $g(x)$  непрерывная и имеет всюду непрерывную производную,  $g(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$ ; интеграл

$$\Phi(A, y) = \int_1^A f(x, y) dx = y \int_1^A \sin x dx = -y(\cos A - \cos 1)$$

равномерно ограничен при всех  $A$ ,  $A \geq 1$ , и всех  $y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . При

этом интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y \sin^2 x}{x} dx$  расходится при любом  $y$ ,

$0 < y \leq 1$ , так как расходится интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ , [8], т. II, с. 566.

Предположение о стремлении к нулю функции  $g(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  также не является необходимым для равномерной сходимости интеграла (13.12). Контрпример.

**13.34. Функция  $g(x)$ :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$ , при которой равномер-

но сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x) dx$ . Положим  $f(x, y) = ye^{-x}$ ,

$g(x) = \frac{x}{x+1}$ . Получим  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{ye^{-x}x}{x+1} dx$ ,  $y \in Y$ ,

$Y = [0, 1]$ . В этом случае  $g(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Легко проверить, что все остальные предположения утверждения выполняются. Ви-

дим, что интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{ye^{-x}x}{x+1} dx$  сходится равномерно на  $Y$ ,

так как мажорируется сходящимся интегралом  $\int_1^{+\infty} e^{-x} dx$ .

Однако совсем отбросить из утверждения предположение о стремлении к нулю функции  $g(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  мы не можем. Приведем контрпример.

**13.35. Функция  $g(x)$ :**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \neq 0$ , при которой интеграл

$\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x) dx$  расходится. Предположим  $f(x, y) = y \frac{x}{x+1} \cos x$ ,

$g(x) = \frac{x+1}{x}$ . Имеем  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y)g(x) dx = \int_1^{+\infty} y \cos x dx$ ,  $y \in Y$ ,

$Y = [0, 1]$ . В данном случае  $g(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Все другие предположения утверждения выполняются. В частности, интеграл

$$\Phi(A, y) = \int_1^A f(x, y) dx = y \int_1^A \frac{x}{x+1} \cos x dx < y \int_1^A \cos x dx = y(\sin A - \sin 1)$$

равномерно ограничен при всех  $A$ ,  $A \geq 1$ , и всех  $y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Однако

интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} y \cos x dx$  расходится при любом  $0 < y \leq 1$ .

Наконец покажем, что предположение о равномерной (при всех  $A$  и всех  $y$ ) ограниченности интеграла  $\Phi(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx$  не является необходимым для равномерной сходимости интеграла (13.12). Контрпример.

**13.36.** Неограниченный интеграл  $\Phi(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx$ , при

котором равномерно сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x) dx$ . Пусть

$f(x, y) = xy$ ,  $g(x) = 1/x^3$ . Тогда  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x^2} dx$ ,

$y \in Y$ ,  $Y = [0, 1]$ , а  $\Phi(A, y) = \int_1^A f(x, y) dx = y \int_1^A x dx = \frac{y}{2}(A^2 - 1)$  при

любом  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ , неограничен. Все другие предположения утверждения выполняются. При этом интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x^2} dx$  сходится

равномерно относительно  $y$  на  $Y$ , так как мажорируется сходящимся интегралом  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ .

Но удалить из утверждения предположение о равномерной (при всех  $A$  и всех  $y$ ) ограниченности интеграла  $\Phi(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx$  невозможно.

**13.37.** Неограниченный интеграл  $\Phi(A, y) = \int_a^A f(x, y) dx$ , при

котором интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x, y)g(x) dx$  расходится. Как и в преды-

дущем контрпримере, примем  $f(x, y) = xy$ , но  $g(x) = 1/x^2$ . Полу-

чим интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y)g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x} dx$ ,  $y \in Y$ ,  $Y = [0, 1]$ .

Выше уже было показано, что интеграл  $\Phi(A, y)$  неограничен. Все прочие предположения утверждения выполняются. Однако инте-

грал  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x} dx$  расходится при любом  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ .

**Достаточный признак 2 равномерной сходимости интеграла.** Рассмотрим несобственный интеграл первого рода

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x, y) dx, \quad (13.13)$$

где функции  $f(x)$  и  $g(x, y)$  непрерывные по  $x$ , а  $g(x, y)$  монотонная и имеющая непрерывную производную по  $x$ . Пусть: 1) интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  сходится; 2) функция  $g(x, y)$  равномерно ограничена для всех значений  $x$  и  $y$ :  $|g(x, y)| \leq L$ ,  $L = \text{const}$ . Тогда интеграл (13.13) сходится равномерно на  $Y$ .

Ввиду определенной схожести двух последних утверждений, некоторые построенные выше контрпримеры применимы (с точностью до перестановки символов « $f$ » и « $g$ ») и в данном случае. Поэтому остановимся только на вновь появившихся моментах.

Сначала обратимся к условию монотонности функции  $g(x, y)$  по  $x$ .

**13.38, 13.39.** Немонотонные по  $x$  функции  $g(x, y)$ , при которых интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x, y) dx$  равномерно сходится (расходит-

ся). Пусть  $f(x) = 1/x^2$ ,  $g(x, y) = y \sin x$ ,  $y \in Y$ ,  $Y = [-1, 1]$ . Рассмотрим

интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x)g(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y \sin x}{x^2} dx$ ,  $y \in Y$ . Функция

$g(x, y)$  немонотонна по  $x$ . Все прочие предположения утверждения



выполняются, в том числе интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  сходится и  $|g(x, y)| = |y \sin x| \leq 1$ . Однако, несмотря на то что функция  $g(x, y)$  не является монотонной по  $x$ , интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y \sin x}{x^2} dx$  сходится равномерно относительно  $y$  на  $Y$ , так как мажорируется сходящимся интегралом  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ .

Но предположение о монотонности функции  $g(x, y)$  по  $x$  нельзя совсем удалить из утверждения. Предположим, что  $f(x) = \sin x / x$ ,  $g(x, y) = y \sin x$ ,  $y \in Y$ ,  $Y = [-1, 1]$ . Рассмотрим интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x)g(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y \sin^2 x}{x} dx$ . Заметим, что функция  $g(x, y)$  не является монотонной по переменной  $x$ . Все прочие предположения утверждения выполняются, так сходится интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ , [2], т. II, с. 120, и  $|g(x, y)| = |y \sin x| \leq 1$ . Отметим, что при этом интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y \sin^2 x}{x} dx$  расходится для любого  $y \in Y$ ,  $y \neq 0$ , [2], т. II, с. 121.

Обратим внимание на условие сходимости интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

**13.40, 13.41. Расходящиеся интегралы**  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , при которых интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x, y) dx$  равномерно сходится (расходится). Положим  $f(x) = 1/x$ ,  $g(x, y) = y/x$ ,  $y \in Y$ ,  $Y = [-1, 1]$ . Рассмотрим интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x)g(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x^2} dx$ . Заметим, что интеграл  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$  расходится. Все другие предположения утверждения выполняются, в частности  $|g(x, y)| = |y/x| \leq 1$ . Видим,

что интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x^2} dx$  сходится равномерно на  $Y$ , так как мажорируется сходящимся интегралом  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ .

В то же время условие сходимости интеграла  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  нельзя удалить из утверждения. Пусть  $f(x) = 1/\sqrt{x}$ ,  $g(x, y) = y/\sqrt{x}$ ,  $y \in Y$ ,  $Y = [-1, 1]$ . Получим интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x)g(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x} dx$ . Видим, что  $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$  расходится. Все другие предположения утверждения выполняются, в частности  $|g(x, y)| = \left| \frac{y}{\sqrt{x}} \right| \leq 1$ . Видим, что интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x} dx$  расходится при любом  $y \in Y$ ,  $y \neq 0$ .

Рассмотрим условие равномерной ограниченности функции  $g(x, y)$  для всех  $x$  и всех  $y$ .

**13.42, 13.43. Неограниченные функции  $g(x, y)$ , при которых равномерно сходится (расходится) интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x, y) dx$ .**

Положим  $f(x) = 1/x^3$ ,  $g(x, y) = xy$ ,  $y \in Y$ ,  $Y = [-1, 1]$ . Имеем интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x)g(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x^2} dx$ . Функция  $g(x, y) = xy$  неограниченна при  $x \geq 1$ . Легко заметить, что все остальные предположения утверждения выполняются. Несмотря на неограниченность функции  $g(x, y)$ , интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x^2} dx$  сходится равномерно относительно  $y$  на  $Y$ .

Однако мы не можем совсем отбросить условие равномерной ограниченности функции  $g(x, y)$  для всех  $x$  и всех  $y$  из утверждения. Пусть  $f(x) = 1/x^2$ ,  $g(x, y) = xy$ ,  $y \in Y$ ,  $Y = [-1, 1]$ . Получим

интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x)g(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x} dx$ . Функция  $g(x, y) = xy$  неограниченна при  $x \geq 1$ . Все прочие предположения утверждения выполняются. Отмечаем, что интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y}{x} dx$  расходится для всех  $y \in Y$ ,  $y \neq 0$ .

**Определение равномерной сходимости интеграла (собственного и несобственного второго рода) на отрезке.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена для значений  $x \in [a, b]$  и значений  $y$  на некоторой области  $Y$ . И пусть при каждом  $y \in Y$  существует интеграл (собственный или нет) на  $[a, b]$ :

$$I(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad (13.14)$$

который является пределом при  $\eta \rightarrow 0$  интеграла  $\varphi(\eta, y) = \int_a^{b-\eta} f(x, y) dx$ . Если функция  $\varphi(\eta, y)$  сходится при  $\eta \rightarrow 0$  к предельной функции  $I(y)$  равномерно на  $Y$ , то интеграл (13.14) называют равномерно сходящимся на области  $Y$ .

Это означает, что для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует такое не зависящее от  $y$  число  $\delta > 0$ , что для всех  $0 < \eta \leq \delta$  и всех  $y \in Y$  выполняется неравенство:

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^{b-\eta} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

Заметим, что в данном определении предусматривается возможность точки  $x = b$  быть особой для интеграла (13.14). Определение легко дать и для случая, когда подобная роль отводится точке  $x = a$ .

Равномерность сходимости интеграла второго рода при заданной функции  $f(x, y)$  может зависеть от области  $Y$  изменения переменной  $y$ . Приведем пример.

**13.44. Пример интеграла второго рода, сходимость которого равномерна на одной и неравномерна на другой области изменения параметра.** Пусть  $f(x, y) = \frac{1}{y\sqrt{1-x^2}}$ . Рассмотрим на отрез-

ке  $[0, 1]$  интеграл  $I(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 \frac{dx}{y\sqrt{1-x^2}}$ , он сходится при любом значении  $y$ ,  $y \neq 0$ . Вычислим для  $\eta > 0$  интеграл

$$\varphi(\eta, y) = \int_0^{1-\eta} \frac{dx}{y\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{y} \arcsin x \Big|_0^{1-\eta} = \frac{1}{y} \arcsin(1-\eta).$$

Интеграл (13.14) в данном случае равен

$$I(y) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \varphi(\eta, y) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{y} \arcsin(1-\eta) = \frac{\pi}{2y}.$$

Установим равномерность или неравномерность сходимости при  $\eta \rightarrow 0$  функции (интеграла)  $\varphi(\eta, y) = \frac{1}{y} \arcsin(1-\eta)$  к функции (интегралу)  $I(y) = \frac{\pi}{2y}$  относительно  $y$  на различных областях  $Y$ .

Рассмотрим сначала область  $Y_1$ :  $y_0 \leq y < +\infty$ , где  $y_0 > 0$ . В этом случае для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое не зависящее от  $y$  число  $\delta > 0$ , а именно то, для которого  $\left| \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\delta) \right| < \varepsilon y_0$ , что, лишь только  $\eta \leq \delta$ , неравенство

$$\left| \int_0^1 f(x, y) dx - \int_0^{1-\eta} f(x, y) dx \right| = |I(y) - \varphi(\eta, y)| = \frac{1}{y} \left| \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\eta) \right| < \varepsilon$$

выполняется для всех значений  $y$  в  $Y_1$ :  $y_0 \leq y < +\infty$ . Здесь учитывается монотонность функции  $\arcsin x$ . Существование такого числа  $\delta > 0$ , для которого выполняется неравенство  $\left| \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\delta) \right| < \varepsilon y_0$ , следует из непрерывности функции  $\arcsin x$ . Отсюда получаем, что интеграл  $I(y)$  сходится равномерно на  $Y_1$ .

Рассмотрим область  $Y_2$ :  $0 < y < +\infty$ . В данном случае для  $\varepsilon = 1$  и для любого, сколь угодно малого, числа  $\eta^* > 0$  существует число  $y^*$ ,  $0 < y^* < \left| \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\eta^*) \right|$ , при котором

$$\left| \int_0^1 f(x, y^*) dx - \int_0^{1-\eta^*} f(x, y^*) dx \right| = |I(y^*) - \varphi(\eta^*, y^*)| = \frac{1}{y^*} \left| \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\eta^*) \right| > \varepsilon = 1. \text{ Делаем вывод, что интеграл } I(y)$$

сходится неравномерно на  $Y_2$ .

Данное определение равномерной сходимости предусматривает случай,

когда интеграл оказывается собственным при всех значениях  $y \in Y$ . Известны примеры таких интегралов, неравномерно сходящихся относительно  $y$ ,  $y \in Y$ , [2], т. II, с. 153–154. Построим аналогичный пример, но геометрическим способом, наглядно показывающим природу такой неравномерности.

**13.45. Собственный интеграл**  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , **неравномерно сходящийся на  $Y$** . Определим функцию  $f(x, y)$  в квадрате  $0 \leq x, y \leq 1$  (рис. 13.3, а). Пусть на границе (на сторонах) квадрата и

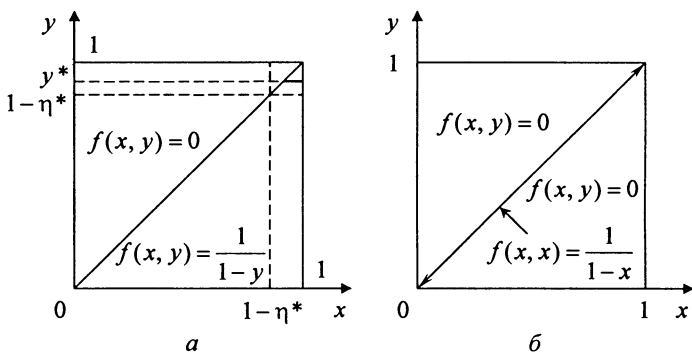


Рис. 13.3

выше его диагонали (т.е. в точках, где  $y > x$ ) функция равна нулю.

Во всех других точках квадрата положим  $f(x, y) = \frac{1}{1-y}$ . Имеем:

при  $y = 0$   $f(x, 0) \equiv 0$ , при  $y = 1$   $f(x, 1) \equiv 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ; при  $0 < y < 1$

$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < y \text{ или } x = 1, \\ 1/(1-y), & \text{если } y \leq x < 1. \end{cases}$  Получаем собственные инте-

гралы  $I(0) = I(1) = 0$ ,  $I(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \frac{1}{1-y} (1-y) = 1$ ,  $0 < y < 1$ ,

так как функция  $f(x, y)$  при  $0 < y = \text{const} < 1$  отлична от нуля, равна постоянной  $\frac{1}{1-y}$ , на полуинтервале длиной  $1-y$ . Сходимость

интеграла  $I(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$  неравномерна на  $0 \leq y \leq 1$ , потому что

для  $\epsilon = 1/2$  и любого, сколь угодно малого, числа  $\eta^* > 0$  найдется

достаточно близкое к единице число  $y^*$ , а именно  $1 - \eta^* < y^* < 1$ , для которого выполняется неравенство

$$\left| \int_0^1 f(x, y^*) dx - \int_0^{1-\eta^*} f(x, y^*) dx \right| = \left| \int_{1-\eta^*}^1 f(x, y^*) dx \right| = 1 > \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Это объясняется тем, что при  $y^*$ ,  $1 - \eta^* < y^* < 1$ , полуинтервал отличных от нуля значений функции  $f(x, y^*)$  целиком лежит внутри отрезка  $[1 - \eta^*, 1]$  (см. рис. 13.3, а).

Для случая интеграла с конечными пределами (собственного и несобственного второго рода) можно переформулировать утверждения, данные выше для случая несобственного интеграла первого рода. Например.

**Достаточный признак равномерной сходимости интеграла.** Если существует функция  $\varphi(x)$ , интегрируемая (в собственном смысле или нет) на отрезке  $[a, b]$ , такая, что для всех  $y \in Y$   $|f(x, y)| \leq \varphi(x)$ , при любом  $x \in [a, b]$ , то интеграл (13.14) сходится равномерно на области  $Y$ .

Далеко не любой сходящийся интеграл (13.14) мажорируется сходящимся интегралом  $\int_a^b \varphi(x) dx$ . Приведем примеры.

**13.46. Сходящийся при любом значении параметра интеграл второго рода, который не мажорируется сходящимся интегралом.** Интеграл из примера 13.44  $\int_0^1 \frac{dx}{y\sqrt{1-x^2}}$ ,  $y$  в области  $Y: 0 < y < +\infty$ . Он сходится при любом значении  $y \in Y$ . В силу неограниченности для любого  $x$ ,  $0 \leq x < 1$ , функции  $f(x, y) = \frac{1}{y\sqrt{1-x^2}}$  по переменной  $y$ ,  $0 < y < +\infty$ , эта функция не имеет мажоранты  $\varphi(x)$ .

В этом примере функция  $f(x, y)$  неограниченна по  $y$ ,  $y \in Y$ , при любом  $x$ . Но и при ограниченной по  $y$  функции  $f(x, y)$  не любой сходящийся интеграл мажорируется сходящимся интегралом. Пример.

**13.47. Собственный интеграл от функции, ограниченной по совокупности переменных, который не мажорируется сходящимся интегралом.** Интеграл из примера 13.45  $I(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Функция  $f(x, y)$  при каждом фиксированном значении

$\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$ , если  $0 < x < 1$ . Видим, что интеграл  $\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$  расходится.

Отметим, что в примерах 13.46 и 13.47 интеграл сходится неравномерно относительно параметра  $y$ . Однако и не всякий интеграл, сходящийся равномерно по  $y$ , мажорируется сходящимся интегралом. Иначе говоря, утверждение, обратное данному, неверно. Приведем простой контрпример.

**13.48. Равномерно сходящийся собственный интеграл, который не мажорируется сходящимся интегралом.** Собственный интеграл  $\int_0^1 f(x, y) dx$ , где функция  $f(x, y)$  определена в квадрате

$0 \leq x, y \leq 1$  (рис. 13.3, б). А именно, в точках диагонали (без ее концов)  $f(x, x) = \frac{1}{1-x}$ ,  $0 < x < 1$ . Во всех других точках квадрата  $f(x, y) = 0$ . При всех значениях  $y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $I(y) \equiv 0$ . Сходимость интеграла относительно  $y$ , очевидно, равномерная. Но мажоранта с минимально возможными значениями:  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$ ,

$0 < x < 1$ . Соответственно, интеграл  $\int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{1-x}$  расходится.

### 13.3. Свойства равномерно сходящихся интегралов

**Теорема о достаточных условиях предельного перехода под знаком интеграла.** Пусть функция  $f(x, y)$ : 1) определена для  $x \geq a$  и для  $y \in Y$ ; 2) непрерывна по  $x$  при любом  $y \in Y$ ; 3) при  $y \rightarrow y_0$  сходится к предельной функции  $\varphi(x)$  равномерно на каждом отрезке  $[a, A]$ . И пусть интеграл

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (13.15)$$

сходится равномерно на  $Y$ . Тогда выполняется

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx. \quad (13.16)$$

Требование непрерывности функции  $f(x, y)$  по  $x$  при любом  $y \in Y$  не является необходимым для выполнения предельного перехода (13.16). В то же время, совсем отбросить в теореме это требование нельзя. Показать это предлагается в упражнении, помещенном в конце раздела.

Предположение о равномерной относительно  $x$  в каждом конечном про-

межутке  $[a, A]$  сходимости функции  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow y_0$  к предельной функции  $\varphi(x)$  не является необходимым для выполнения предельного перехода (13.16). Приведем контрпример.

**13.49. Неравномерно сходящаяся к предельной функции  $\varphi(x)$  функция  $f(x, y)$ , при которой выполняется предельный**

переход  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ . Пусть  $f(x, y) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}}$ ,  $x \geq 1$ ,

$0 < y \leq 1$ ,  $y_0 = 0$ . Эта функция при  $y \rightarrow 0$  сходится к предельной

функции  $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 1, \\ 0, & \text{если } x > 1. \end{cases}$  Эта сходимость неравномерна отно-

сительно  $x$  на каждом конечном отрезке  $[1, A]$ ,  $A > 1$ , так как для

$\varepsilon = \frac{1}{2}$  и любого, сколь угодно малого числа  $\delta > 0$ , для всякого числа

$y^*$ ,  $0 < y^* < \delta$ , найдется такое число  $x$ ,  $x > 1$ , достаточно близкое к единице, что будет выполняться неравенство

$$|f(x, y^*) - \varphi(x)| = |f(x, y^*)| = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y^*}} > \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

Это следует из того факта, что  $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y^*}} = 1$ . Остальные предполо-

жения выполняются: функция  $f(x, y)$  непрерывна по  $x$ , интеграл

$$I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{y}} dx = \int_1^{+\infty} x^{-\frac{2}{y}} dx = \frac{y}{y-2} x^{1-\frac{2}{y}} \Big|_1^{+\infty} = \frac{y}{2-y}$$

сходится равномерно относительно  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ . Покажем послед-

нее. Действительно,  $\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| = \frac{y}{2-y} A^{1-\frac{2}{y}} \rightarrow 0$  при  $A \rightarrow +\infty$  и

любом  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ . Отметим, что предельный переход (13.16) вы-

полняется  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{2-y} = 0$  и  $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx = 0$ .

Однако предположение о равномерной относительно  $x$  в каждом конечном промежутке  $[a, A]$  сходимости функции  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow y_0$  к предельной функции  $\varphi(x)$  нельзя убрать из утверждения. Приведем контрпример.



любом  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ . Отметим, что предельный переход (13.16) выполняется  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{2-y} = 0$  и  $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx = 0$ .

Однако предположение о равномерной относительно  $x$  в каждом конечном промежутке  $[a, A]$  сходимости функции  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow y_0$  к предельной функции  $\varphi(x)$  нельзя убрать из утверждения. Приведем контрпример.

**13.50. Неравномерно сходящаяся к предельной функции  $\varphi(x)$  функция  $f(x, y)$ , при которой не выполняется предельный переход  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ .** Построим функцию  $z = f(x, y)$  геометрическим способом (рис. 13.4). На рисунке пока-

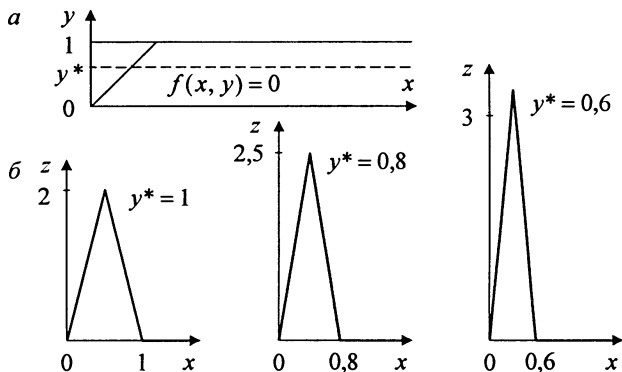


Рис. 13.4

заны:  $a$  – область определения функции  $f(x, y)$ ,  $b$  – сечения графика функции  $f(x, y)$  при  $y = y^* = 1; 0,8; 0,6$ . Пусть  $x \geq 0$ ,  $0 < y \leq 1$  и для каждого значения  $y^* = \text{const}$ ,  $0 < y^* \leq 1$ , график функции  $f(x, y^*)$ ,  $x \geq 0$ , составим из боковых сторон равнобедренного треугольника (его основание – отрезок  $[0, y^*]$  оси  $Ox$ , а площадь равна единице) и неограниченного интервала  $(y^*, +\infty)$  оси  $Ox$ . Примем  $y_0 = 0$ .

Заданная таким способом на множестве  $x \geq 0$ ,  $0 < y \leq 1$ , функция  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow 0$  сходится к предельной функции  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  $x \geq 0$ . Действительно, при  $x = 0$   $f(0, y) \equiv 0$ , при  $x = x^* > 0$  для всех  $y \leq x^*$   $f(x^*, y) = 0$ . Эта сходимость неравномерна относительно  $x$

на каждом конечном отрезке  $[0, A]$ ,  $A > 0$ . На самом деле, для  $\varepsilon = 1$  и любого, сколь угодно малого, числа  $\delta > 0$  для всякого числа  $y^*$ ,  $0 < y^* < \delta$ , найдется такое число  $x$ ,  $x > 0$ , а именно  $x = 0,5y^*$ , что будет выполняться  $|f(x, y^*) - \varphi(x)| = |f(0,5y^*; y^*)| > \varepsilon = 1$ . Действительно, значению  $x = 0,5y^*$  отвечает значение  $f(0,5y^*; y^*)$ , равное высоте треугольника, а она больше единицы (площадь треугольника равна 1, а длина основания равна  $y^*$ , т.е. меньше двух).

Все прочие предположения выполняются: функция  $f(x, y)$  непрерывна по  $x$ , интеграл  $I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx \equiv 1$  и сходится равномерно

относительно  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ , так как  $\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| = 0$  при любом  $A \geq 1$  и любом  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ . Видим, что предельный переход

$$(13.16) \text{ не выполняется } \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx = 1, \text{ а } \int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = 0.$$

Условие равномерной сходимости интеграла  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  относительно  $y$  в области  $Y$  не является необходимым для выполнения предельного перехода (13.16). Контрпример.

**13.51. Функция  $f(x, y)$  такая, что сходится неравномерно на  $Y$  интеграл  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ , но выполняется предельный пе-**

**реход  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ .** Положим

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \sin(\pi xy), & \text{если } 0 \leq x \leq 2/y, \\ 0, & \text{если } x > 2/y, \end{cases} \quad x \geq 0, \quad 0 < y \leq 1, \quad y_0 = 0$$

(рис. 13.5). На рисунке показаны:  $a$  – графики функции  $f(x, y^*)$  при  $y^* = 1; 0,2; 0,1$ ;  $b$  – область определения функции  $f(x, y)$ . При любом фиксированном  $y^*$ ,  $0 < y^* \leq 1$ , график функции  $f(x, y^*)$ ;  $x \geq 0$ , это один полный период функции  $\sin(\pi xy^*)$ , продолженный тожде-

ственным нулем. Отсюда получаем  $I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx \equiv 0$  при лю-

бом  $0 < y \leq 1$ . Интеграл  $I(y)$  сходится неравномерно относительно

$y$ ,  $0 < y \leq 1$ . Действительно, для  $\varepsilon = 1$  и любого, сколь угодно большого, числа  $A_0 > \pi/2$  найдется такое, достаточно близкое к нулю, число  $y^*$ , а именно  $y^* = 1/A_0$ , что на отрезке  $A_0 \leq x \leq 2A_0$  будет целиком размещаться отрицательный полупериод функции  $\sin(\pi xy^*)$ , а значит, будет выполняться

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} f(x, y^*) dx - \int_0^{A_0} f(x, y^*) dx \right| = \left| \int_{A_0}^{+\infty} f(x, y^*) dx \right| = \\ & = \left| \int_{A_0}^{2A_0} \sin\left(\pi x \frac{1}{A_0}\right) dx \right| = \frac{A_0}{\pi} \cos\left(\pi x \frac{1}{A_0}\right) \Big|_{A_0}^{2A_0} = \frac{2A_0}{\pi} > \varepsilon = 1. \end{aligned}$$

Все остальные предположения выполняются. Функция  $f(x, y)$  непрерывна по  $x$ . При  $x = 0$  предельная функция  $\varphi(0) = 0$ , при лю-

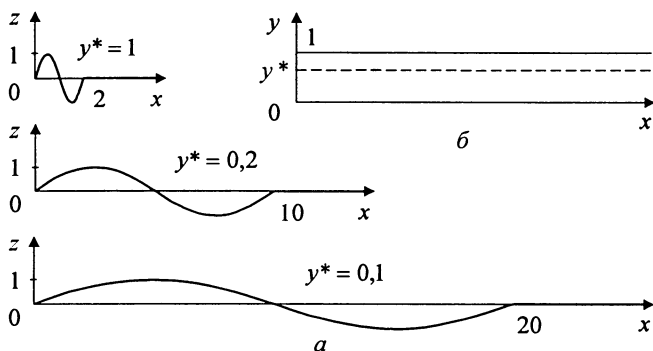


Рис. 13.5

бом  $x > 0$   $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} \sin(\pi xy) = 0$ , так как при достаточно малом  $y$  выполняется  $0 < x \leq 2/y$ , а для таких  $x$  и  $y$   $f(x, y) = \sin(\pi xy)$ . Отсюда получаем  $\varphi(x) \equiv 0$ . Функция  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow 0$  сходится к предельной функции  $\varphi(x)$  равномерно относительно  $x$  на каждом конечном отрезке  $[0, A]$ . Действительно, для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое не зависящее от  $x$  число  $\delta > 0$ , а именно  $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\pi A}$ , что при  $0 < y < \delta$  сразу для всех  $x$ ,  $0 \leq x \leq A$ , выполняется

$$|f(x, y) - \varphi(x)| = |f(x, y)| \leq |\sin(\pi xy)| \leq \pi xy < \varepsilon.$$

Заметим, что при всем этом выполняется предельный переход (13.16), так как  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx = 0$  и  $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = 0$ .

Вместе с этим условие равномерной сходимости интеграла  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  относительно  $y$  в области  $Y$  не может быть исключено из утверждения. Контрпример.

**13.52.** Функция  $f(x, y)$  такая, что сходится неравномерно на  $Y$  интеграл  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  и не выполняется предельный

переход  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ . Примем

$$z = f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1/y \text{ или } x > 1/y + \pi, \\ \sin(x - 1/y), & \text{если } 1/y \leq x \leq 1/y + \pi, \end{cases} \quad x \geq 0, 0 < y \leq 1,$$

$y_0 = 0$  (рис. 13.6). На рисунке показаны:  $a$  – графики функции

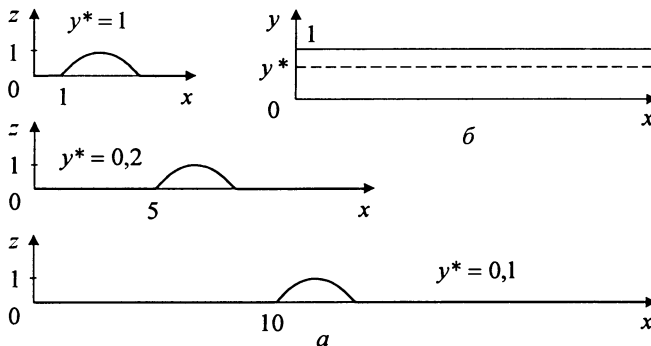


Рис. 13.6

$f(x, y^*)$  при  $y^* = 1; 0,2; 0,1$ ;  $b$  – область определения функции  $f(x, y)$ . При любом фиксированном  $y^*$ ,  $0 < y^* \leq 1$ , график функции  $f(x, y^*)$ ,  $x \geq 0$ , это один полный положительный полупериод функции  $\sin(x - 1/y^*)$ , которому предшествует тождественный нуль и который продолжается тождественным нулем. Следовательно, интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{1/y}^{1/y+\pi} \sin(x - 1/y) dx = -\cos(x - 1/y) \Big|_{1/y}^{1/y+\pi} = 2,$$

$0 < y \leq 1$ . Заметим, что интеграл  $I(y)$  сходится неравномерно относительно  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ . Действительно, для  $\varepsilon = 1$  и любого, сколь угодно большого, числа  $A_0 > 0$  найдется такое, достаточно близкое

к нулю, число  $y^*$ , а именно  $y^* = \frac{1}{A_0}$ , что на отрезке  $A_0 \leq x \leq A_0 + \pi$

будет целиком размещаться положительный полупериод функции  $\sin(x - 1/y^*)$ , а значит, будет выполняться

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} f(x, y^*) dx - \int_0^{A_0} f(x, y^*) dx \right| &= \left| \int_{A_0}^{+\infty} f(x, y^*) dx \right| = \\ &= \left| \int_{A_0}^{A_0+\pi} \sin(x - A_0) dx \right| = -\cos(x - A_0) \Big|_{A_0}^{A_0+\pi} = 2 > \varepsilon = 1. \end{aligned}$$

Все остальные предположения выполняются. Функция  $f(x, y)$  непрерывна по  $x$ . При  $x = 0$  предельная функция  $\varphi(0) = 0$  при любом  $x > 0$   $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 0$ , так как при достаточно малом  $y$  выполняется  $0 < x < 1/y$ . Отсюда имеем  $\varphi(x) \equiv 0$ . Функция  $f(x, y)$  при  $y \rightarrow 0$  сходится к предельной функции  $\varphi(x)$  равномерно относительно  $x$  на каждом конечном отрезке  $[0, A]$ . Действительно, для любого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое не зависящее от  $x$  число  $\delta > 0$ , а именно  $0 < \delta < 1/A$ , что при  $0 < y < \delta$  выполняется  $f(x, y) = 0$  и  $|f(x, y) - \varphi(x)| = 0 < \varepsilon$  сразу для всех  $x$ ,  $0 \leq x \leq A$ .

Видим, что при этом предельный переход (13.16) не выполняется  $\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx = 2$ , а  $\int_0^{+\infty} \varphi(x) dx = 0$ .

**Теорема о непрерывности интеграла по параметру.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна для значений  $x \geq a$  и  $y$  на отрезке  $[c, d]$ . Если интеграл (13.15) сходится равномерно на отрезке  $[c, d]$ , то он является непрерывной функцией от параметра  $y$  на этом отрезке.

Непрерывность функции  $f(x, y)$  не является необходимым условием непрерывности интеграла (13.15) по параметру  $y$ . Приведем контрпримеры.

**13.53, 13.54. Разрывные функции  $f(x, y)$  такие, что инте-**

грал  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  сходится равномерно и непрерывен на

отрезке. Пусть функция  $f(x, y) = \frac{y}{[x]^2}$ ,  $x \geq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , где  $[x]$  –

целая часть числа  $x$ . Эта функция имеет разрывы (как функция двух переменных) вдоль прямых  $x = 2, 3, \dots$  в плоскости  $Oxy$ , что не яв-

ляется препятствием для существования интеграла  $\int_1^A \frac{y}{[x]^2} dx$  при

любом  $A \geq 1$ . Для начала заметим, что интеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{[x]^2}$  сходится,

что вытекает из сходимости числового ряда  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ . Отсюда

непосредственно следует, [2], т. II, с. 115, и сходимость интеграла

$I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{y}{[x]^2} dx = y \int_1^{+\infty} \frac{dx}{[x]^2} = \frac{\pi^2}{6} y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . В результате получа-

ем непрерывную функцию  $I(y) = \frac{\pi^2}{6} y$  параметра  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . На-

конец покажем, что интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y}{[x]^2} dx$  схо-

дится равномерно относительно  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Действительно, он

мажорируется сходящимся интегралом  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{[x]^2}$ .

Приведем более радикальный контрпример. Даже если рассмотреть разрывную всюду плотно на плоскости  $Oxy$  функцию  $f(x, y) = R(xy)$ ,  $x \geq 1$ ,  $1 \leq y \leq 2$ , где  $R(t)$  – функция Римана, то по-

лучим интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = \int_1^{+\infty} R(xy) dx \equiv 0$ , который схо-

дится равномерно относительно  $y$ ,  $1 \leq y \leq 2$ , и представляет собою непрерывную функцию от параметра  $y$  на отрезке  $[1, 2]$ .

Однако совсем убрать из теоремы условие непрерывности функции  $f(x, y)$  мы не можем. Контрпример.

**13.55. Разрывная функция  $f(x, y)$  такая, что интеграл**

$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  сходится равномерно, но имеет разрыв на от-

резке. Пусть функция  $f(x, y) = \frac{\operatorname{sgn} y}{x^2}$ ,  $x \geq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Эта функция имеет разрывы (как функция двух переменных) вдоль прямой  $y = 0$  в плоскости  $Oxy$ . Интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn} y}{x^2} dx$  сходится равномерно относительно  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , так как он мажорируется сходящимся интегралом  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ .

Из сходимости несобственного интеграла  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  также следует, что  $I(y) = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn} y}{x^2} dx = \operatorname{sgn} y \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ . Видим, что функция  $I(y)$  имеет разрыв в точке  $y = 0$ .

Равномерная относительно  $y$  сходимость интеграла (13.15) на отрезке  $[c, d]$  не является необходимым условием его непрерывности по параметру  $y$ . Контрпример.

**13.56.** Функция  $f(x, y)$  такая, что сходится неравномерно (но непрерывен) на отрезке интеграл  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ . Ис-

пользуем функцию из контрпримера 13.51. Доопределим ее при  $y = 0$ ,  $x \geq 0$ , значениями  $f(x, 0) \equiv 0$ . Такое доопределение обеспечивает непрерывность функции  $f(x, y)$  на всем множестве  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Непрерывность доопределенной функции очевидна из геометрического построения и анализа ее графика. Оставляем, однако, за читателями аналитическое доказательство этого факта.

Выше в контрпримере 13.51 было показано, что интеграл  $I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx \equiv 0$ ,  $0 < y \leq 1$ , и что этот интеграл сходится неравномерно относительно  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ . С учетом того, что при  $x \geq 0$   $f(x, 0) \equiv 0$ , соответственно  $I(0) = \int_0^{+\infty} f(x, 0) dx = 0$ , доопределение

функции не нарушает этих свойств интеграла  $I(y)$ . Видим, что  $I(y) \equiv 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , т.е. интеграл – непрерывная функция от параметра  $y$  на отрезке  $[0, 1]$ . При этом интеграл сходится неравномерно относительно  $y$ ,  $0 \leq y \leq 1$ .

Однако предположение о равномерной относительно  $y$  сходимости интеграла (13.15) на отрезке  $[c, d]$  нельзя удалить из теоремы. Контрпример.

**13.57. Функция  $f(x, y)$  такая, что сходится неравномерно и разрывен на отрезке интеграл  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ .** Используем функцию  $f(x, y)$  из контрпримера 13.52, определенную на множестве  $x \geq 0$ ,  $0 < y \leq 1$ . С ее помощью построим новую функцию

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{если } x \geq 0, 0 < y \leq 1, \\ -f(x, -y), & \text{если } x \geq 0, -1 \leq y < 0, \end{cases} \quad \tilde{f}(x, 0) \equiv 0, \quad x \geq 0,$$

определенную уже на множестве  $x \geq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Иными словами, мы для каждого значения  $x$ ,  $x \geq 0$ , продолжаем функцию  $f(x, y)$  до нечетной на отрезке  $-1 \leq y \leq 1$  функции. Отметим, что полученная функция  $\tilde{f}(x, y)$  будет непрерывна на множестве своего определения, это очевидно из геометрического построения ее графика. Однако читатели могут аналитически доказать этот факт.

Выше, в контрпримере 13.52, было установлено, что интеграл  $I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx \equiv 2$ ,  $0 < y \leq 1$ , и что этот интеграл сходится неравномерно относительно  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ . Отсюда и из самого построения функции  $\tilde{f}(x, y)$  как нечетной по переменной  $y$  следует, что  $\tilde{I}(y) = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(x, y) dx = 2 \operatorname{sgn} y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , и что  $\tilde{I}(y)$  сходится неравномерно относительно  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Видим, что интеграл  $\tilde{I}(y)$  не является непрерывной функцией от  $y$  на отрезке  $[-1, 1]$ .

**Аналог теоремы Дини.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена для значений  $x \geq a$  и  $y$  на отрезке  $[c, d]$ . Если функция  $f(x, y)$  непрерывна и неотрицательна, то из непрерывности интеграла (13.15) как функции от параметра  $y \in [c, d]$  вытекает равномерная его сходимость на  $[c, d]$ .



**13.58, 13.59, 13.60.** Контрпримеры к утверждениям, альтернативным аналогу теоремы Дини о равномерной сходимости интеграла. Пусть в утверждении функция  $f(x, y)$  определена в полосе  $x \geq a$ ,  $y \in (c, \delta]$ . Покажем, что такое измененное утверждение ложно. Искомый контрпример дает функция  $f(x, y)$  из контрпримера 13.52. Эта функция определена на множестве  $x \geq 0$ ,  $0 < y \leq 1$ , и неотрицательна. Она непрерывна на этом множестве по совокупно-

сти переменных. Интеграл  $I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx \equiv 2$ , т.е. является непрерывной функцией  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ . Но интеграл  $I(y)$  сходится неравномерно относительно  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ .

Путем доопределения функции из контрпримера 13.52 построим контрпример, показывающий, что в утверждении нельзя отбрасывать предположение о непрерывности функции  $f(x, y)$ . Доопределим функцию  $f(x, y)$  из контрпримера 13.52 на множестве  $x \geq 0$ ,  $y = 0$ ,  $f(x, 0) = 2e^{-x}$ . Очевидно, такое доопределение приводит к функции (оставим за ней обозначение  $f(x, y)$ ), определенной на множестве  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , и разрывной в точках  $x \geq 0$ ,  $y = 0$ . При этом функция  $f(x, y)$  остается неотрицательной, и, кроме того, так

как имеем  $I(0) = \int_0^{+\infty} f(x, 0) dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 2(-e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = 2$ , то инте-

грал  $I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx \equiv 2$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , остается непрерывным. Заме-

тим, что при расширении множества  $Y$  с  $0 < y \leq 1$  до  $0 \leq y \leq 1$  неравномерность сходимости интеграла  $I(y)$  на  $Y$  сохраняется.

Путем другого доопределения функции из контрпримера 13.52 построим контрпример, показывающий, что в утверждении нельзя отбрасывать предположение о непрерывности интеграла (13.15). Доопределим функцию  $f(x, y)$  из контрпримера 13.52 на множестве  $x \geq 0$ ,  $y = 0$ ,  $f(x, 0) \equiv 0$ . Очевидно, такое доопределение обеспечивает непрерывность доопределенной функции (оставим за ней обозначение  $f(x, y)$ ) на множестве  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . При этом функция  $f(x, y)$  остается неотрицательной. Но, так как имеем

$I(0) = \int_0^{+\infty} f(x, 0) dx = 0$ , то интеграл  $I(y)$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , уже становится

разрывным:  $I(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y = 0, \\ 2, & \text{если } 0 < y \leq 1. \end{cases}$  Как и в предыдущем контр-

примере, при расширении множества  $Y$  с  $0 < y \leq 1$  до  $0 \leq y \leq 1$  неравномерность сходимости интеграла  $I(y)$  на  $Y$  сохраняется.

Целесообразно интерпретировать некоторые контрпримеры, относящиеся к предыдущему утверждению, применительно к утверждению данному.

**13.61. Интерпретация двух ранее данных контрпримеров для случая аналога теоремы Дини.** Отметим следующее:

в контрпримере 13.54 – функция  $f(x, y)$  разрывная и неотрицательная, интеграл непрерывный и сходится равномерно;

в контрпримере 13.56 – функция  $f(x, y)$  непрерывная и знакопеременная, интеграл непрерывный и сходится неравномерно.

Контрпример 13.54 показывает, что предположение о непрерывности функции  $f(x, y)$  не является необходимым для равномерной сходимости интеграла.

Контрпример 13.56 показывает, что в утверждении нельзя отбрасывать предположение о неотрицательности функции  $f(x, y)$ .

Заметим, что предположение о неотрицательности функции не является необходимым для равномерной сходимости интеграла. Составление контрпримера вынесем в упражнения к разделу.

**Теорема 1 об интегрировании интеграла по параметру.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна для значений  $x \geq a$  и  $y$  на отрезке  $[c, d]$ . Если интеграл (13.15) сходится равномерно на отрезке  $[c, d]$ , то выполняется:

$$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (13.17)$$

Требование непрерывности функции  $f(x, y)$  не является необходимым для выполнения равенства (13.17). Однако его нельзя удалить из теоремы.

**13.62, 13.63. Разрывные функции  $f(x, y)$ , при которых равенство**

**$\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy$  выполняется (не выполняется).** Пусть  $f(x, y) = \operatorname{sgn}(y)e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ .

Эта функция имеет разрывы в точках  $y = 0$ ,  $x \geq 0$ . Интеграл

$$I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} \operatorname{sgn}(y)e^{-x} dx = \operatorname{sgn} y \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \operatorname{sgn} y \quad \text{сходится}$$

ся, так как сходится интеграл  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ . Сходимость интеграла  $I(y)$  равномерна относительно  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , так как он мажорируется сходящимся интегралом  $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ . Проверим выполнение равенства (13.17). Получим

$$\int_{-1}^1 I(y) dy = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} y dy = 0, \quad \int_{-1}^1 dy \int_0^{+\infty} f(x, y) dx = \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} y dy = 0,$$

$$\int_0^{+\infty} dx \int_{-1}^1 f(x, y) dy = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} y dy = 0. \quad \text{Равенство выполняется,}$$

несмотря на разрывность функции  $f(x, y)$ .

Пусть  $f(x, y) = D(xy)$ ,  $x \geq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $D(t)$  – функция Дирихле. Функция  $f(x, y)$  всюду разрывна в области своего определения и все интегралы в формуле (13.17) не существуют.

Требование равномерной сходимости интеграла (13.15) относительно  $y$  на отрезке  $[c, d]$  не является необходимым для выполнения равенства (13.17). Контрпример.

**13.64.** Функция  $f(x, y)$  такая, что неравномерно сходится на отрезке  $[c, d]$  интеграл  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ , но выполняется ра-

венство  $\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy$ . Рассмотрим

функцию  $\tilde{f}(x, y)$ , построенную в контрпримере 13.57, определенную на множестве  $x \geq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Она непрерывна как функция двух переменных. В контрпримере 13.57 было установлено, что интеграл  $\tilde{I}(y) = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(x, y) dx = 2 \operatorname{sgn} y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , и что он сходится

неравномерно относительно  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Напомним, что функция  $\tilde{f}(x, y)$  нечетная по аргументу  $y$ :  $\tilde{f}(x, -y) = -\tilde{f}(x, y)$ . Проверим выполнение равенства (13.17). Получим

$$\int_{-1}^1 \tilde{I}(y) dy = 2 \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} y dy = 0, \quad \int_{-1}^1 dy \int_0^{+\infty} \tilde{f}(x, y) dx = 2 \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} y dy = 0,$$

$\int_0^{+\infty} dx \int_{-1}^1 \tilde{f}(x, y) dy = 0$ , так как  $\int_{-1}^1 \tilde{f}(x, y) dy \equiv 0$  в силу нечетности функции  $\tilde{f}(x, y)$  по аргументу  $y$ . Равенство (13.17) выполняется, несмотря на неравномерную сходимость интеграла  $\int_0^{+\infty} \tilde{f}(x, y) dx$  относительно  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ .

В то же время требование равномерной сходимости интеграла (13.15) относительно  $y$  в промежутке  $[c, d]$  мы не можем удалить из теоремы.

**13.65. Функция  $f(x, y)$  такая, что неравномерно сходится на отрезке  $[c, d]$  интеграл  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  и не выполняется ра-**

**венство  $\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy$ .** Модифицируем предыдущий контрпример, который использует функцию  $\tilde{f}(x, y)$ , построенную в контрпримере 13.57 путем продолжения функции  $f(x, y)$ , определенной в контрпримере 13.52. Для этого несколько изменим эту функцию, приняв

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1/y \text{ или } x > 1/y + \pi, \\ x \sin(x - 1/y), & \text{если } 1/y \leq x \leq 1/y + \pi, \end{cases} \quad x \geq 0, 0 < y \leq 1.$$

Добавление множителя  $x$  к величине  $\sin(x - 1/y)$  не нарушает сходимости интеграла  $I(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx$ ,  $0 < y \leq 1$ , но делает функцию

$I(y)$  неограниченной в окрестности точки  $y = 0$ . Очевидно, что сохраняются неравномерность сходимости интеграла относительно  $y$ ,  $0 < y \leq 1$ , и непрерывность функции  $f(x, y)$ .

Выполняем далее построение функции  $\tilde{f}(x, y)$  нечетным по переменной  $y$  продолжением, описанным в контрпримере 13.57, функции  $f(x, y)$  на множество  $x \geq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Получаем непрерывную на множестве  $x \geq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , функцию  $\tilde{f}(x, y)$ . Интеграл  $\tilde{I}(y) = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(x, y) dx$  сходится неравномерно на  $[-1, 1]$ . Заметим, что в данном случае равенство (13.17) уже не соблюдается. Для любого

$x \geq 0$  существует интеграл  $\int_{-1}^1 \tilde{f}(x, y) dy = 0$  в силу нечетности функции  $\tilde{f}(x, y)$  по переменной  $y$ . Отсюда существует несобственный интеграл  $\int_0^{+\infty} dx \int_{-1}^1 \tilde{f}(x, y) dy = 0$ . Но интеграл  $\tilde{T}(y) = \int_0^{+\infty} \tilde{f}(x, y) dx$  неограничен в окрестности точки  $y = 0$ , соответственно интеграл  $\int_{-1}^1 dy \int_0^{+\infty} \tilde{f}(x, y) dx$  не существует.

**Теорема 2 об интегрировании интеграла по параметру.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена, непрерывна и неотрицательна для  $x \geq a$  и  $y \geq c$ , а интегралы:  $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  – непрерывная функция от  $y$ ,  $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  – непрерывная функция от  $x$ . Если при этом существует один из двух повторных интегралов  $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ ,  $\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ , то существует и другой, и они равны:

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy. \quad (13.18)$$

Предположение о непрерывности функции  $f(x, y)$  не является необходимым для выполнения равенства (13.18). Однако, если исключить из теоремы требование о непрерывности функции  $f(x, y)$ , не заменив его более тонким предположением, то полученное утверждение будет ложным.

**13.66, 13.67. Разрывные функции  $f(x, y)$ , при которых равенство  $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  выполняется (не выполняется).** Пусть  $f(x, y)$  – произвольная функция, для которой выполняются все предположения теоремы, следовательно, выполняется и равенство (13.18). Переопределим функцию  $f(x, y)$  во всех точках  $(x = n, y = m)$  с целыми координатами  $n$  и  $m$  (назовем такие точки целыми), а именно, если  $f(n, m) = 0$ , то положим  $f(n, m) = 1$ , если  $f(n, m) \neq 0$ , то положим  $f(n, m) = 0$ . Переопределенная функция (оставим за ней обозначение  $f(x, y)$ ) будет иметь разрывы во всех целых точках. Как известно, такое переопределение не повлияет на существование и величину интегралов, фигурирующих в теореме, и на выполнение равенства (13.18).

Пусть  $f(x, y) = D(xy)$ ,  $x \geq 1$ ,  $y \geq 1$ , где  $D(t)$  – функция Дирихле. Функция  $f(x, y)$  неотрицательная, но всюду разрывная. Интегралы, фигурирующие в теореме, не будут существовать, а равенство (13.18) не будет иметь смысла.

Интересно, что если принять  $f(x, y) = R(xy)$ ,  $x \geq 1$ ,  $y \geq 1$ , то получим: функция  $f(x, y)$  неотрицательная, но имеет разрывы при рациональных значениях  $xy$ ; оба интеграла  $\int_1^{+\infty} f(x, y) dx \equiv 0$  и

$\int_1^{+\infty} f(x, y) dy \equiv 0$  являются непрерывными функциями, первый – от  $y$ , а второй – от  $x$ ; существуют оба повторных интеграла  $\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = 0$  и  $\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} f(x, y) dy = 0$ , имеет место (13.18).

Предположение теоремы о неотрицательности функции  $f(x, y)$  не является необходимым для выполнения равенства (13.18). Но и отбросить совсем предположение теоремы о неотрицательности функции  $f(x, y)$  нельзя.

**13.68, 13.69. Знакопеременные функции  $f(x, y)$ , при которых равенство  $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  выполняется**

**(не выполняется).** Положим  $f(x, y) = e^{-x-y} \sin x$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Функция  $f(x, y)$  знакопеременна и всюду непрерывна в своей области определения. Оба интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x, y) dx &= e^{-y} \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = -\frac{1}{2} e^{-y} (e^{-x} (\sin x + \cos x)) \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} e^{-y}, \\ \int_0^{+\infty} f(x, y) dy &= e^{-x} \sin x \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = -e^{-x} \sin x (e^{-y}) \Big|_0^{+\infty} = e^{-x} \sin x \end{aligned}$$

непрерывные функции, первый – от  $y$ , а второй – от  $x$ . Существуют и равны оба повторных интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(x, y) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{1}{2}, \\ \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(x, y) dy &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Видим, что равенство (13.18) выполняется.

Пусть  $z = f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < y \text{ или } x > y + 2\pi, \\ \sin(x - y), & \text{если } y \leq x \leq y + 2\pi, \end{cases} \quad x \geq 0, y \geq 0$

(рис. 13.7, а). Функция  $f(x, y)$  всюду непрерывна и знакопеременна в своей области определения. При любом фиксированном  $y^*$ ,  $y^* \geq 0$ , график функции  $f(x, y^*)$ ,  $x \geq 0$ , это один полный период функции  $\sin(x - y)$ , которому предшествует тождественный нуль и

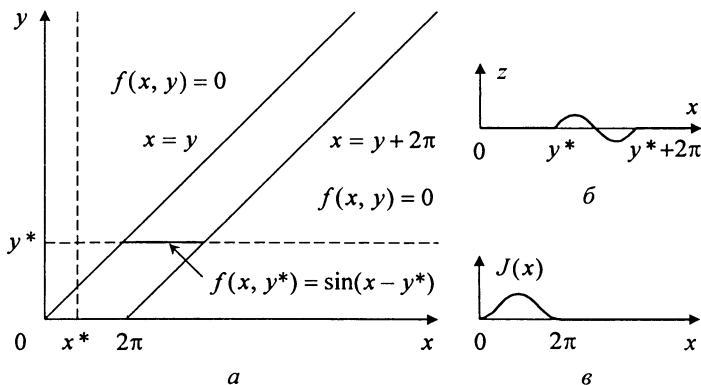


Рис. 13.7

который продолжается тождественным нулем (рис. 13.7, б). Следова-

тельно, интеграл  $I(y^*) = \int_0^{+\infty} f(x, y^*) dx = \int_{y^*}^{y^*+2\pi} \sin(x - y^*) dx = 0$  для

любого  $y^* \geq 0$ . Имеем  $I(y) \equiv 0$  и  $\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(x, y) dx = \int_0^{+\infty} I(y) dy = 0$ .

В то же время при фиксированном  $x^*$ ,  $x^* = 0$ ,  $f(0, y) \equiv 0$ , соответственно,  $J(0) = \int_0^{+\infty} f(0, y) dy = 0$ ; при любом фиксированном  $x^*$ ,  $0 < x^* < 2\pi$ , получаем

$$J(x^*) = \int_0^{+\infty} f(y, x^*) dy = \int_0^{x^*} \sin(x^* - y) dy = \cos(x^* - y) \Big|_0^{x^*} = 1 - \cos x^*;$$

при фиксированном  $x^*$ ,  $x^* \geq 2\pi$ ,  $J(x^*) \equiv 0$ . График функции  $J(x)$ ,  $x \geq 0$ , показан на рис. 13.7, в. Заметим, что при всех значениях  $x$ ,

$0 < x < 2\pi$ , интеграл  $J(x) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dy = 1 - \cos x > 0$ , а при всех

прочих значениях  $x$   $J(x) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dy = 0$ . Отсюда получаем

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(x, y) dy = \int_0^{+\infty} J(x) dx > 0. \text{ Видим, что имеет место неравен-}$$

ство  $\int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} f(x, y) dx < \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} f(x, y) dy$ , (13.18) не выполняется.

**Теорема о дифференцировании интеграла по параметру.** Предположим: 1) функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна по  $x$  для  $x \geq a$  и  $y$  на отрезке  $[c, d]$ ; 2) существует для указанных значений и непрерывна (по обоим переменным) производная  $f'_y(x, y)$ ; 3) интеграл (13.15) сходится для всех  $y \in [c, d]$ ; 4) интеграл  $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$  существует и сходится равномерно на  $[c, d]$ . Тогда при любом  $y \in [c, d]$  выполняется:

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx. \quad (13.19)$$

Требование непрерывности функции  $f(x, y)$  по  $x$  не является необходимым для выполнения формулы (13.19). Но изъять из теоремы требование непрерывности функции  $f(x, y)$  по  $x$  нельзя. Приведем контрпримеры.

**13.70, 13.71. Разрывные по  $x$  функции  $f(x, y)$ , при которых выполняется (не выполняется):**  $I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ . Положим

$$f(x, y) = \frac{1}{[x]^2}, \quad x \geq 1, \quad -1 \leq y \leq 1, \text{ где } [x] - \text{целая часть числа. Эта}$$

функция при любом фиксированном  $x$  непрерывна по  $y$ , но при любом фиксированном  $y$  имеет разрывы (как функция  $x$ ) в точках  $x = 2, 3, \dots$ . Она имеет для  $x \geq 1, -1 \leq y \leq 1$  непрерывную по обоим переменным производную  $f'_y(x, y) \equiv 0$ . Интеграл

$$I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{[x]^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(см. контрпример 13.53) сходится для всех  $y, -1 \leq y \leq 1$ , а интеграл

$$\int_1^{+\infty} f'_y(x, y) dx = 0 \text{ сходится равномерно относительно } y \text{ на том же}$$



отрезке, так как  $f'_y(x, y) \equiv 0$ . Заметим, что  $I'(y) = 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Видим, что при любом  $-1 \leq y \leq 1$  выполняется  $I'(y) = \int_1^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ .

Пусть  $f(x, y) = D(x)$ ,  $x \geq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Функция  $f(x, y)$  при любом фиксированном  $x$  непрерывна по  $y$ , но при любом фиксированном  $y$  всюду разрывна по  $x$ . Она имеет для  $x \geq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$  непрерывную по обоим переменным производную  $f'_y(x, y) \equiv 0$ . Но интеграл  $I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = \int_1^{+\infty} D(x) dx$  не существует, и формула (13.19) не имеет смысла.

Условие непрерывности по обоим переменным производной  $f'_y(x, y)$  не является необходимым для выполнения формулы (13.19), однако убрать его из теоремы мы не можем. Контрпримеры.

**13.72, 13.73. Функции  $f(x, y)$ , при которых  $f'_y(x, y)$  разрывна и выполняется (не выполняется):  $I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ .**

Рассмотрим функцию из контрпримера 13.53  $f(x, y) = \frac{y}{[x]^2}$ ,  $x \geq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ . Эта функция при любом  $x$  непрерывна по  $y$ , но при любом  $y$  имеет разрывы по  $x$ ,  $x = 2, 3, \dots$

Производная  $f'_y(x, y) = \frac{1}{[x]^2}$  имеет разрывы при  $x = 2, 3, \dots$ . Заметим, что здесь пришлось допустить разрывность  $f(x, y)$  по  $x$ , только чтобы получить разрывность производной  $f'_y(x, y)$ . Интеграл

$$I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{y}{[x]^2} dx = y \int_1^{+\infty} \frac{dx}{[x]^2} = \frac{\pi^2}{6} y$$

сходится при любом  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , см. контрпример 13.53. При этом

интеграл  $\int_1^{+\infty} f'_y(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{[x]^2} = \frac{\pi^2}{6}$  сходится равномерно относи-

тельно  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Видим, что  $I'(y) = \pi^2/6$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , и формула

(13.19) выполняется:  $I'(y) = \int_1^{+\infty} f'_y(x, y) dx$  для всех  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ .

Пусть  $f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{y}}{x^2}$ ,  $x \geq 1$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Эта функция непрерывна всюду в области своего определения. Однако ее производная  $f'_y(x, y) = \frac{1}{3x^2 \sqrt[3]{y^2}}$ ,  $y \neq 0$ ,  $f'_y(x, y) = +\infty$  при  $y = 0$ ,  $x \geq 1$ , имеет разрыв второго рода и неограниченна. Интеграл

$$I(y) = \int_1^{+\infty} f(x, y) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{y}}{x^2} dx = \sqrt[3]{y} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \sqrt[3]{y}$$

сходится при любом  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ . Интеграл

$$\int_1^{+\infty} f'_y(x, y) dx = \frac{1}{3 \sqrt[3]{y^2}} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{y^2}}, \quad y \neq 0,$$

сходится неравномерно относительно  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , а при  $y = 0$  он не существует. Заметим, что  $I'(y) = \frac{1}{3 \sqrt[3]{y^2}}$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ,  $y \neq 0$ , и формула (13.19) выполняется для всех  $y$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ , но кроме  $y = 0$ .

Теоремы, приведенные выше для случая интеграла с бесконечным пределом, можно переформулировать для случая интеграла с конечными пределами. Построение примеров и контрпримеров в этом случае выполняется аналогично, с использованием тех же идей и приемов.

### Упражнения

**13.1.** Подтвердить, что функция из примера 13.1 сходится к своей предельной функции неравномерно на  $X = [0, \pi/2)$ , применяя критерий равномерной сходимости к предельной функции.

**13.2.** Построить пример функции  $f(x, y)$ , которая удовлетворяет всем предположениям обобщения теоремы Дини, кроме условия непрерывности функции  $f(x, y)$  по  $x$  на отрезке  $X$  при любом  $y \in Y$ , однако сходится к своей предельной функции равномерно на  $X$ .

**13.3.** В контрпримере 13.12 неравномерность сходимости  $f(x, y)$  к предельной функции  $\varphi(x)$  показана с использованием достаточного условия непрерывности предельной функции. Покажите это же самое, непосредственно используя определение равномерной сходимости к предельной функции.

**13.4.** Условие непрерывности при любом  $y \in Y$  функции  $f(x, y)$  по  $x$ , упомянутое в теореме о предельном переходе под знаком интеграла, не является необходимым для выполнения равенства (13.6). Но и убрать из теоремы это условие нельзя, так как полученное утверждение будет некорректным. Постройте соответствующие контрпримеры.

**13.5.** Сформулируем утверждение, обратное к теореме о достаточных условиях непрерывности интеграла как функции от параметра: если функция  $f(x, y)$  определена на прямоугольнике  $[a, b; c, d]$  и для любого  $y \in [c, d]$  существует интеграл  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ , и он – непрерывная функция от параметра  $y$  на отрезке  $[c, d]$ , то непрерывна на прямоугольнике  $[a, b; c, d]$  и функция  $f(x, y)$ . Опровергнуть это утверждение контрпримером.

**13.6.** Условие существования и непрерывности в прямоугольнике частной производной  $f'_y(x, y)$ , упомянутое в теореме о достаточных условиях выполнения дифференцирования под знаком интеграла, не является необходимым для выполнения формулы (13.7). В то же время удаление из теоремы этого условия невозможно, так как получаемое при этом утверждение ложно. Построить соответствующие контрпримеры.

**13.7.** Попытаемся усилить критерий равномерной сходимости интеграла, заменив произвольный выбор числа  $A'$ ,  $A' > A > A_0$ , на выбор  $A' = A + C$ , где  $C > 0$  – произвольное, сколь угодно большое, но фиксированное число. Построить контрпример, опровергающий полученное утверждение.

**13.8.** В теореме о достаточных условиях предельного перехода под знаком интеграла предположение непрерывности функции  $f(x, y)$  по  $x$  при любом  $y \in Y$  не является необходимым для выполнения предельного перехода (13.16). Однако удалить из теоремы это предположение нельзя. Построить контрпримеры.

**13.9.** Предположение о неотрицательности функции  $f(x, y)$  в аналоге теоремы Дини не является необходимым для равномерной сходимости интеграла. Предложить контрпример.

**13.10.** Построить пример функции  $f(x, y)$ , удовлетворяющей всем предположениям теоремы о дифференцировании интеграла по параметру, кроме того, что интеграл (13.15) расходится в одной точке отрезка  $[c, d]$ , а интеграл

$\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$  сходится неравномерно относительно  $y$  на том же отрезке; однако формула (13.19) выполняется на всем отрезке  $[c, d]$ , исключая лишь упомянутую точку.

## РАЗДЕЛ 14

# КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### 14.1. Криволинейные интегралы первого рода

**Определение криволинейного интеграла первого рода.** Рассмотрим функцию  $f(M) = f(x, y)$ , определенную на плоской спрямляемой кривой  $(K)$  (рис. 14.1). Кривая  $(K)$  задана параметрическими уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in [t_0, T]$ , где функции  $\varphi$  и  $\psi$  непрерывны вместе со своими производными  $\varphi'$  и  $\psi'$  и на кривой нет особых точек, т.е. для любого  $t \in [t_0, T]$  вектор  $(\varphi'(t), \psi'(t))$  не равен нулю. Граничным точкам  $A$  и  $B$  кривой отвечают концы отрезка:  $A(\varphi(t_0), \psi(t_0))$  и  $B(\varphi(T), \psi(T))$ . Пусть  $V$  есть размеченное разбиение отрезка  $[t_0, T]$ :  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ ,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , где  $n \geq 1$  (см. подразд. 8.2). Точкам  $t_i$  отрезка  $[t_0, T]$  отвечают точки  $A_i$  кривой,  $i = \overline{0, n}$ ,  $A = A_0$ ,  $B = A_n$ . Точкам  $\xi_i$  отрезка  $[t_0, T]$  отвечают точки  $M_i$  кривой,  $i = \overline{1, n}$ . При этом кривая  $(K)$  разбивается на дуги  $A_{i-1}A_i$  (их называют дугами разбиения) с длинами  $\sigma_i$ ,  $\sigma_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Конечный предел (если он существует) при  $\lambda_V \rightarrow 0$ , где  $\lambda_V$  – диаметр разбиения  $V$ , интегральных сумм  $\sum_{i=1}^n f(M_i) \sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i), \psi(\xi_i)) \sigma_i$ , называется криволинейным интегралом первого рода от функции  $f(M) = f(x, y)$ , взятым по кривой или пути  $(K)$ , и обозначается символом  $\int_{(K)} f(x, y) ds$ , где  $s$  есть длина дуги кривой,  $ds$  – ее дифференциал.

Криволинейный интеграл первого рода может не существовать по различным причинам. Приведем примеры.

**14.1, 14.2. Примеры несуществования криволинейных интегралов первого рода.** Рассмотрим функцию  $f(x, y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$  на отрезке  $(AB)$  прямой  $x = y = t$ ,  $t \in [0, \pi]$ ,  $A(0, 0)$ ,  $B(\pi, \pi)$ , доопределенную в точке  $C(\pi/2, \pi/2)$  нулем. В этом случае, так как по-

дынтегральная функция неограниченна на кривой  $(AB)$ , не существует  $\int_{(AB)} f(x, y) ds$ . Действительно, при любом разбиении отрезка

$[0, \pi]$  на отрезке разбиения, содержащем точку  $t = \pi/2$ , можно взять точку  $t = \xi$ , близкую к  $t = \pi/2$ , такую, что значение функции  $f(x(\xi), y(\xi)) = \operatorname{tg} x(\xi) + \operatorname{tg} y(\xi) = 2 \operatorname{tg} \xi$  в точке  $M(\xi, \xi)$  кривой  $(AB)$ , а следовательно, и значение соответствующего слагаемого в интегральной сумме и вся интегральная сумма могут быть сделаны

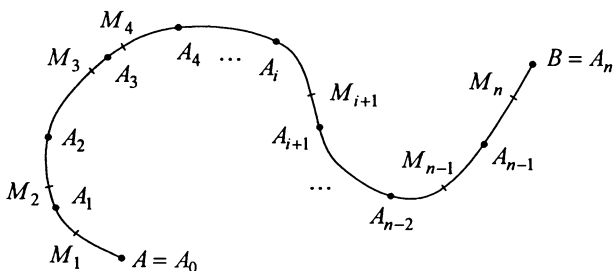


Рис. 14.1

сколь угодно большими по абсолютной величине. Таким образом, можно построить последовательность интегральных сумм, у которой при  $\lambda_V \rightarrow 0$  не будет конечного предела.

Рассмотрим на дуге единичной окружности  $x = \cos \varphi$ ,  $y = \sin \varphi$ ,  $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$ , с концами  $A(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$  и  $B(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  (рис. 14.2, а) функцию  $f(x, y) = D\left(\arctg \frac{y}{x}\right)$ , где  $D(t)$  — функция

Дирихле. Заметим, что здесь аргумент функции Дирихле  $\varphi = \arctg \frac{y}{x}$  выражает угол  $\varphi$  между радиусом окружности и положительной полуосью  $Ox$ ,  $\varphi \in [-\pi/4, \pi/4]$ . Подынтегральная функция  $f(x, y) = D\left(\arctg \frac{y}{x}\right)$  ограничена, но криволинейный интеграл по дуге  $(AB)$  окружности от этой функции не существует, так как при любом разбиении отрезка  $[-\pi/4, \pi/4]$  соответственно и дуги  $(AB)$  на дуги разбиения в каждой из них существуют точки со значениями функции и 0 (при иррациональных значениях  $\varphi$ ), и 1 (при рациональных значениях  $\varphi$ ). Соответственно при любом разбиении

отрезка  $[-\pi/4, \pi/4]$  за счет выбора точек  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , можно получить размеченные разбиения такие, что соответствующие интегральные суммы будут равны 0 и  $\pi/2$  — длине дуги  $(AB)$ , т.е. можно построить последовательность интегральных сумм, которая при  $\lambda_V \rightarrow 0$  не будет иметь предела, и  $\int_{(AB)} f(x, y) ds$  не существует.

Можно показать, как это делалось в случае рассмотрения определенных интегралов, см. примеры 8.9 и 8.10, что существенными в определении являются: произвольность размеченного разбиения и условие  $\lambda_V \rightarrow 0$ . Построение соответствующих контрпримеров выносим в упражнения к разделу.

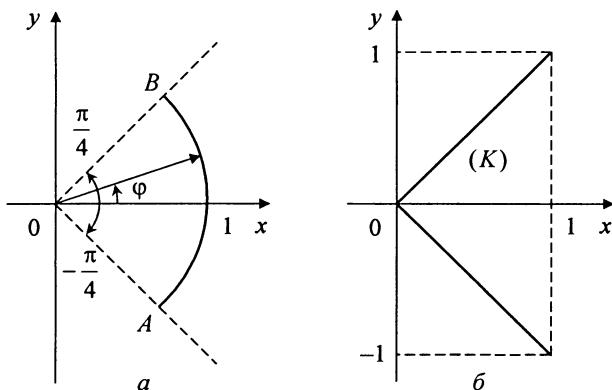


Рис. 14.2

Здесь отметим существенность в определении задания кривой на отрезке  $[t_0, T]$ . Возможность задания кривой на незамкнутом промежутке, например на полуинтервале, привела бы к некорректности определения. Контрпример.

**14.3, 14.4. Задания кривой на полуинтервале, приводящие к несуществованию криволинейного интеграла первого рода.** Используем функцию и кривую из примера 14.1, заменив только отрезок  $[0, \pi]$ , на котором задана кривая, полуинтервалом  $[0, \pi/2)$ . На полученной кривой  $x = y = t$ ,  $t \in [0, \pi/2)$ , непрерывная функция  $f(x, y) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$  оказывается неограниченной. Можно показать, как это показано в примере 14.1, что криволинейный интеграл от данной функции по такой кривой не существует.

На этом же полуинтервале зададим кривую  $x = t$ ,  $y = \operatorname{tg} t$ ,  $t \in [0, \pi/2)$ . Положим  $f(x, y) \equiv 1$ . Заданная кривая неограниченна и имеет бесконечную длину. Соответствующий криволинейный инте-

грал не существует, так как при любом разбиении полуинтервала  $[0, \pi/2)$  длина одной из дуг разбиения будет бесконечной, и интегральная сумма не будет иметь смысла.

**Сведение к обыкновенному определенному интегралу.** Пусть кривая  $(K)$  задана параметрическими уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , где функции  $\varphi$  и  $\psi$  непрерывны вместе со своими производными  $\varphi'$  и  $\psi'$ ; и пусть на кривой нет кратных точек. Тогда кривая спрямляема, и если возрастание длины дуги  $s = \overset{\circ}{AM} = s(t)$  отвечает возрастанию параметра  $t$ , то  $s' = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$ . Переходя в интеграле к переменной  $t$ , получим

$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (14.1)$$

Заметим, что способ параметризации кривой существенно сказывается на применимости формулы (14.1). Пример.

**14.5. Задания кривой, при которых применима и неприменима формула**  $\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$ .

Пусть кривая  $(K)$  это отрезок прямой между точками  $A(-\pi, -\pi)$  и  $B(\pi, \pi)$ , а функция  $f(x, y) = \sin(x + y)$ . Все условия определения криволинейного интеграла соблюдены. В силу симметрии кривой (отрезка  $AB$ ) относительно точки  $(0, 0)$  и нечетности функции на этом отрезке  $\int_{(K)} f(x, y) ds = 0$ .

Если кривую задать уравнениями  $x = \varphi(t) = t$ ,  $y = \psi(t) = t$ ,  $-\pi \leq t \leq \pi$ , то все требования утверждения будут выполнены, и мы получим  $\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2t \sqrt{1^2 + 1^2} dt = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2t \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$ .

Если ту же самую кривую задать уравнениями  $x = \varphi(t) = \sqrt[3]{t}$ ,  $y = \psi(t) = \sqrt[3]{t}$ ,  $-\pi^3 \leq t \leq \pi^3$ , то формула (14.1) уже не будет применима, так как производные  $\varphi'(t) = \psi'(t) = (\sqrt[3]{t})'$  в точке  $t = 0$  равны  $+\infty$  и интеграл в правой части (14.1) не будет существовать.

В утверждении условие непрерывности производных  $\varphi'(t)$ ,  $\psi'(t)$  на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$  является достаточным, но не является необходимым для применимости формулы (14.1). Приведем контрпример.

**14.6. Сведение интеграла первого рода к обыкновенному оп-**

**ределенному интегралу в случае кривой с точкой излома.** Пусть кривая  $(K)$  задана уравнениями  $x = \varphi(t) = |t|$ ,  $y = \psi(t) = t$ ,  $-1 \leq t \leq 1$  (рис. 14.2, б). Это непрерывная плоская спрямляемая кривая. Функция  $f(x, y) = xy$ . Заметим, что  $\varphi'(t)$  не существует в точке  $t = 0$ , отвечающей точке  $(0, 0)$  плоскости  $Oxy$ . Но существуют производные слева  $\varphi'(0-0) = -1$  и справа  $\varphi'(0+0) = 1$ . Формула (14.1) к нашему случаю применима с маленькой оговоркой, что интеграл справа мы запишем сразу как сумму двух интегралов на отрезках  $-1 \leq t \leq 0$  и  $0 \leq t \leq 1$ . Тем самым мы избежимся от некорректности, связанной с несуществованием  $\varphi'(t)$  в нуле. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{(K)} f(x, y) ds &= \int_{-1}^0 -t^2 \sqrt{(-1)^2 + 1^2} dt + \int_0^1 t^2 \sqrt{1^2 + 1^2} dt = \\ &= -\sqrt{2} \frac{t^3}{3} \Big|_{-1}^0 + \sqrt{2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = 0. \end{aligned}$$

Отметим, что существование интеграла  $\int_{(K)} f(x, y) ds$  и равенство его нулю непосредственно следует из определения криволинейного интеграла, симметрии данной кривой относительно оси  $Ox$  и нечетности функции  $f(x, y) = xy$  по переменной  $y$ . С помощью использованного приема криволинейные интегралы распространяются и на кусочно-гладкие кривые.

В утверждении условие непрерывности функций  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  на отрезке  $t_0 \leq t \leq T$  является достаточным, но не является необходимым для применимости формулы (14.1). Контрпример.

**14.7. Задающая кривую функция  $x = \varphi(t)$  разрывна, но формула**

$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$$

**применима.** Зададим кривую  $(K)$  уравнениями:

$$x = \varphi(t) = \cos t, \quad y = \psi(t) = \sin t, \quad \text{если } 0 \leq t \leq \pi;$$

$$x = \varphi(t) = \cos(\pi - t), \quad y = \psi(t) = \sin(\pi - t), \quad \text{если } \pi < t \leq \frac{3}{2}\pi \quad (\text{рис 14.3}).$$

На рисунке: *а* – стрелками показано движение точки кривой при изменении  $t$ ,  $0 \leq t \leq 3\pi/2$ ; *б* – график функции  $x = \varphi(t)$ ; *в* – график функции  $y = \psi(t)$ . Видим, что функция  $x = \varphi(t)$  имеет в точке  $t = \pi$  разрыв, а функция  $y = \psi(t)$  и производная  $\psi'(t)$  непрерывны на



всем отрезке  $0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$ . В то же время кривая  $(K)$  представляет собой непрерывную дугу единичной окружности. Пусть дана функция  $f(x, y) = x^2 + y^2$ , тождественно равная на нашей кривой единице. Очевидно, интеграл равен длине кривой  $\int_{(K)} f(x, y) ds = \frac{3}{2}\pi$ . Формулу (14.1) можно применить, если сразу записать интеграл справа в виде

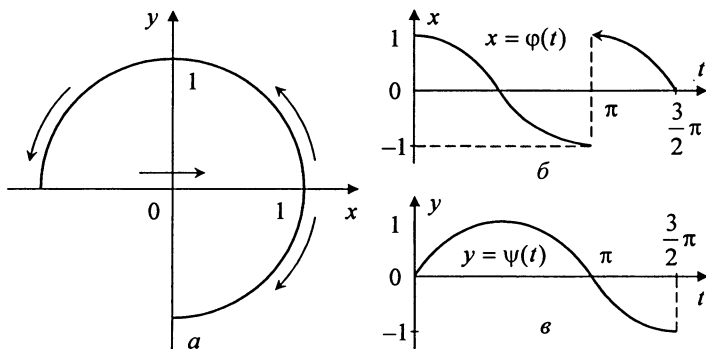


Рис. 14.3

суммы двух интегралов на отрезках  $0 \leq t \leq \pi$  и  $\pi \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$ , при этом

в каждом интеграле возрастание дуги  $s = \overset{\cup}{AM} = s(t)$  отвечает возрастанию параметра  $t$ . На каждом из отрезков в точке  $t = \pi$  доопределим производную  $\phi'(t)$  по непрерывности:  $\phi'(\pi) = 0$ . Доопределение подынтегральной функции в одной точке не изменит значение интеграла, получим 
$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt + \int_\pi^{3\pi/2} \sqrt{(\sin(\pi - t))^2 + (-\cos(\pi - t))^2} dt = t \Big|_0^\pi + t \Big|_\pi^{3\pi/2} = \pi + \frac{3}{2}\pi - \pi = \frac{3}{2}\pi.$$

В утверждении предполагается конечность промежутка:  $t_0 \leq t \leq T$ . Однако существуют спрямляемые кривые, параметрически заданные на неограниченных промежутках. В таких случаях вполне законно использование формулы (14.1) с последующим предельным переходом при  $T \rightarrow +\infty$  или  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Приведем пример.

**14.8. Кривая, заданная на промежутке  $(-\infty, 0]$ , к которой**

формула  $\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$  при-

менима. Рассмотрим кривую  $(K)$  – дугу логарифмической спирали  $\rho = e^\varphi$ , где  $\varphi \leq 0$ , записанную в полярной системе координат. Несмотря на то что она совершает бесконечное число оборотов вокруг своей предельной точки, в примере 9.56 было показано, что она – спрямляемая кривая с длиной  $\sqrt{2}$ . Выразим эту кривую в прямоугольной декартовой системе координат, для удобства заменив обозначение полярного угла  $\varphi$  на  $t$ :  $\rho = e^t$ ,  $x = \varphi(t) = \rho \cos t = e^t \cos t$ ,  $y = \psi(t) = \rho \sin t = e^t \sin t$ ,  $t \leq 0$ . Для возможности проверить результат примем  $f(x, y) \equiv 1$ . Применим формулу (14.1) на отрезке  $t_0 \leq t \leq 0$ , обозначив соответствующую дугу кривой через  $(K_0)$ :

$$\begin{aligned} \int_{(K_0)} f(x, y) ds &= \int_{t_0}^0 \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2} dt = \\ &= \int_{t_0}^0 e^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} e^t \Big|_{t_0}^0 = \sqrt{2} (1 - e^{t_0}). \end{aligned}$$

Выполнив предельный переход,

получим  $\int_{(K)} f(x, y) ds = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \sqrt{2} (1 - e^{t_0}) = \sqrt{2}$ . Заметим, что пре-

дельный переход корректен, так как интеграл слева  $\int_{(K)} f(x, y) ds$  су-

ществует в силу непрерывности и ограниченности функции, гладкости и спрямляемости кривой. Отсутствие касательной только в одной точке (конце) кривой не влияет на существование и величину интеграла.

С помощью предельного перехода можно ввести в рассмотрение несобственные криволинейные интегралы по кривым бесконечной длины. Пример.

**14.9. Возможность рассмотрения несобственного криволинейного интеграла по кривой бесконечной длины, его сведением к обыкновенному несобственному интегралу первого рода.** Зададим кривую  $(K)$ , которая является дугой гиперболической

спирали  $\rho = \frac{1}{\varphi}$ ,  $\varphi \geq \frac{\pi}{2}$ , записанной в полярной системе координат. В

примере 9.57 было показано, что, хотя данная кривая ограничена, ее длина бесконечна. Перейдем в декартову систему координат, заменяя для удобства обозначение параметра (полярного угла  $\varphi$ ) на  $t$ .

Имеем  $\rho = \frac{1}{t}$ ,  $x = \varphi(t) = \rho \cos t = \frac{\cos t}{t}$ ,  $y = \psi(t) = \rho \sin t = \frac{\sin t}{t}$ ,  $t \geq \frac{\pi}{2}$ .

Примем 
$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 1}} = \frac{1}{t\sqrt{(1/t)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}.$$

Предварительно вычислим подынтегральную функцию:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2}, \quad \psi'(t) = \frac{t \cos t - \sin t}{t^2}, \quad (\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 = \\ &= \left( t^2 \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + \cos^2 t + t^2 \cos^2 t - 2t \sin t \cos t + \sin^2 t \right) / t^4 = \\ &= \frac{t^2 + 1}{t^4}, \quad \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} = \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^2}. \end{aligned}$$

Обозначим часть кривой от  $t = \pi/2$  до  $t = t_0 > \pi/2$  через  $(K_0)$  и запишем на отрезке  $[\pi/2, t_0]$ :

$$\int_{(K_0)} f(x, y) ds = \int_{\pi/2}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^2} dt = \int_{\pi/2}^{t_0} \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} \Big|_{\pi/2}^{t_0} = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{t_0}.$$

Выполняя предельный переход при  $t_0 \rightarrow +\infty$ , получаем несобственный

интеграл на бесконечном полуинтервале  $\left[ \frac{\pi}{2}, +\infty \right)$ :

$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \lim_{t_0 \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{t_0} \right) = \frac{2}{\pi}.$$

**Сведение к определенному интегралу в случае кривой, заданной явным уравнением.** Если кривая задана явным уравнением:  $y = y(x)$ , где  $a \leq x \leq b$ , и функция  $y(x)$  непрерывна вместе с производной  $y'(x)$ , то формула (14.1) приводится к следующему виду:

$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx. \quad (14.2)$$

Можно ввести в рассмотрение и другой тип несобственных криволинейных интегралов – от неограниченных функций. Построим пример, использующий формулу (14.2).

**14.10. Возможность рассмотрения несобственного криволинейного интеграла от неограниченной функции, его сведением к обыкновенному несобственному интегралу второго рода.** Пусть

кривая  $(K)$  задана уравнением  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , и дана функция

$f(x, y) = \frac{x^2 \ln x}{2y\sqrt{1+x^2}}$ , которая определена всюду на кривой  $(K)$ , кроме точки  $(0, 0)$ , и стремится к  $-\infty$  при движении к точке  $(0, 0)$  вдоль по кривой. Рассмотрим криволинейный интеграл на дуге  $(K_0)$  нашей кривой, отвечающей значениям  $0 < x_0 \leq x \leq 1$ , где  $x_0$  — некоторое фиксированное число. Используя формулу (14.2), имеем

$$\begin{aligned} \int_{(K_0)} f(x, y) ds &= \int_{x_0}^1 \frac{x^2 \ln x}{x^2 \sqrt{1+x^2}} \sqrt{1+x^2} dx = \int_{x_0}^1 \ln x dx = \\ &= (x \ln x - x) \Big|_{x_0}^1 = -1 - x_0 \ln x_0 + x_0. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $x_0 \rightarrow 0$  получаем  $\int_{(K)} f(x, y) ds = \lim_{x_0 \rightarrow 0} (-1 - x_0 \ln x_0 + x_0) = -1$ , учитывая, что  $\lim_{x_0 \rightarrow 0} (x_0 \ln x_0) = 0$ .

Используем формулу (14.2) для вычисления несобственного интеграла в случае кривой бесконечной длины. Пример.

**14.11. Рассмотрение несобственного криволинейного интеграла по кривой бесконечной длины, заданной явным уравнением  $y = \sin(1/x)$ ,  $x \in (0, 1/\pi]$ .** Пусть кривая  $(K)$  задана уравнением

$y = \sin \frac{1}{x}$  на полуинтервале  $\left(0, \frac{1}{\pi}\right]$ . Известно, что график этой

функции совершает бесконечное число колебаний в любой окрестности нуля и имеет бесконечную длину. Рассмотрим функцию

$f(x, y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - y^2 + 1}}$ , определенную, по крайней мере, в полосе

$|y| \leq 1$ ,  $x \neq 0$ , в которой располагается наша кривая. Выберем некоторую точку  $x_0$ ,  $0 < x_0 < \frac{1}{\pi}$ , получим дугу  $(K_0)$  кривой  $(K)$ , заданную на отрезке  $\left[x_0, \frac{1}{\pi}\right]$ , и вычислим по формуле (14.2) интеграл

$$\begin{aligned} \int_{(K_0)} f(x, y) ds &= \int_{x_0}^{1/\pi} f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \\ &= \int_{x_0}^{1/\pi} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 - \sin^2(1/x) + 1}} \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}\right)^2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{x_0}^{1/\pi} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + \cos^2(1/x)}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4} \cos^2 \frac{1}{x}} dx = \\
 &= \int_{x_0}^{1/\pi} \frac{x^2}{\sqrt{x^4 + \cos^2(1/x)}} \cdot \frac{\sqrt{x^4 + \cos^2(1/x)}}{x^2} dx = \int_{x_0}^{1/\pi} dx = \frac{1}{\pi} - x_0.
 \end{aligned}$$

Получаем при  $x_0 \rightarrow 0$   $\int_{(K)} f(x, y) ds = \lim_{x_0 \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\pi} - x_0 \right) = \frac{1}{\pi}$ .

Условие непрерывности производной  $y'(x)$  является достаточным, но не является необходимым для применения формулы (14.2). Построение контр-примера выносим в упражнения к данному разделу.

В то же время существенным условием применимости формулы (14.2) является ограниченность производной  $y'(x)$ . Пример.

**14.12. Кривая  $y = y(x)$ , интеграл по которой существует, но не выражается в виде  $\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ .**

Пусть кривая  $(K)$  задана уравнением  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , а функция равна  $f(x, y) = xy$ . В этом случае формула (14.2) неприменима, так как  $y'(x) = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$  и  $y'(0) = +\infty$ , чему соответствует верти-

кальное положение касательной к кривой  $(K)$  в точке  $(0, 0)$ . Однако, учитывая симметрию функции  $f(x, y) = xy$  по ее аргументам  $x$  и  $y$ , мы можем заменить данную кривую симметричной ей (относительно прямой  $y = x$ ) кривой  $y = \tilde{y}(x) = x^3$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ , обозначим ее через  $(K^*)$ . Заметим, что  $(K)$  и  $(K^*)$  – графики взаимно-обратных функций. Значение криволинейного интеграла по кривой  $(K^*)$  будет таким же, но формулу (14.2) уже можно будет применить:

$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_{(K^*)} f(x, \tilde{y}) ds = \int_{-1}^1 f(x, \tilde{y}(x)) \sqrt{1 + (\tilde{y}'(x))^2} dx$$

**Сведение к определенному интегралу в случае кривой, заданной явным уравнением.** Если функции  $y(x)$  непрерывна вместе с производной  $y'(x)$ , то кривая  $(K)$  в каждой своей точке  $M(x, y)$  имеет касательную, не параллельную оси  $Oy$ . Пусть  $\alpha$  – угол этой касательной с осью  $Ox$ , тогда

$$\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos \alpha|} dx, \quad (14.3)$$

где  $\alpha = \alpha(x)$ . Если  $f(x, y) \equiv 1$ , то получаем для длины  $S$  кривой:

$$S = \int_a^b \frac{dx}{|\cos \alpha|}. \quad (14.4)$$

То, что касательная к кривой не должна быть параллельна оси  $Oy$  ( $\cos \alpha \neq 0$ ), является существенным требованием утверждения. Но если касательная вертикальна в конечных точках кривой, то можно использовать формулы (14.3) и (14.4) для отрезка  $[a + \delta, b - \delta]$ , где  $\delta > 0$  некоторое малое число, с последующим предельным переходом при  $\delta \rightarrow 0$ . Пример.

**14.13. Кривая  $y = y(x)$ , на концах которой  $\cos \alpha = 0$ , но формула  $\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_a^b \frac{f(x, y(x))}{|\cos \alpha|} dx$  применима.** Пусть дана кривая

( $K$ ) – верхняя единичная полуокружность  $y = \sqrt{1 - x^2}$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ . Для начала используем формулу (14.4) для вычисления длины кривой.

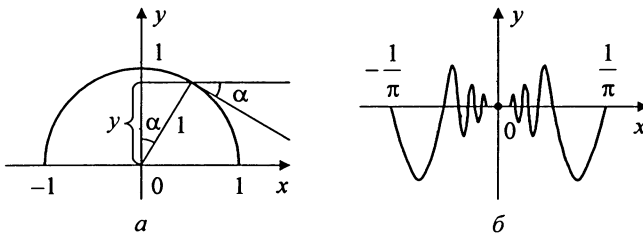


Рис. 14.4

вой. Как легко видеть (рис. 14.4, а),  $\cos \alpha = y$ . Так как на кривой ( $K$ )  $y \geq 0$ , то в нашем случае  $|\cos \alpha| = y = \sqrt{1 - x^2}$ . Получим длину  $S_0$  части полуокружности в виде

$$S_0 = \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-1+\delta}^{1-\delta} = \arcsin(1-\delta) - \arcsin(-1+\delta).$$

В силу непрерывности функции  $\arcsin x$  в точках  $x = \pm 1$  выполняем предельный переход при  $\delta \rightarrow 0$  и получаем  $S = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ .

Пусть, далее, дана функция  $f(x, y) = xy$ , тогда используем формулу (14.3) и получаем для нашей части ( $K_0$ ) кривой ( $K$ ):

$$\int_{(K_0)} f(x, y) ds = \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{f(x, y(x))}{|\cos \alpha|} dx = \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1+\delta}^{1-\delta} =$$

$$= \frac{1}{2}(1-2\delta+\delta^2-1+2\delta-\delta^2) = 0. \text{ Таким образом, и по всей кривой}$$

$$(K) \int f(x, y) ds = 0. \text{ Равенство интеграла нулю, следует непосред-$$

ственно из определения криволинейного интеграла первого рода, так как кривая симметрична относительно оси  $Oy$ , а функция нечетна по  $x$ .

## 14.2. Криволинейные интегралы второго рода

**Определение криволинейного интеграла второго рода.** Используем предположения, построения и обозначения, данные выше в определении криволинейного интеграла первого рода.

Конечный предел (если он существует) при  $\lambda_P \rightarrow 0$  интегральных сумм  $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i), \psi(\xi_i)) \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$ , называется криволинейным интегралом второго рода от функции  $f(x, y)$ , взятым по кривой или пути  $(AB)$ , и обозначается символом

$$I = \int_{(AB)} f(M) dx = \int_{(AB)} f(x, y) dx. \quad (14.5)$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл второго рода

$$I^* = \int_{(AB)} f(M) dy = \int_{(AB)} f(x, y) dy. \quad (14.6)$$

Если на кривой  $(AB)$  определены две функции  $P(M) = P(x, y)$  и  $Q(M) = Q(x, y)$  и существуют интегралы  $\int_{(AB)} P(x, y) dx$  и  $\int_{(AB)} Q(x, y) dy$ , то их сумму называют общим криволинейным интегралом второго рода

$$\int_{(AB)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{(AB)} P(x, y) dx + \int_{(AB)} Q(x, y) dy.$$

Примеры 14.1 – 14.2 несуществования криволинейных интегралов могут быть легко перенесены с интегралов первого рода на интегралы второго рода. В случае неограниченной функции (пример 14.1) можно рассмотреть оба интеграла (14.5) и (14.6). В случае ограниченной, но неинтегрируемой функции (пример 14.2) следует рассмотреть интеграл (14.6).

Отметим особенность определения интеграла второго рода, которая (в отдельных случаях) приводит к существованию этого интеграла по ограниченными кривым бесконечной длины.

**14.14. Кривая бесконечной длины, по которой существуют интегралы второго рода.** По определению криволинейных интегралов при разбиении кривой (отвечающей разбиению отрезка  $[t_0, T]$ ) фактически требуется стремление к нулю: в случае интеграла первого рода – максимума длин дуг разбиения, в случае интеграла второго рода – максимума длин хорд этих дуг. В случае непрерывной и спрямляемой кривой стремления к нулю максимумов длин дуг разбиения и их хорд эквивалентны. При рассмотрении кривых бесконечной длины ситуация иная. По кривым бесконечной длины интегралы первого рода не существуют, так как при любом разбиении на конечное число дуг, хотя бы одна из них будет иметь бесконечную длину. В то же время возможны случаи существования по ограниченным кривым бесконечной длины интегралов второго рода.

Рассмотрим ограниченную плоскую кривую  $(K)$ , заданную уравнениями  $x = \varphi(t) = t, \quad y = \psi(t) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t}, & \text{если } t \neq 0, \\ 0, & \text{если } t = 0, \end{cases} \quad -\frac{1}{\pi} \leq t \leq \frac{1}{\pi}$

(рис. 14.4, б). Эта кривая непрерывна и имеет, как показано в примере 9.49, бесконечную длину в любой окрестности точки  $(0, 0)$ . Рассмотрим разбиения  $V$  отрезка  $[-1/\pi, 1/\pi]$ . При  $\lambda_V \rightarrow 0$ , если функция  $f(x, y)$ , скажем, непрерывная, существует предел интегральных сумм  $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i), \psi(\xi_i)) \Delta x_i$ . Доказательство этого утверждение оставляем читателям и выносим в упражнения.

**Сведение к обыкновенному определенному интегралу.** Пусть кривая  $(AB)$  задана параметрическими уравнениями  $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$ ,  $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)), B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ , функции  $\varphi$  и  $\psi$  непрерывны, существует и непрерывна производная  $\varphi'(t)$ . И пусть функция  $f(x, y)$  определена на кривой  $(AB)$  и непрерывна. Тогда существует криволинейный интеграл (14.5) и имеет место равенство

$$\int_{(AB)} f(x, y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (14.7)$$

Аналогично, если существует и непрерывна производная  $\psi'(t)$ , то существует криволинейный интеграл (14.6) и имеет место равенство

$$\int_{(AB)} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt. \quad (14.8)$$



Для данного утверждения может быть использован пример 14.5. А сейчас покажем, что существование интегралов справа в формулах (14.7) или (14.8) не означает, вообще говоря, существование соответствующего криволинейного интеграла слева в этих формулах. Приведем контрпример.

**14.15. Функции  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $f(x, y)$ , при которых существует  $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$ , но не существует  $\int_{(AB)} f(x, y) dx$ .** Пусть даны функции  $x = \varphi(t) = \cos t$ ,  $y = \psi(t) = \sin t (2D(t) - 1)$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ , где  $D(t)$  – функция Дирихле, которые определяют некоторое множество точек (рис. 14.5, а). Его можно описать как «расщепленную кривую» с началом в точке  $A(1, 0)$  и концом в точке  $B(-1, 0)$ . На рис. 14.5, а стрелками указано перемещение точки «кривой» при изменении координаты  $x$  точки от  $A$  до  $B$ . Вертикальные стрелки обо-

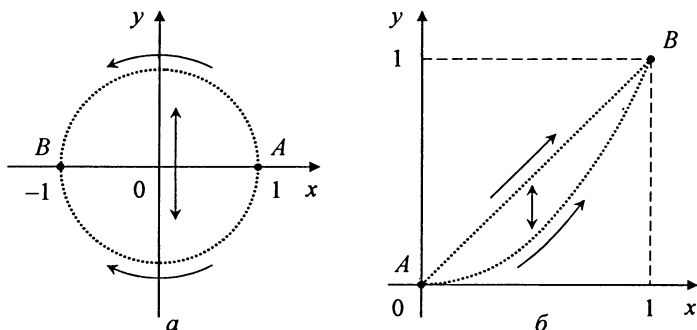


Рис. 14.5

значают «перескоки» точки с одной ветви «кривой» на другую. При рациональных значениях  $t$  точки будут лежать на верхней, а при иррациональных значениях  $t$  – на нижней полуокружностях единичной окружности  $x^2 + y^2 = 1$ . Пусть дана непрерывная функция  $f(x, y) = xy^2$ . Существует и непрерывна производная  $\varphi'(t) = -\sin t$ . Запишем и вычислим интеграл (14.7), учитывая, что  $(2D(t) - 1)^2 \equiv 1$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt &= - \int_0^{\pi} \cos t \sin^2 t \sin t dt = - \int_0^{\pi} \sin^3 t d(\sin t) = \\ &= - \frac{1}{4} \sin^4 t \Big|_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

Однако по заданной нами «расщепленной кривой»

$(AB)$  криволинейный интеграл второго рода  $\int_{(AB)} f(x, y) dx$  не суще-

ствует, так как такое множество точек не отвечает требованиям к кривой, данным в определении.

Используем кривую и функцию из примера 14.6, но уже для случая криволинейного интеграла второго рода.

**14.16. Сведение интегралов второго рода к обыкновенным определенным интегралам в случае кривой с точкой излома.** Очевидно кривая и функция, данные в примере 14.6, отвечают всем требованиям утверждения в случае формулы (14.8), и ее можно использовать без оговорок. Однако при использовании формулы (14.7) придется сразу записать интеграл справа как сумму двух интегралов по отрезкам  $-1 \leq t \leq 0$  и  $0 \leq t \leq 1$ , так как производная  $\varphi'(t)$  не существует в точке  $t=0$ , но существуют производные слева  $\varphi'(0-0)=-1$  и справа  $\varphi'(0+0)=1$ . Таким образом, на каждом из отрезков все требования утверждения выполнены и применение формулы (14.7) становится корректным. Получаем

$$\begin{aligned} \int_{(AB)} f(x, y) dx &= \int_{-1}^0 f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt + \int_0^1 f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt = \\ &= \int_{-1}^0 t^2 dt + \int_0^1 t^2 dt = \int_{-1}^1 t^2 dt = \left. \frac{t^3}{3} \right|_{-1}^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Модифицируем примеры 14.8 и 14.9, в результате чего придем и в случае интегралов второго рода к рассмотрению несобственных интегралов.

**14.17. Кривая, заданная на промежутке  $(-\infty, 0]$ , к которой формула**  $\int_{(AB)} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt$  **применима.** Рас-

смотрим дугу логарифмической спирали  $(AB)$ , заданную уравнениями  $\rho = e^t$ ,  $x = \varphi(t) = \rho \cos t = e^t \cos t$ ,  $y = \psi(t) = \rho \sin t = e^t \sin t$ ,  $t \leq 0$ , в полярной системе координат. Начало дуги в точке  $A(1, 0)$ , конец в  $B(0, 0)$ , напомним, что дуга  $(AB)$  непрерывна и имеет конечную длину. Пусть  $f(x, y) = x^2 + y^2 = e^{2t}$ . Применим формулу (14.8) на отрезке  $t_0 \leq t \leq 0$ , где значению параметра  $t_0$  отвечает точка  $B_0$  дуги спирали. Выполняя двукратное интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned}
 \int_{(AB_0)} f(x, y) dy &= \int_0^{t_0} f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt = \int_0^{t_0} e^{2t} (e^t \sin t + e^t \cos t) dt = \\
 &= \int_0^{t_0} e^{3t} \sin t dt + \int_0^{t_0} e^{3t} \cos t dt = \left( \frac{e^{3t}}{10} (3 \sin t - \cos t) + \frac{e^{3t}}{10} (\sin t + 3 \cos t) \right) \Big|_0^{t_0} = \\
 &= \left( \frac{e^{3t}}{10} (4 \sin t + 2 \cos t) \right) \Big|_0^{t_0} = \frac{e^{3t_0}}{10} (4 \sin t_0 + 2 \cos t_0) - \frac{2}{10}.
 \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $t_0 \rightarrow -\infty$  имеем  $\int_{(AB)} f(x, y) dy = -\frac{1}{5}$ . Пре-

дельный переход корректен, так как интеграл  $\int_{(AB)} f(x, y) dy$  сущест-

вует – достаточные условия существования криволинейного интеграла второго рода выполнены: кривая  $(AB)$  непрерывная и спрямляемая, подынтегральная функция непрерывная и ограниченная, производная  $\psi'(t)$  существует и непрерывна всюду, кроме точки  $B(0, 0)$  – конца кривой. Последнее обстоятельство не влияет на существование и величину интеграла, если произвольно, скажем, нулем доопределить эту производную в точке  $B$ .

**14.18. Возможность рассмотрения несобственного криволинейного интеграла (второго рода) по кривой бесконечной длины, его сведением к обыкновенному несобственному интегралу первого рода.** Рассмотрим дугу гиперболической спирали  $(AB)$ , заданную в полярной системе координат уравнениями:  $\rho = \frac{1}{t}$ ,

$x = \varphi(t) = \rho \cos t = \frac{\cos t}{t}$ ,  $y = \psi(t) = \rho \sin t = \frac{\sin t}{t}$ ,  $t \geq \frac{\pi}{2}$ . Начало дуги в

точке  $A\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ , предельная точка спирали  $B(0, 0)$ , дуга спирали  $(AB)$  непрерывна и имеет бесконечную длину. Предположим, что

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + 1}} = \frac{1}{t \sqrt{(1/t)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}. \quad \text{Рассмот-}$$

рим дугу  $(AB_0)$  спирали на отрезке  $\frac{\pi}{2} \leq t \leq t_0$ , где значению параметра  $t_0$  отвечает точка  $B_0$ . На этом отрезке все требования утверждения выполняются, применим формулу (14.7):

$$\int_{(AB)} f(x, y) dx = \int_{\pi/2}^{t_0} f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\pi/2}^{t_0} \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2 \sqrt{t^2 + 1}} dt.$$

При  $t_0 \rightarrow +\infty$  данный несобственный интеграл сходится, так как

при положительных  $t$  выполняется оценка  $\left| \frac{-t \sin t - \cos t}{t^2 \sqrt{t^2 + 1}} \right| < \frac{t+1}{t^3}$ , а

интеграл  $\int_{\pi/2}^{t_0} \frac{t+1}{t^3} dt$  сходится при  $t_0 \rightarrow +\infty$ .

В утверждении функция  $f(x, y)$  предполагается непрерывной вдоль кривой  $(AB)$ . Однако это требование только достаточное, но не является необходимым для справедливости формул (14.7) и (14.8). Приведем контрпример.

#### 14.19. Разрывная функция $f(x, y)$ , для которой справедлива

формула  $\int_{(AB)} f(x, y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt$ . Рассмотрим кривую  $(AB)$  из примера 14.2, см. рис. 14.2, а. Это дуга единичной окружности, заданная параметрически уравнениями  $x = \varphi(t) = \cos t$ ,

$y = \psi(t) = \sin t$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ . И пусть  $f(x, y) = R\left(\arctg \frac{y}{x}\right)$ ,  $x > 0$ , где

$R(t)$  – функция Римана, см. пример 2.3 и рис 2.3, а. Заметим, что

здесь аргумент функции Римана  $\arctg \frac{y}{x} = t$  это угол между радиусом

окружности и положительной полуосью  $Ox$ . Напомним, что функция Римана имеет разрывы при всех рациональных значениях  $t$  и непрерывна при иррациональных  $t$ . Таким образом, имеем на кривой функцию  $R(t)$ , имеющую всюду плотно расположенные на

отрезке  $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$  точки разрыва. Запишем формулу (14.8):

$$\int_{(AB)} f(x, y) dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} R(t) \cos t dt = 0.$$

Интеграл справа существует и равен нулю, так как функция Римана интегрируема и подынтегральная функция отлична от нуля только на счетном множестве точек. Формула (14.8) в данном случае справедлива. Действительно, интеграл слева существует и равен нулю, что можно показать, непосредственно используя определение криволинейного интеграла второго рода.

**Сведение к определенному интегралу в случае кривой, заданной явным уравнением.** Пусть кривая  $(AB)$  задана явным уравнением:  $y = y(x)$ ,  $x \in [a, b]$ ,  $A(a, y(a))$ ,  $B(b, y(b))$ , где функция  $y(x)$  непрерывна. Тогда имеем

$$\int_{(AB)}^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx. \quad (14.9)$$

Аналогично, если кривая  $(AB)$  задана явным уравнением:  $x = x(y)$ ,  $y \in [c, d]$ ,  $A(x(c), c)$ ,  $B(x(d), d)$ , где функция  $x(y)$  непрерывна, то имеем

$$\int_{(AB)}^d f(x, y) dy = \int_c^d f(x(y), y) dy. \quad (14.10)$$

Покажем, как и в предыдущем случае, что существование интегралов справа в формулах (14.9) и (14.10) не обязательно означает существование интегралов слева.

**14.20. Функции  $y = y(x)$  и  $f(x, y)$ , при которых существует  $\int_a^b f(x, y(x)) dx$ , но не существует  $\int_{(AB)} f(x, y) dx$ .** Пусть задано

множество точек  $y = y(x) = x^{D(x)+1}$ ,  $0 \leq x \leq 1$  (рис. 14.5, б). При  $x = 0$  начало «кривой» в точке  $A(0, 0)$ , при  $x = 1$  конец «кривой» в точке  $B(1, 1)$ . При рациональных значениях  $x$  точки располагаются на параболе  $y = x^2$ , при иррациональных  $x$  — на прямой  $y = x$ .

Пусть задана функция  $f(x, y) = e^x \left( \frac{\ln y^2}{\ln x} - 3 \right)^2$ , если  $0 < x, y < 1$ ,  $f(0, 0) = 1$ ,  $f(1, 1) = e$ . Имеем: если  $0 < x, y < 1$ , то

$$f(x, y(x)) = e^x \left( \frac{2(D(x)+1)\ln x}{\ln x} - 3 \right)^2 = e^x (2D(x) - 1)^2 = e^x;$$

$f(0, y(0)) = 1$ ;  $f(1, y(1)) = e$ . Отсюда получаем  $f(x, y(x)) = e^x$  для всех  $0 \leq x \leq 1$ . Интеграл справа в формуле (14.9) существует:

$$\int_0^1 f(x, y(x)) dx = \int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e - 1, \text{ но криволинейный интеграл}$$

слева в (14.9), конечно, не существует.

Рассмотрим пример, в котором формула (14.9) оказывается непосредственно применимой при вычислении криволинейного интеграла второго рода по кривой бесконечной длины (без привлечения несобственного интеграла!).

**14.21. Криволинейный интеграл второго рода по кривой бесконечной длины, для которого непосредственно применима**

формула  $\int_{(AB)} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx$ . Пусть кривая  $(AB)$  зада-

на явным уравнением  $y = y(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\pi}$  (рис.

14.4, б). Эта кривая, как показано в примере 9.49, имеет бесконечную длину в любой окрестности точки  $(0, 0)$  и непрерывна. Рас-

смотрим функцию  $f(x, y) = \begin{cases} 1/\arcsin\left(\frac{y}{x}\right), & \text{если } y \text{ и } x \neq 0, \left|\frac{y}{x}\right| \leq 1, \\ x, & \text{если } y \text{ и (или) } x = 0, \end{cases}$

$0 \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ . Заметим, что условие  $\left|\frac{y}{x}\right| \leq 1$  выполняется на всей кривой

$(AB)$ , кроме точки  $(0, 0)$ . Получим  $f(x, y(x)) = 1/\arcsin\left(\sin \frac{1}{x}\right) = x$ ,

если  $y(x) \neq 0$ ,  $0 < x \leq \frac{1}{\pi}$ ;  $f(x, y(x)) = x$ , если  $y(x) = 0$  и (или)  $x = 0$ .

Таким образом, при всех  $0 \leq x \leq \frac{1}{\pi}$  выполняется  $f(x, y(x)) \equiv x$ .

Имеем  $\int_{(AB)} f(x, y) dx = \int_0^{1/\pi} f(x, y(x)) dx = \int_0^{1/\pi} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1/\pi} = \frac{1}{2\pi^2}$ , со-

гласно формуле (14.9). Заметим, что данный пример можно рассматривать как иллюстрацию к рассуждениям из примера 14.14.

В случае криволинейных интегралов второго рода также можно рассмотреть несобственный интеграл от неограниченной функции. Более того, такой интеграл возьмем по кривой бесконечной длины. Пример.

**14.22. Возможность рассмотрения несобственного криволинейного интеграла (второго рода) от неограниченной функции по кривой бесконечной длины, его сведением к обыкновенному несобственному интегралу второго рода.** Несколько видоизменим предыдущий пример. Пусть опять кривая  $(AB)$  задана явным урав-

нением  $y = y(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ . Но функцию зада-

дим иначе:  $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{|\arcsin(y/x)|}, & \text{если } x \neq 0, |y/x| \leq 1, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ .

Условие  $\left| \frac{y}{x} \right| \leq 1$  выполняется на всей кривой  $(AB)$ , кроме точки

$(0, 0)$ . Получаем  $f(x, y(x)) = \sqrt{|\arcsin(\sin(1/x))|} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , если

$0 < x \leq \frac{1}{\pi}$ ;  $f(0, y(0)) = 0$ . Видим, что функция неограниченна в ок-

рестности точки  $x = 0$ . Рассмотрим точку  $A_0$  на кривой, отвечаю-

щую значению  $x = x_0$ ,  $0 < x_0 < \frac{1}{\pi}$ . На дуге  $(A_0B)$ , которая имеет ко-

нечную длину, выполнены все предположения утверждения. При-

меняя формулу (14.9), получаем

$$\int_{(A_0B)} f(x, y) dx = \int_{x_0}^{1/\pi} f(x, y(x)) dx = \int_{x_0}^{1/\pi} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{x_0}^{1/\pi} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} - 2\sqrt{x_0}.$$

При  $x_0 \rightarrow 0$  имеем  $\int_{(AB)} f(x, y) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.$

**Вычисление площади с помощью криволинейного интеграла.** Если фигура  $(D)$  ограничена кусочно-гладкой кривой  $(L)$ , то ее площадь  $D$  выражается любым из трех интегралов:

$$D = - \int_{(L)} y dx = \int_{(L)} x dy = \frac{1}{2} \int_{(L)} x dy - y dx. \quad (14.11)$$

Используем формулы (14.11) для вычисления площади необычной фигуры, квадратуемость которой была доказана в разд. 9.

**14.23. Пример вычисления площади с помощью криволинейного интеграла второго рода.** Рассмотрим спиралевидную фигуру из примеров 9.3, 9.20 и 9.25, см. рис. 9.2, б. Пусть кривая  $(L)$ , ограничивающая фигуру  $(D)$ , будет состоять из двух дуг логарифмических спиралей  $\rho = e^\varphi$  и  $\rho = e^{\varphi+\pi/2}$ , где  $\varphi \leq 0$ , заданных в полярной системе координат, отрезка  $[1, e^{\pi/2}]$  оси  $Ox$  и точки  $(0, 0)$ , см. рис. 9.2, б. Ранее было показано, что длины рассматриваемых дуг спиралей конечны. Они совершают бесконечное число оборотов вокруг своей асимптотической точки  $(0, 0)$ . Заданная граница  $(L)$  фигуры  $(D)$  является замкнутой кривой, так как точка  $(0, 0)$ , принадлежащая ей, является предельной точкой обеих дуг спиралей при  $\varphi \rightarrow -\infty$ . Кривая  $(L)$  кусочно-гладкая, так как не имеет касательной только в трех точках:  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  и  $(e^{\pi/2}, 0)$ .

Для вычисления площади  $D$  фигуры  $(D)$  применим третью из формул (14.11), обходя кривую в положительном направлении и вычисляя интегралы в следующем порядке:  $I_1$  – по внутренней спирали  $(L_1)$ ,  $I_2$  – по внешней спирали  $(L_2)$ ,  $I_3$  – по отрезку  $[e^{\pi/2}, 1]$  оси  $Ox$   $(L_3)$ . Первые два интеграла несобственные, потому что  $-\infty < \varphi \leq 0$ . Выразим величины  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \int_{(L_1)} x dy - y dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{-\infty} (e^\varphi \cos \varphi (e^\varphi \sin \varphi + e^\varphi \cos \varphi) d\varphi - e^\varphi \sin \varphi (e^\varphi \cos \varphi - e^\varphi \sin \varphi) d\varphi) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{-\infty} e^{2\varphi} d\varphi = \frac{e^{2\varphi}}{4} \Big|_0^{-\infty} = -\frac{1}{4}; \text{ так как } I_2 \text{ отличается от } I_1 \text{ только сдви-} \\ &\text{гом } \varphi \text{ на } \pi/2 \text{ и перестановкой пределов интегрирования, то имеем} \\ I_2 &= \frac{1}{2} \int_{(L_2)} x dy - y dx = \frac{e^{2(\varphi+\pi/2)}}{4} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{e^\pi}{4}; \text{ так как } (L_3) \text{ это отрезок оси} \\ &Ox, \text{ то получаем } I_3 = \frac{1}{2} \int_{(L_3)} x dy - y dx = 0, \text{ см. [2], т. II, с. 224. Сум-} \\ &\text{мируем } D = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{e^\pi - 1}{4}. \text{ Результат совпадает с полученным} \\ &\text{другим способом в примере 9.25.} \end{aligned}$$

**Связь между криволинейными интегралами обоих родов.** Пусть простая гладкая кривая  $(K) \equiv (AB)$  задана параметрическими уравнениями  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $0 \leq s \leq S$ , где в качестве параметра  $s$  взята длина дуги  $s = \overset{\curvearrowright}{AM}$ , а  $S$  – длина кривой  $(AB)$ . И пусть функции  $x(s)$ ,  $y(s)$  имеют непрерывные производные  $x'(s)$ ,  $y'(s)$ . Обозначим через  $\alpha$  угол, составленный с осью  $x$  касательной, направленной в сторону возрастания длины дуги  $s = \overset{\curvearrowright}{AM}$ , тогда  $\cos \alpha = x'(s)$ ,  $\sin \alpha = y'(s)$ .

Если на кривой  $(K)$  определена непрерывная функция  $f(M) = f(x, y)$ , то  $\int_{(K)} f(M) dx = \int_0^S f(x(s), y(s)) x'(s) ds = \int_{(K)} f(M) \cos \alpha ds$ . Аналогично имеем  $\int_{(K)} f(M) dy = \int_{(K)} f(M) \sin \alpha ds$ . Если же заданы две непрерывные вдоль кривой  $(K)$  функции  $P(M) = P(x, y)$  и  $Q(M) = Q(x, y)$ , то



$$\int_{(K)} P dx + Q dy = \int_{(K)} (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds. \quad (14.12)$$

Равенство (14.12) выполняется и для кусочно-гладких кривых, в этом случае интегралы надо записать как суммы интегралов, взятых по всем гладким дугам, составляющим кривую. Значения углов  $\alpha$  и производных на концах дуг можно доопределить, но они не влияют на существование и величины интегралов. Рассмотрим несколько иной случай нарушения гладкости кривой.

**14.24. Связь между криволинейными интегралами обоих родов, взятыми по дуге логарифмической спирали.** Используем кривую из примера 14.17. А именно, кривая  $(K) \equiv (AB)$  это записанная в полярной системе координат дуга логарифмической спирали  $\rho = e^t$ , где  $t \leq 0$ ;  $A(1, 0)$ ,  $B(0, 0)$ . Дуга  $(AB)$  непрерывна, имеет конечную длину  $\sqrt{2}$ , всюду гладкая, кроме точки  $B$ . В точке  $B(0, 0)$  у кривой не существует касательная, так как кривая совершает бесконечное число оборотов вокруг этой точки, которая является для кривой предельной точкой и концом. Примем  $f(x, y) \equiv 1$ .

Вычислим сначала, см. пример 14.17, интеграл второго рода  $\int_{(K)} f(M) dy = \int_{(K)} f(x, y) dy$ . Применим формулу (14.8) на отрезке  $t_0 \leq t \leq 0$ , где значению параметра  $t_0$  отвечает точка  $B_0$  дуги спирали. Выполняя двукратное интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{(AB_0)} f(x, y) dy &= \int_0^{t_0} \psi'(t) dt = \int_0^{t_0} (e^t \sin t + e^t \cos t) dt = \\ &= \int_0^{t_0} e^t \sin t dt + \int_0^{t_0} e^t \cos t dt = \left( \frac{e^t}{2} (\sin t - \cos t) + \frac{e^t}{2} (\sin t + \cos t) \right) \Big|_0^{t_0} = \\ e^t \sin t \Big|_0^{t_0} &= e^{t_0} \sin t_0. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $t_0 \rightarrow -\infty$  получаем

$$\int_{(K)} f(x, y) dy = 0.$$

О корректности такого предельного перехода сказано в конце примера 14.17.

Вычислим сейчас криволинейный интеграл первого рода  $\int_{(K)} f(M) \sin \alpha ds$ . Уравнение  $\rho = e^t$ , где  $t \leq 0$ , при переходе к параметру  $s$  — длине дуги, принимает вид  $\rho = 1 - \frac{s}{\sqrt{2}}$ ,  $0 \leq s < \sqrt{2}$ , что

легко следует из формулы (9.8). Из уравнения  $e^t = 1 - \frac{s}{\sqrt{2}}$  получаем

$$t = \ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right), \text{ далее } y(s) = \rho(s) \sin(t(s)) = \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Затем вычисляем производную:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= y'(s) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) : \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sin\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) + \cos\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Запишем интеграл по кривой  $(K^*) \equiv (AB^*)$ , где точка  $B^*$  лежит на кривой  $(AB)$  и отвечает значению  $s = s_0$ ,  $0 < s_0 < \sqrt{2}$ , интегрируем по частям

$$\begin{aligned} \int_{(K^*)} f(M) \sin \alpha \, ds &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{s_0} \left(\sin\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right) + \cos\left(\ln\left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right)\right) ds = \\ &= \left| 1 - \frac{s}{\sqrt{2}} = u \right|_1^{1-s_0/\sqrt{2}} = \int_1^{1-s_0/\sqrt{2}} \sin \ln u \, du + \int_1^{1-s_0/\sqrt{2}} \cos \ln u \, du = \\ &= \frac{u}{2} (\sin \ln u - \cos \ln u) \Big|_1^{1-s_0/\sqrt{2}} + \frac{u}{2} (\sin \ln u + \cos \ln u) \Big|_1^{1-s_0/\sqrt{2}} = \\ &= u \sin \ln u \Big|_1^{1-s_0/\sqrt{2}} = \left(1 - \frac{s_0}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\ln\left(1 - \frac{s_0}{\sqrt{2}}\right)\right). \end{aligned}$$

Осуществив предельный переход при  $s_0 \rightarrow \sqrt{2}$  слева, получим  $\int_{(K)} f(M) \sin \alpha \, ds = 0$ . Обос-

нование корректности такого предельного перехода аналогично обоснованиям, данным в примерах 14.8 и 14.17. Видим, что и для такой необычной кривой  $\int_{(K)} f(M) \, dy = \int_{(K)} f(M) \sin \alpha \, ds$ .

**Теорема 1 о независимости криволинейного интеграла от пути.** Пусть две непрерывные функции  $P = P(x, y)$  и  $Q = Q(x, y)$  определены в некоторой связной области  $(D)$ . Рассмотрим криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{(AB)} P \, dx + Q \, dy, \quad (14.13)$$

где  $A$  и  $B$  — две точки области  $(D)$ ,  $(AB)$  — произвольная соединяющая их кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в  $(D)$ .

Для того чтобы интеграл (14.13) не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальная форма  $P \, dx + Q \, dy$  была в

рассматриваемой области полным дифференциалом некоторой однозначной функции двух переменных.

Некоторые требования теоремы могут быть нарушены, но при этом криволинейный интеграл (14.13) по-прежнему не будет зависеть от пути интегрирования. Построим примеры.

**14.25. Множество  $(G)$ , которое не является областью, но в котором интеграл  $\int P dx + Q dy$  не зависит от выбора пути. Рассмотрим сначала функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , отвечающие всем требованиям теоремы на всей плоскости  $Oxy$ , для которых интеграл  $\int P dx + Q dy$ , где точки  $A$  и  $B$  выбраны произвольно,  $(AB)$  – произвольная соединяющая их кусочно-гладкая кривая, не зависит от формы пути интегрирования. Затем, не изменяя функций  $P$  и  $Q$ , несколько сузим возможность выбора точек  $A$ ,  $B$  и кривой  $(AB)$ . А**

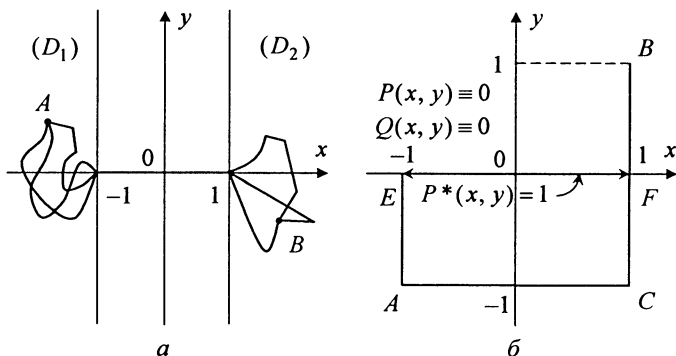


Рис. 14.6

именно, построим связное множество точек  $(G)$  – объединение отрезка  $[-1, 1]$  оси  $Ox$  и двух областей  $(D_1)$  и  $(D_2)$ , где  $(D_1)$  – полуплоскость  $x < -1$ ,  $(D_2)$  – полуплоскость  $x > 1$  (рис. 14.6, а).

Рассмотрим произвольные точки  $A$  и  $B$ , лежащие в  $(G)$ , и произвольную соединяющую их кусочно-гладкую кривую  $(AB)$ , которая целиком лежит в  $(G)$ . Каждая из точек  $A$  и  $B$  может лежать в одной из полуплоскостей, или на отрезке  $[-1, 1]$  оси  $Ox$ . В силу свойств функций  $P$  и  $Q$ , и в этом случае соблюдается независимость интеграла от пути интегрирования. Остается лишь заметить, что связное множество точек  $(G)$  не является областью, т.е. условие теоремы не выполнено.

**14.26. Функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , такие, что  $P dx + Q dy$  не является полным дифференциалом, но интеграл  $\int_{(AB)} P dx + Q dy$**

**не зависит от выбора пути.** Пусть сначала все требования теоремы выполнены и существует функция  $U(x, y)$ , такая, что  $P(x, y) = U'_x$ ,  $Q(x, y) = U'_y$  во всей области  $(D)$ . Рассмотрим произвольное конечное множество  $M$  точек области  $(D)$  и функции  $P^*(x, y)$  и  $Q^*(x, y)$ :  $P^*(x, y) = P(x, y) + 1$ ,  $Q^*(x, y) = Q(x, y) + 1$ , если  $(x, y) \in M$ ;  $P^*(x, y) = P(x, y)$ ,  $Q^*(x, y) = Q(x, y)$ , если  $(x, y) \notin M$ . Заметим, что интеграл  $\int_{(AB)} P^* dx + Q^* dy$  существует и равен инте-

гралу  $\int_{(AB)} P dx + Q dy$ , так как существуют интегралы:  $\int_{(AB)} P^* dx$ ,

$$\int_{(AB)} P^* dx = \int_{(AB)} P dx, \text{ и } \int_{(AB)} Q^* dy = \int_{(AB)} Q dy. \text{ Сказанное следует}$$

из того, что переопределение подынтегральной функции в конечном числе точек не изменяет значения интеграла (кривая  $(AB)$  может пройти через некоторые точки множества  $M$ ). Следовательно, интеграл  $\int_{(AB)} P^* dx + Q^* dy$  также не зависит от пути интегрирования,

несмотря на разрывность функций  $P^*(x, y)$  и  $Q^*(x, y)$  и отсутствие функции  $U^*(x, y)$ , такой, что  $P^*(x, y) = U^{*'}_x$ ,  $Q^*(x, y) = U^{*'}_y$  во всей области  $(D)$ . Последнее объясняется тем, что производные могут иметь разрывы только второго рода.

В то же время, отбрасывая отдельные предположения теоремы, мы получаем ложные утверждения. Сначала отбросим предположение о непрерывности функций  $P = P(x, y)$  и  $Q = Q(x, y)$  в области  $(D)$ . Опровергнем полученное утверждение контрпримером.

**14.27. Разрывная функция  $P(x, y)$ , такая, что интеграл  $\int_{(AB)} P dx + Q dy$  зависит от выбора пути.** Пусть область  $(D)$  – вся

плоскость  $Oxy$ . Пусть  $U(x, y) \equiv 0$ , отсюда  $P(x, y) \equiv 0$ ,  $Q(x, y) \equiv 0$ . Рассмотрим вместо непрерывной функции  $P(x, y)$  функцию

$$P^*(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } -1 < x < 1, y = 0, \\ P(x, y), & \text{в других точках,} \end{cases}$$

которая имеет разрывы. Примем  $A(-1, -1)$ ,  $B(1, 1)$ . Очевидно, по

ломаной  $(ACB)$ , где  $C(1, -1)$ , получаем  $\int_{(ACB)} P^* dx + Q dy = 0$  (рис.

14.6, б). Но по ломаной  $(AEFB)$ , где  $E(-1, 0)$ ,  $F(1, 0)$ ,

$$\int_{(AEFB)} P^* dx + Q dy = \int_{(EF)} P^* dx = \int_{-1}^1 dx = 2.$$

Отбросим предположение о существовании функции  $U(x, y)$ , такой, что  $P(x, y) = U'_x$ ,  $Q(x, y) = U'_y$  во всей области  $(D)$ . Контрпример.

**14.28. Функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , такие, что  $P dx + Q dy$  не является полным дифференциалом и интеграл  $\int_{(AB)} P dx + Q dy$**

**зависит от выбора пути.** Заметим, что данное предположение нарушено в предыдущем примере, так как там равенство  $P^*(x, y) = U'_x$  не может выполняться на всей плоскости ни для какой функции  $U(x, y)$ . Поэтому предыдущий пример может служить искомым контрпримером. Здесь, однако, не будем нарушать других предположений теоремы и рассмотрим непрерывные функции  $P(x, y) = x - y$ ,  $Q(x, y) = x + y$  на всей плоскости  $Oxy$ . Для них, см. ниже теорему о признаке точного дифференциала, выражение  $P dx + Q dy$  не является ни в какой связной открытой области дифференциалом ни от какой (однозначной) функции двух переменных, так как частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$  непрерывны, но не равны. Пусть  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 1)$ . Вычислим интеграл по отрезку  $(AB)$

$$\int_{(AB)} P dx + Q dy = \int_0^1 (x - x) dx + 2x dx = x^2 \Big|_0^1 = 1, \quad \text{затем по ломаной}$$

$(ACB)$ , где  $C(1, 0)$ , сразу записывая интеграл отдельно по каждому отрезку ломаной  $\int_{(AC)} P dx + Q dy + \int_{(CB)} P dx + Q dy =$

$$= \int_0^1 x dx + \int_0^1 (1 + y) dy = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \left( y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 2.$$

**Теорема о признаке точного дифференциала.** Пусть две непрерывные функции  $P = P(x, y)$  и  $Q = Q(x, y)$  определены в некоторой связной и открытой области  $(D)$ . Пусть в области  $(D)$  существуют и непрерывны частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ . Для того чтобы во всей области  $(D)$  дифференци-

альная форма  $P dx + Q dy$  была полным дифференциалом некоторой однозначной функции двух переменных, необходимо, а при односвязности  $(D)$  и достаточно, выполнение равенства  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  при любых  $(x, y) \in (D)$ .

Усилим теорему, отбросив требование непрерывности функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  во всей области  $(D)$ . Опровергнем полученное утверждение следующим контрпримером.

**14.29. Разрывные функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  такие, что всюду  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , но  $P dx + Q dy$  не является полным дифференциалом.** Пусть для всех точек плоскости  $Oxy$  (она односвязная)

$$P(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases} \quad Q(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}}, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases} \quad \text{В любой}$$

точке плоскости  $Oxy$  существуют и всюду непрерывны обе частные производные  $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$  и выполняется условие  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Однако во всей плоскости выражение  $P dx + Q dy$  не является полным дифференциалом от некоторой однозначной функции двух переменных. Покажем это.

Существуют функции  $U(x, y) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + C$ , где  $C$  – произвольная постоянная, для которых  $\frac{\partial U}{\partial x} = P(x, y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$  при  $x \neq 0$ ,

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = +\infty; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} \quad \text{при } y \neq 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = +\infty. \quad \text{Но на}$$

прямых  $x = 0$  и  $y = 0$  любую из функций  $U(x, y) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + C$  не переопределить так, чтобы выполнялось  $\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = P(0, y) = 0$ ,

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{y=0} = Q(x, 0) = 0. \quad \text{Действительно, после любого переопределе-}$$

ния этой функции на прямой  $x = 0$  функция  $U(x, y_0)$  на любой прямой  $y = y_0$  в точке  $x = 0$  либо имеет разрыв, либо бесконечную производную по  $x$ . То же самое получаем и в результате переопределения функции на прямой  $y = 0$ .

Если из формулировки теоремы удалить слова: «а в предположении односвязности области  $(D)$ », то получим усиленное утверждение, некорректность которого доказывается следующим контр примером.

**14.30. Неодносвязная область  $(D)$ , в которой  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , но  $P dx + Q dy$  не является полным дифференциалом.** Пусть область  $(D)$  – вся плоскость  $Oxy$  без точки  $(0, 0)$ . В этой двусвязной области определены функции  $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$  и  $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ , непрерывные и дифференцируемые. Справедливо во всей области  $(D)$  равенство  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ . Проверим, является ли во всей области  $(D)$  выражение  $P dx + Q dy$  дифференциалом от некоторой однозначной функции двух переменных. Чтобы опровергнуть это, надо, согласно теореме 1 о независимости криволинейного интеграла от пути, для двух каких-либо точек  $A$  и  $B$ , лежащих в  $(D)$ , показать, что  $\int_{(AB)} P dx + Q dy$  зависит от пути интегрирования.

Примем  $A(1, 0)$ ,  $B(-1, 0)$ , и пусть кривая  $(L_1)$  – верхняя полуокружность, а  $(L_2)$  – нижняя полуокружность единичной окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , ориентированные от  $A$  к  $B$ . Вычислим два интеграла: по кривым  $(L_1)$  и  $(L_2)$ . Для этого запишем интегралы в параметрической форме:  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,

$$\int_{(L_1)} P dx + Q dy = \int_0^{\pi} \sin^2 t dt + \cos^2 t dt = t \Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$\int_{(L_2)} P dx + Q dy = \int_0^{-\pi} \sin^2 t dt + \cos^2 t dt = t \Big|_0^{-\pi} = -\pi.$$

Несмотря на выполнение всех предположений теоремы, кроме предположения об односвязности области, получили, что из тождественного в  $(D)$  выполнения равенства  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  не следует, что во всей области  $(D)$  выражение  $P dx + Q dy$  является дифференциалом от некоторой однозначной функции двух переменных.

Однако, в отдельных случаях, во всей неодносвязной области  $(D)$ , как и

условие  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  может быть выполнено, так и выражение  $P dx + Q dy$  может быть дифференциалом от некоторой однозначной функции двух переменных. Пример.

**14.31. Неодносвязная область  $(D)$ , в которой  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  и  $P dx + Q dy$  является полным дифференциалом.** Пусть опять область  $(D)$  – вся плоскость  $Oxy$  без точки  $(0, 0)$ . В ней определены функции  $P(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$  и  $Q(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$ , непрерывные и дифференцируемые. Заметим, что во всей двусвязной области  $(D)$  тождественно выполняется равенство  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$ . В то же время выражение  $P dx + Q dy$  является дифференциалом от однозначной функции двух переменных  $U(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ . Действительно,  $P(x, y) = \frac{\partial U}{\partial x}$ ,  $Q(x, y) = \frac{\partial U}{\partial y}$  во всей  $(D)$ .

**Теорема 2 о независимости криволинейного интеграла от пути.** Для того чтобы криволинейный интеграл (14.13), где  $A, B \in (D)$ , не зависел от пути интегрирования, целиком лежащего в области  $(D)$ , необходимо, а при одностойности  $(D)$  и достаточно, выполнение условия  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ .

Теорема непосредственно следует из двух предыдущих теорем. Поэтому все примеры и контрпримеры, относящиеся к этим двум утверждениям, могут быть переформулированы для данного случая. Здесь мы построим два примера использования теоремы для вычисления криволинейных интегралов второго рода по кривым бесконечной длины. Для этого будем заменять кривые бесконечной длины конечными отрезками, соединяющими те же точки.

**14.32. 14.33. Использование теоремы 2 о независимости криволинейного интеграла от пути для вычисления криволинейных интегралов второго рода по кривым бесконечной длины.**

Пусть кривая задана на отрезке  $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$  явным уравнением

$$y = y(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{если } 0 < x \leq 1/\pi, \\ 0, & \text{если } x = 0 \end{cases} \quad (\text{рис. 14.7, а}).$$

Эта кривая имеет бесконечную длину, что было показано в примере 9.49. Она



непрерывная на  $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$  и гладкая на полуинтервале  $\left(0, \frac{1}{\pi}\right]$ , так как касательная к кривой в точке  $x=0$  не существует. Пусть функции  $P(x, y) = x + y$ ,  $Q(x, y) = x - y$ , а односвязная область  $(D)$  – вся плоскость  $Oxy$ . Заметим, что  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$  в любой точке плоскости.

При таких предположениях криволинейный интеграл (14.13) не зависит от пути интегрирования. Рассмотрим последовательность интегралов  $I_k = \int_{(A_k B)} P dx + Q dy$ , где точка  $B\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ , точка  $A_k(x_k, 0)$ ,

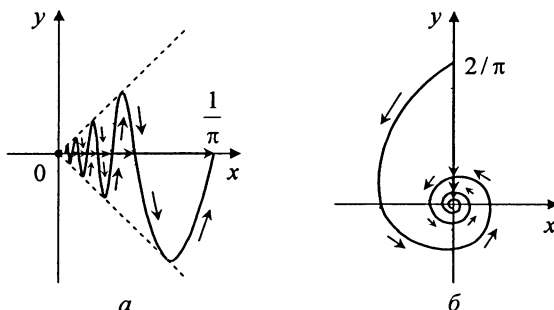


Рис. 14.7

$x_k = \frac{1}{k\pi}$ ,  $k=1, 2, \dots$ , а интегрирование выполняется по дуге данной выше кривой, имеющей начало в точке  $A_k(x_k, 0)$ , а конец в точке  $B\left(\frac{1}{\pi}, 0\right)$ . Легко проверить, что точки  $A_k$ ,  $k=1, 2, \dots$ , и  $B$  это точки пересечения кривой с осью  $Ox$ . Заметим, что

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{(A_k B)} P dx + Q dy = \int_{A_k B} P dx + Q dy = \int_{A_k B} (x+y)dx + (x-y)dy = \\ &= \int_{x_k}^{1/\pi} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{x_k}^{1/\pi} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{k^2 \pi^2} \right), \text{ так как эти интегралы не зависят} \end{aligned}$$

от пути интегрирования (см. рис. 14.7, а). На рисунке стрелками показана ориентация дуг и отрезков, по которым выполняется интегрирование. Находим предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \frac{1}{2\pi^2}$ . Рассмотрим интегралы

$I_x = \int_{(A_x B)} P dx + Q dy$ , где точка  $A_x(x, y(x))$ ,  $x \in [0, 1/\pi]$ , а интегриро-

вание выполняется по соответствующей дуге данной кривой. Интеграл  $I_x$  (как функция аргумента  $x$ ) в силу непрерывности функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  и непрерывности кривой на всем отрезке  $[0, 1/\pi]$

непрерывен на этом отрезке, отсюда  $I_0 = \lim_{x \rightarrow 0+0} I_x = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \frac{1}{2\pi^2}$ .

Пусть кривая – дуга гиперболической спирали  $(AB)$ , заданная параметрическими уравнениями  $\rho = \frac{1}{t}$ ,  $x = \varphi(t) = \rho \cos t = \frac{\cos t}{t}$ ,

$y = \psi(t) = \rho \sin t = \frac{\sin t}{t}$ ,  $t \geq \frac{\pi}{2}$  (рис. 14.7, б). Начало дуги в точке

$A\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ , предельная точка спирали  $B(0, 0)$ , дуга спирали  $(AB)$  не-

прерывна и имеет бесконечную длину, что было показано в примере 9.57. Пусть односвязная область  $(D)$  – вся плоскость  $Oxy$ . Пусть

даны функции  $P(x, y) = x^2$ ,  $Q(x, y) = 1$ . Всюду выполняется условие  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ . Следовательно, интеграл (14.13) не зависит от пу-

ти интегрирования. Построим последовательность интегралов

$I_k = \int_{(AA_k)} P dx + Q dy$ , где точка  $A_k(0, y_k)$ ,  $y_k = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ,

а интегрирование выполняется по дуге данной спирали, начало ко-

торой в точке  $A\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$ , конец в точке  $A_k(0, y_k)$ . Точки  $A$  и  $A_k$ ,

$k = 1, 2, \dots$ , это точки, в которых дуга спирали пересекает положи-

тельную полуось оси  $Oy$ . Очевидно (см. рис. 14.7, б), что интеграл по одному витку спирали: от точки  $A$  до точки  $A_1$ , от точки  $A_k$  до

точки  $A_{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , равен интегралу, взятому по оси  $Oy$ : от точ-

ки  $y_0 = \frac{2}{\pi}$  до точки  $y_1 = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi}$ , от точки  $y_k = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi k}$  до

$y_{k+1} = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi(k+1)}$  соответственно. Отсюда

$$I_k = \int_{(AA_k)} P dx + Q dy = \int_{AA_k} P dx + Q dy = \int_{AA_k} x^2 dx + dy =$$

$= \int_{y_0}^{y_k} dy = y|_{y_0}^{y_k} = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi k} - \frac{2}{\pi}$ . Находим предел  $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = -\frac{2}{\pi}$ . Значение предела  $-\frac{2}{\pi}$ , это взятое с отрицательным знаком расстояние от точки  $A\left(0, \frac{2}{\pi}\right)$  до точки  $B(0, 0)$ , оно соответствует сумме проекций на ось  $Oy$  отрезков разбиения из интегральной суммы, взятой на отрезке  $\overline{AB}$ . Так и должно быть, потому что  $Q(x, y) = 1$ . Следуя заключительным рассуждениям предыдущего примера, можно показать, что  $I = \int_{(AB)} P dx + Q dy = \lim_{k \rightarrow \infty} I_k = -\frac{2}{\pi}$ .

**Теорема о равенстве нулю интеграла по замкнутому контуру.** Если криволинейный интеграл

$$\int_{(L)} P dx + Q dy \quad (14.14)$$

равен нулю, по любому простому (не пересекающему себя) замкнутому контуру  $(L)$ , лежащему в области  $(D)$ , то он будет равен нулю по любому (и самопересекающемуся) замкнутому контуру, лежащему в  $(D)$ .

В данной теореме множество точек самопересечения может быть счетным или иметь мощность континуума. Примеры.

**14.34. Замкнутые контуры бесконечной длины со счетным множеством точек самопересечения, интегралы по которым равны нулю.** Кривую из примера 14.32 объединим (замкнем) с отрезком  $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$  оси  $Ox$  (рис. 14.7, а), сохранив при этом ориентацию

кривой, а ориентацию отрезка изменив. Получим замкнутую ориентированную кривую  $(L_1)$ , имеющую счетное множество точек самопересечения. Сохраним функции  $P$  и  $Q$ , данные в примере 14.32. Тогда криволинейный интеграл  $\int_{(L_1)} P dx + Q dy = 0$ , что следует из равенства

интегралов по кривой и по отрезку (до его переориентации), см. пример 14.32. Аналогично, объединяя кривую (дугу гиперболы) и отрезок  $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$  оси  $Oy$  (переориентировав его) из примера 14.33 (рис. 14.7, б), получаем замкнутую ориентированную кривую  $(L_2)$  со счетным множеством точек самопере-

сечения. Если рассмотреть функции  $P$  и  $Q$ , определенные в примере 14.33, то будем иметь  $\int P dx + Q dy = 0$ .

( $L_2$ )

**14.35. Замкнутый контур, точки самопересечения которого составляют отрезок, интеграл по которому равен нулю.** Простой пример замкнутой ориентированной кривой ( $L_3$ ) с множеством точек самопересечения (самоналожения), имеющим мощность континуума, изображен на рис. 14.8, а. Это две окружности

$$C_1: (x-2)^2 + y^2 = 1 \text{ и } C_2: (x+2)^2 + y^2 = 1,$$

соединенные двумя отрезками  $[-1, 1]$  оси  $Ox$  с противоположной

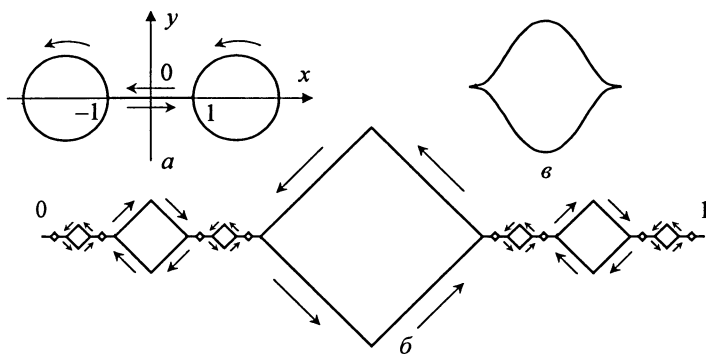


Рис. 14.8

ориентацией ( $X_1$  и  $X_2$ ). Такой замкнутый контур также удовлетворяет условиям теоремы, так как интегралы  $\int P dx + Q dy = 0$  и

( $C_1$ )

$\int P dx + Q dy = 0$ , а два интеграла по отрезкам  $X_1$  и  $X_2$  в сумме ( $C_2$ )

дают нуль.

Построим более сложный замкнутый контур с бесконечным (мощности континуума) множеством точек самопересечения.

**14.36\*. Замкнутый контур, интеграл по которому равен нулю, точки самопересечения которого совпадают с канторовым множеством.** Используем процедуру построения канторова множества  $C$ , описанную в примере 8.14, для задания замкнутой ориентированной кривой ( $L_4$ ) (рис. 14.8, б). Рассмотрим отрезок  $[0, 1]$  оси

$Ox$ . На шаге 1 среднюю треть отрезка (интервал) заменим сторонами квадрата, построенного на этой трети как на диагонали; ориентируем стороны построенного квадрата положительно (против часовой стрелки). На шаге 2 с каждой из двух, оставшихся третей отрезка, сделаем то же самое, т.е. их средние трети (интервалы) заменим сторонами квадратов, построенных на этих третях как на диагоналях; ориентируем стороны построенных квадратов отрицательно. На шаге 3 с каждой из четырех оставшихся третей отрезков сделаем то же самое, ориентируем стороны построенных квадратов положительно, и т.д. Положительную и отрицательную ориентацию сторон построенных квадратов будем чередовать от шага к шагу. На рис. 14.8, б показаны шаги 1 – 4 построения кривой  $(L_4)$ .

За бесконечное число шагов построим непрерывную замкнутую ориентированную кривую  $(L_4)$ , которая будет иметь своими точками самопересечения все точки канторова множества  $C$ , и только их. Напомним, что  $C$  имеет мощность континуума и нулевую меру, а две любые его точки отделены хотя бы одним интервалом точек, не принадлежащих  $C$ . По самому построению кривой  $(L_4)$ , при выполнении предположений леммы, получим  $\int_{(L_4)} P dx + Q dy = 0$ .

Покажем это. С одной стороны, кривую  $(L_4)$  можно рассматривать как объединение двух дуг, заданных двумя непрерывными явными функциями  $y = f(x)$  и  $y = -f(x)$  и противоположно ориентированных (слева направо и справа налево). С другой стороны,  $(L_4)$  можно представить как объединение счетного множества простых замкнутых контуров (ориентированных сторон квадратов) и точек канторова множества  $C$ . Интеграл  $\int_{(L_4)} P dx + Q dy$  будет ра-

вен сумме интегралов (все они равны нулю) по этим контурам, так как мера канторова множества  $C$  равна нулю, и значениями функций  $P$  и  $Q$  в точках  $C$ , не входящих в контуры, можно при вычислении интеграла пренебречь.

Заметим, что, следуя описанной процедуре, можно построить и гладкую замкнутую кривую, ее гладкость будет нарушаться только в концах отрезка, точках  $x = 0$  и  $x = 1$ . Для этого надо использовать при построении не стороны квадратов, а касающиеся оси  $Ox$  и симметричные относительно этой оси сдвоенные дуги кривых (рис. 14.8, в). Чтобы обеспечить гладкость кривой и в точках множества  $C$ , отклонения этих дуг от оси  $Ox$  должны достаточно быстро убыв-

вать при переходе от шага к шагу. Предлагаем читателям выполнить такое построение в качестве одного из упражнений.

### Упражнения

14.1. Показать контрпримерами, аналогичными контрпримерам 8.9 и 8.10, что данные в определениях криволинейных интегралов (первого и второго рода) предположения произвольности размеченного разбиения и стремления  $\lambda_\nu$  к нулю существенны.

14.2. Построить контрпример, показывающий, что непрерывность производной  $y'(x)$  не является необходимым условием применения формулы (14.2).

14.3. Докажите существование интеграла второго рода  $\int_{(K)} f(x, y) dx$  от любой

непрерывной функции по кривой бесконечной длины из примера 14.14.

Указание. Интегральные суммы разбивать на три части: слагаемое (два слагаемых), отвечающее отрезку (двум отрезкам) разбиения, содержащему точку  $x = 0$ , слагаемые по отрезкам, лежащим левее и правее.

14.4. Построить кривые вида, показанного на рис. 14.8,  $\epsilon$ , которые обеспечивали бы гладкость контура, данного в примере 14.36, во всех его точках, включая и точки канторова множества.

14.5. Доказать следующее утверждение: если интеграл (14.14) по контуру любого треугольника, лежащего в связной области  $(D)$ , равен нулю, то интеграл (14.14) и по любому замкнутому контуру, лежащему в  $(D)$ , равен нулю.

14.6. Опровергнуть контрпримером следующее утверждение: если функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  определены и дифференцируемы на всей плоскости  $Oxy$ , а интеграл (14.14) по любой окружности с центром в точке  $(0, 0)$  равен нулю, то интеграл (14.14) равен нулю по любому замкнутому контуру.

## РАЗДЕЛ 15

# ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### 15.1. Определение и свойства двойных интегралов

**Определение двойного интеграла.** Пусть функция  $f(x, y)$  определена на ограниченной квадрируемой области  $(P)$ . Назовем разбиением (неразмеченным) этой области конечное множество  $T$  квадрируемых множеств  $(P_1), (P_2), \dots, (P_n)$  (их площади обозначим через  $P_1, P_2, \dots, P_n$ ) таких, что  $(P_1) \cup \dots \cup (P_n) = (P)$ , и для всех  $i, j = \overline{1, n}, i \neq j$ , площадь  $p$  пересечения  $(P_i) \cap (P_j)$  равна нулю,  $p((P_i) \cap (P_j)) = 0$ ;  $(P_i), i = \overline{1, n}$ , назовем множествами разбиения. Совокупность всех разбиений области  $(P)$  обозначим через  $A_{(P)}$ . Диаметром  $\lambda_T$  разбиения  $T$  области  $(P)$  назовем величину  $\lambda_T = \max_{i=\overline{1, n}} d((P_i))$ , где  $d((P_i)) = \sup_{a, b \in (P_i)} \rho(a, b)$  – диаметр множества  $(P_i)$ . Точки  $(\xi_i, \eta_i) \in (P_i), i = \overline{1, n}$ , назовем разметкой разбиения  $T$ . Разбиение  $T$ , дополненное разметкой, будем называть размеченным разбиением области  $(P)$  и обозначим через  $T'$ . Совокупность всех размеченных разбиений области  $(P)$  обозначим через  $A'_{(P)}$ . Рассмотрим сумму

$$\sigma(T') = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) P_i, \quad (15.1)$$

которую назовем интегральной суммой размеченного разбиения  $T'$ .

Число  $I$  называется двойным интегралом функции  $f(x, y)$  по области  $(P)$ , если для каждого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что для любого размеченного разбиения  $T' \in A'_{(P)}$ , для которого  $\lambda_T < \delta$  выполняется неравенство  $|\sigma(T') - I| < \varepsilon$ .

Двойной интеграл обозначается символом  $I = \iint_{(P)} f(x, y) dP$ .

Случаи несуществования определенных интегралов, приведенные в примерах 8.7 и 8.8, легко воспроизвести и для двойных интегралов, что и предлагается сделать в упражнениях к разделу.

Рассмотрим некоторые альтернативы предположениям данного опреде-

ления. Для начала попробуем заменить произвольное разбиение области  $(P)$  на конечное число множеств (его реализация неясна) следующей строгой формальной процедурой. Пусть проекциями (замкнутой) области  $(P)$  на оси  $Ox$  и  $Oy$  являются отрезки  $[a, b]$  и  $[c, d]$  соответственно. Будем рассматривать разбиение отрезка  $[a, b]$  на  $p$ , а отрезка  $[c, d]$  на  $q$  равных частей, где величины  $p$  и  $q$  – произвольные натуральные числа. При таком разбиении образуется  $pq$  равных прямоугольников. Будем рассматривать только те из них:  $(P_1), (P_2), \dots, (P_n)$ ,  $n \leq pq$ , которые целиком содержатся в области  $(P)$ . Названные в определении точки  $(\xi_i, \eta_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , будем брать в центрах этих прямоугольников. Сохраним все остальные предположения определения. Приведем контрпример, показывающий некорректность такого упрощенного определения.

**15.1. Некорректность определения двойного интеграла, при котором в область вписывается система равных прямоугольников, а значения функции берутся в их центрах.** Рассмотрим в качестве области  $(P)$  замкнутый круг с центром в точке  $(2, 2)$  и радиусом, равным 1. Для этой области имеем  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$ ,  $d = 3$ . Можно показать, что по упрощенному определению мы получим для любой непрерывной функции такое же значения двойного интеграла, что и по общепринятому определению. Однако, например, для неинтегрируемой функции  $f(x, y) = D(x) + D(y)$ , где  $D(t)$  – функция Дирихле, мы по упрощенному определению получим существование двойного интеграла. Действительно, при описанной выше процедуре выбора точек  $(\xi_i, \eta_i)$  все значения  $\xi_i$  и  $\eta_i$  будут рациональными, и мы получим  $f(\xi_i, \eta_i) = D(\xi_i) + D(\eta_i) = 2$  для всех  $i = \overline{1, n}$ . Соответственно интегральная сумма  $\sigma$  будет равна  $\sigma = 2 \sum_{i=1}^n P_i$  – удвоенной сумме площадей прямоугольников  $(P_i)$ , а ее предел  $I = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sigma = 2\pi$  – удвоенной площади круга.

Заменим рассмотренную область  $(P)$  областью  $(P^*)$  – замкнутым кругом с центром в точке  $(\sqrt{5}, \sqrt{5})$  и радиусом  $\sqrt{5}$ . Для  $(P^*)$  имеем  $a^* = 0$ ,  $b^* = 2\sqrt{5}$ ,  $c^* = 0$ ,  $d^* = 2\sqrt{5}$ . Очевидно,  $(P) \subset (P^*)$ . Заметим, что в данном случае все значения  $\xi_i$  и  $\eta_i$  будут иррациональными, и мы получим  $f(\xi_i, \eta_i) = D(\xi_i) + D(\eta_i) = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Интегральная сумма  $\sigma^*$  при этом будет равна нулю,  $\sigma^* = 0$ , и

$$I^* = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sigma^* = 0.$$



Отметим, что, несмотря на вложение  $(P) \subset (P^*)$  и неотрицательность подинтегральной функции, выполняется  $I > I^*$ , что говорит о некорректности упрощенного определения.

По сравнению с определением обычного интеграла новым в определении интеграла двойного является допустимость несвязности множеств разбиения  $(P_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , получаемых при разбиении области интегрирования  $(P)$ , см. [2], т. II, с. 237. В учебниках и задачниках обычно приводятся примеры областей интегрирования, для которых необходимость рассмотрения несвязных множеств разбиения не выявляется. Попробуем отбросить из определения эту

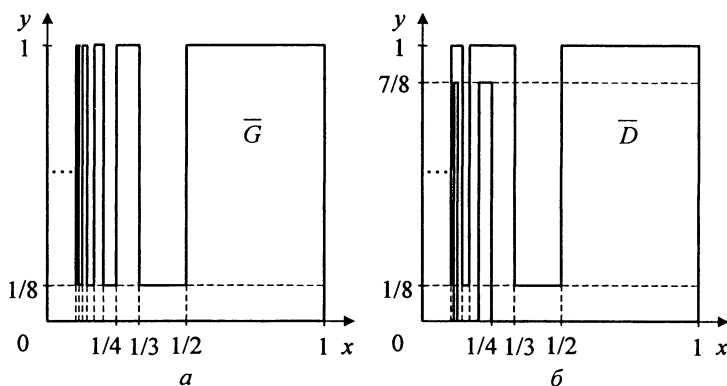


Рис. 15.1

возможность. Приведем контрпример, а именно, построим область интегрирования, разбиение  $T$  которой на конечное число связанных множеств разбиения невозможно при достаточно малом диаметре  $\lambda_T$ .

**15.2. Область интегрирования такая, что любое ее разбиение  $T$  с диаметром  $\lambda_T < 1/2$  содержит несвязные множества разбиения.** Рассмотрим множество  $G$  – объединение счетного множества открытых прямоугольников  $\frac{1}{2k} < x < \frac{1}{2k-1}$ ,  $0 < y < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и открытого прямоугольника  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1/8$  (рис. 15.1, а). Множество  $G$  представляет собой область, т.е. связанное открытое множество. Рассмотрим замыкание  $\overline{G}$ . Это замкнутая область, как и область  $G$ , ограниченная, квадрируемая и связная.  $\overline{G}$  имеет вид «расчески» со счетным множеством прямоугольных «зубчиков», сгущающихся к оси  $Oy$ , и включает отрезок  $[0, 1]$  оси  $Oy$ , все точки которого являются предельными для множества  $G$ . Очевидно, что разбиение  $T$  как области  $G$  (открытой), так и замкнутой области  $\overline{G}$

на любое конечное множество связных множеств разбиения при достаточно малом его диаметре  $\lambda_T$ , скажем  $\lambda_T < \frac{1}{2}$ , невозможно.

Это объясняется тем, что при малом диаметре разбиения в каждом «зубчике» будет располагаться, как минимум, одно свое множество разбиения, таким образом все разбиение должно быть не конечным, а счетным. При составлении, в соответствии с определением, интегральной суммы (15.1) при заданном конечном значении  $n$  необходимым является построение в некоторой малой окрестности оси  $Oy$  несвязных множеств разбиения, состоящих (каждое) из счетного множества связных компонент.

Под областью ( $P$ ) в определении понимается собственно область, т.е. открытое связное множество точек плоскости (открытая область) или замкнутая область – замыкание некоторой открытой области. Заметим, что при замыкании открытой области возможно нарушение связности. Пример.

**15.3. Область (открытая, связная), замыкание которой несвязно.** Рассмотрим открытое множество  $D$  – объединение счетного множества открытых прямоугольников

$$\frac{1}{2k} < x < \frac{1}{2k-1}, 0 < y < 1; \frac{1}{4k} < x < \frac{1}{4k-3}, 0 < y < \frac{1}{8};$$
  

$$\frac{1}{4k+2} < x < \frac{1}{4k-1}, \frac{7}{8} < y < 1; k = 1, 2, \dots$$
 (рис. 15.1, б). Множество  $D$  связно, так как любые две его точки можно соединить ломаной с конечным числом звеньев, лежащей в  $D$ . Таким образом,  $D$  есть область.

Замыкание  $\bar{D}$  есть замкнутая область, она имеет вид «змейки» со счетным множеством «изгибов», сгущающихся к оси  $Oy$ , и включает отрезок  $[0, 1]$  оси  $Oy$ , все точки которого являются предельными для множества  $D$ . Замкнутая область  $\bar{D}$  уже не является связной, так как произвольную точку отрезка  $[0, 1]$  оси  $Oy$  уже нельзя соединить ломаной с конечным числом звеньев, лежащей в  $\bar{D}$ , с любой точкой  $\bar{D}$ , находящейся вне этого отрезка.

**Критерий существования двойного интеграла.** Для существования двойного интеграла необходимо и достаточно, чтобы выполнялось

$$\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} (S - s) = 0, \quad (15.2)$$

где  $S$  и  $s$  – верхняя и нижняя суммы Дарбу соответственно; или в иных обозначениях  $\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \omega_i P_i = 0$ , где  $\omega_i$  есть колебание  $M_i - m_i$  функции  $f(x, y)$

на множестве разбиения  $(P_i)$ ,  $M_i$  и  $m_i$  – точные верхняя и нижняя соответственно грани значений функции  $f(x, y)$  на множестве разбиения  $(P_i)$ .

Покажем с помощью данного критерия несуществование интеграла.

**15.4. Пример использования критерия существования двойного интеграла для установления неинтегрируемости.** Найдем верхнюю и нижнюю суммы Дарбу в некоторой области  $(P)$  для функции  $f(x, y) = D(x) + D(y)$ . Рассмотрим  $T$  – произвольное разбиение  $(P)$  на множества  $(P_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Так как в каждом из множеств (квадрируемых, имеющих ненулевую площадь)  $(P_i)$  существуют как точки, у которых обе координаты рациональные, так и точки, у которых обе координаты иррациональные, то  $M_i = 2$ ,  $m_i = 0$ . Соответственно при любом разбиении получаем:  $S = 2P$ ,  $s = 0$ , т.е. условие (15.2) не выполняется,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 2P \neq 0$ . Отсюда двойной интеграл  $\iint_{(P)} (D(x) + D(y)) dP$  не существует.

**Достаточное условие 1 существования двойного интеграла.** Если функция  $f(x, y)$  непрерывна на замкнутой области  $(P)$ , то существует двойной интеграл  $\iint_{(P)} f(x, y) dP$ .

Условие непрерывности функции  $f(x, y)$  достаточно для ее интегрируемости, но не является необходимым для этого. Контрпример.

**15.5. Пример существования двойного интеграла от разрывной функции.** Характеристическая функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in M, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin M \end{cases}$$

любого конечного множества  $M$  точек квадрата  $0 \leq x, y \leq 1$  имеет в точках множества  $M$  разрывы. Покажем, что она интегрируема в данном квадрате. Пусть мы имеем любое разбиение  $T$  квадрата на  $n$  множеств с диаметром  $\lambda_T$ . Все множества разбиения, содержащие точки множества  $M$ , лежат в замкнутых кругах радиуса  $\lambda_T$  с центрами в названных точках, соответственно их (множеств) суммарная площадь  $Q_{\lambda_T}$  подчиняется неравенству  $Q_{\lambda_T} \leq p\pi\lambda_T^2$ , где  $p$  – число точек в  $M$ . Нижняя сумма Дарбу  $s = 0$ , верхняя

$S = Q_{\lambda_T} \leq p\pi\lambda_T^2$ . Видим, что  $\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} S = 0$  и  $\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} (S - s) = 0$ , (15.2) выполняется – функция интегрируема.

**Достаточное условие 2 существования двойного интеграла.** Если функция  $f(x, y)$  ограничена на  $(P)$  и имеет разрывы лишь на конечном числе кривых, имеющих нулевую площадь, то она интегрируема.

Это также только достаточное условие интегрируемости. Контрпример.

**15.6. Пример существования двойного интеграла от функции, имеющей разрывы на счетном множестве кривых.** Рассмотрим характеристическую функцию  $f(x, y)$  множества  $M$ , состоящего из точек счетного множества отрезков  $x = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots$ ,

лежащих в квадрате  $(P)$ :  $0 \leq x, y \leq 1$ . Она имеет разрывы уже на счетном множестве кривых (отрезков). Покажем интегрируемость функции  $f(x, y)$  в этом квадрате. Возьмем любое число  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ .

Существует такое натуральное число  $m$ , что  $\frac{1}{2^m} < \varepsilon \leq \frac{1}{2^{m-1}}$ . Отсюда, в прямоугольнике  $0 \leq x < \varepsilon/2, 0 \leq y \leq 1$ , лежат все отрезки с номерами  $n > m$ , а вне этого прямоугольника лежат ровно  $m$  отрезков с номерами  $n = \overline{1, m}$ . Рассмотрим произвольное разбиение  $T$  квадрата на множества с максимальным диаметром

$$\lambda_T < \frac{1}{2m} \cdot \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15.3)$$

Суммарная площадь  $Q$  всех множеств разбиения, содержащих точки отрезков с номерами  $n > m$ , подчиняется, в силу (15.3) неравенству  $Q < \frac{\varepsilon}{2} + \lambda_T < \frac{\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{1}{2m}\right) < \varepsilon$ . Суммарная площадь  $W$  всех множеств разбиения, содержащих точки отрезков с номерами  $n = \overline{1, m}$ , подчиняется неравенству  $W \leq 2\lambda_T m < \frac{\varepsilon}{2}$ . Таким образом, общая площадь  $U \leq Q + W$  всех множеств разбиения, содержащих все точки всех отрезков, подчиняется неравенству  $U < \frac{3}{2}\varepsilon$ . Так как в точках отрезков функция равна единице, а во всех других точках – ну-

лю, то для интегральной суммы  $\sigma$  выполняется  $0 \leq \sigma \leq U < \frac{3}{2}\epsilon$ , т.е.

при  $\epsilon \rightarrow 0$  ( $\lambda_T \rightarrow 0$ ) имеем  $\iint_{(P)} f(x, y) dP = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sigma = 0$ .

**Свойство независимости двойного интеграла от значений функции на кривой.** Если значения интегрируемой на  $(P)$  функции  $f(x, y)$  произвольным образом изменить на некоторой кривой  $(L)$ , лежащей в  $(P)$  и имеющей нулевую площадь (оставив, однако, функцию ограниченной), то вновь полученная функция  $f^*(x, y)$  также интегрируема на  $(P)$  и ее интеграл равен интегралу от  $f(x, y)$ .

Как видим, указанное изменение значений интегрируемой функции в континууме точек, если они расположены на кривой с нулевой площадью, не влияет на интегрируемость функции и величину интеграла. Однако такое же изменение функции на некотором счетном множестве точек может привести к неинтегрируемости. Приведем пример.

**15.7. Переопределение функции в счетном множестве точек, приводящее к несуществованию двойного интеграла.** Пусть в квадрате  $0 \leq x, y \leq 1$   $f(x, y) \equiv 0$ , а  $f^*(x, y) = D(x)D(y)$ . Функция  $f^*(x, y)$  отличается от  $f(x, y)$  только тем, что на счетном множестве точек (обе координаты которых рациональны) ее значения равны единице. Функция  $f^*(x, y)$ , в отличие от  $f(x, y)$ , неинтегрируема, так как при любом разбиении  $T$  квадрата на множества в каждом из них (квадрируемом с ненулевой площадью) находятся точки как с двумя рациональными координатами, так и иные, т.е. нижняя и верхняя суммы Дарбу постоянны:  $s = 0$ ,  $S = 1$  и не зависят от диаметра разбиения  $\lambda_T$ . При этом  $\lim_{\lambda_T \rightarrow 0} (S - s) = 1 \neq 0$ .

Отсюда можно сделать вывод о том, что важно не то, как «много» точек переопределения функции, а то, как они расположены. В данном случае они располагались плотно в квадрате.

**Свойство аддитивности двойного интеграла от области интегрирования.** Пусть область  $(P)$ , в которой определена функция  $f(x, y)$ , разложена на две области  $(P')$  и  $(P'')$  кривой  $(L)$ , имеющей нулевую площадь. Тогда из интегрируемости функции  $f(x, y)$  по области  $(P)$  следует ее интегрируемость по областям  $(P')$  и  $(P'')$ , и обратно – из интегрируемости функции по областям  $(P')$  и  $(P'')$  следует ее интегрируемость по области  $(P)$ . При этом

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \iint_{(P')} f(x, y) dP' + \iint_{(P'')} f(x, y) dP''. \quad (15.4)$$

Приведем в некотором смысле необычный иллюстративный пример.

**15.8. Разложение области кривой бесконечной длины на две области, при котором выполняется свойство аддитивности двойного интеграла от области интегрирования.** Пусть область  $(P)$  это прямоугольник  $-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ ,  $-2 \leq y \leq 2$ ; кривая  $(L)$  это график функции  $y = \sin \frac{1}{x}$ ,  $-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ ,  $x \neq 0$ ,  $y(0) = 0$ ; функция

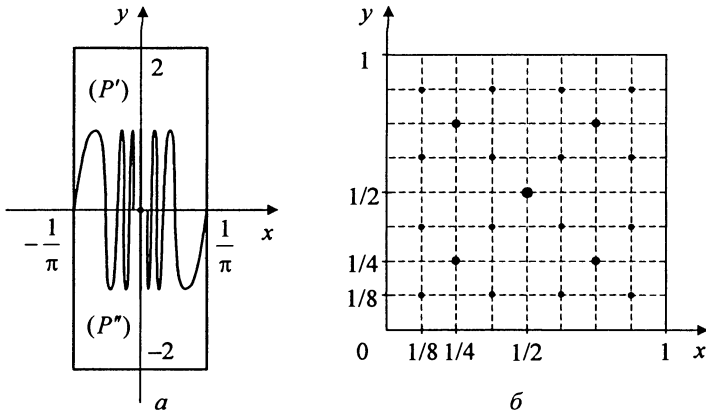


Рис. 15.2

$f(x, y) \equiv 1$  (рис. 15.2, а). Для наглядности изображение несколько растянуто по оси  $Ox$ . Заметим, что кривая  $(L)$ , несмотря на бесконечную длину, имеет нулевую площадь, что следует из примера 9.9. Область  $(P)$  разбивается (раскладывается) кривой  $(L)$  на две замкнутые области  $(P')$  и  $(P'')$  с общим участком границы: графиком функции  $y = \sin \frac{1}{x}$ ,  $-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ ,  $x \neq 0$ , дополненным отрезком  $[-1, 1]$  оси  $Oy$ , который целиком состоит из предельных (граничных) точек областей  $(P')$  и  $(P'')$ .

Заметим, что области  $(P')$  и  $(P'')$  квадратуемы, что следует из примеров 9.2, 9.9, 9.22, а значит, существуют интегралы  $I' = \iint_{(P')} f(x, y) dP' = P'$  и  $I'' = \iint_{(P'')} f(x, y) dP'' = P''$ . Из центральной,

относительно точки  $(0, 0)$ , симметрии областей  $(P')$  и  $(P'')$  и функции  $f(x, y)$  следует равенство интегралов  $I' = I'' = P/2 = 4/\pi$ . При этом выполняется равенство (15.4).

**Свойство аддитивности двойного интеграла от подынтегральной функции.** Если в области  $(P)$  определены и интегрируемы функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ , то интегрируема функция  $f(x, y) \pm g(x, y)$ , при этом

$$\iint_{(P)} (f(x, y) \pm g(x, y)) dP = \iint_{(P)} f(x, y) dP \pm \iint_{(P)} g(x, y) dP.$$

Обратное утверждение неверно. Составление контрпримера выносим в упражнения к разделу.

**Свойство почленного интегрирования неравенств.** Если функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  интегрируемы по области  $(P)$  и выполняется неравенство  $f(x, y) \leq g(x, y)$  для любой точки  $(x, y) \in (P)$ , то выполняется и неравенство

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP \leq \iint_{(P)} g(x, y) dP. \quad (15.5)$$

Обратное утверждение неверно. Простой контрпример.

**15.9. Функции  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$ :**  $\iint_{(P)} f(x, y) dP \leq \iint_{(P)} g(x, y) dP$ ,

но не выполняется  $f(x, y) \leq g(x, y)$  на  $(P)$ . Положим  $f(x, y) \equiv 0$ ,

$g(x, y) = \begin{cases} 4, & \text{если } x \leq y, \\ -2, & \text{если } x > y, \end{cases}$  в квадрате  $(P)$ :  $0 \leq x, y \leq 1$ . Тогда получа-

ем  $\iint_{(P)} f(x, y) dP = 0$ ,  $\iint_{(P)} g(x, y) dP = 4 \cdot \frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{1}{2} = 1$  и неравенство

(15.5) выполняется (как строгое). Но при этом на  $(P)$  неравенство  $f(x, y) \leq g(x, y)$  не выполняется всюду ниже диагонали  $x = y$ .

**Свойство интегрируемости модуля интегрируемой функции.** Если по области  $(P)$  интегрируема функция  $f(x, y)$ , то интегрируема по  $(P)$  и функ-

ция  $|f(x, y)|$  и справедливо неравенство  $\left| \iint_{(P)} f(x, y) dP \right| \leq \iint_{(P)} |f(x, y)| dP$ .

Обратное утверждение неверно. Построить соответствующий контрпример предлагаем в упражнениях к разделу.

## 15.2. Переход от двойного интеграла к повторному

**Теорема о приведении двойного интеграла к повторному в случае прямоугольной области.** Пусть для функции  $f(x, y)$ , заданной в прямоугольнике  $(P) = [a, b; c, d]$ , существует двойной интеграл

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP \quad (15.6)$$

и для любого  $x \in [a, b]$  существует определенный интеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad a \leq x \leq b. \quad (15.7)$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad (15.8)$$

и выполняется равенство

$$\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (15.9)$$

В теореме требуется существование двойного интеграла (15.6). Встает вопрос: могут ли существовать повторные интегралы при несуществующем двойном интеграле? Оказывается, могут. Приведем пример.

**15.10. Функция  $f(x, y)$ , для которой не существует двойной интеграл, но существуют и равны оба повторных интеграла.** Построим в замкнутом единичном квадрате  $(P)$ :  $0 \leq x, y \leq 1$  множество точек  $M$  следующим образом (рис. 15.2, б). Разобьем единичный квадрат  $(P)$  на четыре одинаковых замкнутых квадрата. Точку, лежащую на пересечении этих четырех квадратов, включаем в  $M$ . Далее аналогично поступаем с каждым из четырех полученных квадратов: разбиваем его на четыре одинаковых замкнутых квадрата и точку их пересечения включаем в  $M$ . Этот процесс неограниченно продолжаем. На рис. 15.2, б показаны три начальных шага построения  $M$ . Выполним бесконечное число шагов, объединяя полученные точки в множество  $M$ . Это множество по его построению будет обладать следующими свойствами. Точки множества  $M$  плотно располагаются в квадрате  $(P)$ ; любая прямая, параллельная оси  $Ox$  или оси  $Oy$ , либо не пересекается с  $M$ , либо пересекается с  $M$  в конечном числе точек. Рассмотрим характеристическую функцию множества  $M$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in M; \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin M. \end{cases} \quad (15.10)$$

Двойной интеграл  $\iint_{(P)} f(x, y) dx dy$  от функции (15.10) по квадрату  $(P)$

не существует, так как при любом разбиении квадрата  $(P)$  на множества в каждом из них (квадрируемом и имеющем ненулевую площадь) есть точки множества  $M$  и точки не принадлежащие  $M$ , соответственно при любом разбиении нижняя сумма Дарбу равна нулю, а верхняя сумма Дарбу равна площади квадрата, т.е. единице.



Таким образом, пределы нижних и верхних сумм Дарбу отличны друг от друга, и двойной интеграл не существует.

Рассмотрим повторный интеграл (15.8):  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ . При любом фиксированном значении переменной  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) функция  $f(x, y)$  либо имеет при  $0 \leq y \leq 1$  только нулевые значения, либо только в конечном числе точек ее значения не равны нулю (равны единице). И в том, и в другом случаях при любом  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) существует интеграл (15.7):  $\int_0^1 f(x, y) dy = 0$ , а значит, существует и  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = 0$ . В силу симметрии области интегрирования и функции  $f(x, y)$  по переменным  $x$  и  $y$  существует также повторный интеграл  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = 0$ .

Рассмотрим примеры, охватывающие и все другие возможные случаи существования (несуществования) двойных и соответствующих повторных интегралов в квадрате  $(P)$ :  $0 \leq x, y \leq 1$ . Сведем их в следующую таблицу.

| Существование повторных интегралов                | Двойной интеграл существует                               | Двойной интеграл не существует |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|--------------------------------|
| Существуют оба повторных интеграла                | Например, для любой непрерывной в $(P)$ функции $f(x, y)$ | $f(x, y)$ из примера 15.10     |
| Существует один $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ | $f(x, y) = D(x)R(y)$                                      | $f(x, y) = D(x)\sin(2\pi y)$   |
| Не существуют оба повторных интеграла             | $f(x, y) = D(x)R(y) + D(y)R(x)$                           | $f(x, y) = D(x)D(y)$           |

Ниже будем использовать критерий Лебега существования интегралов Римана (двойных): ограниченная в области функция  $f(x, y)$  тогда и только тогда интегрируема в этой области, когда для любого числа  $\varepsilon > 0$  множество точек разрыва функции  $f(x, y)$  можно заключить в конечное или счетное множество открытых прямоугольников с суммарной площадью меньшей  $\varepsilon$ .

### 15.11. Функция $f(x, y)$ , для которой существуют двойной

**интеграл и только один из повторных интегралов.** Положим  $f(x, y) = D(x)R(y)$ , где  $R(y)$  — функция Римана. Точки разрыва функции  $f(x, y)$  располагаются в квадрате  $(P)$  на отрезках  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y$  — любое рациональное,  $0 \leq y \leq 1$ . Перенумеруем это счетное множество отрезков,  $i$ -й отрезок поместим в открытый прямоугольник с площадью  $S_i = \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Суммарная площадь прямоугольников равна  $S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ . По критерию Лебега двойной интеграл  $\iint_{(P)} f(x, y) dx dy$  существует.

Существует также повторный интеграл  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = 0$ , так

как при любом  $0 \leq x \leq 1$   $\int_0^1 D(x)R(y) dy = 0$ . Но повторный интеграл

$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$  не существует, так как при рациональных значениях

$y$  интеграл  $\int_0^1 D(x)R(y) dx$  не существует.

**15.12. Функция  $f(x, y)$ , для которой не существует двойной интеграл, но существует один из повторных интегралов.** Пусть  $f(x, y) = D(x)\sin(2\pi y)$ . Двойной интеграл не существует, так как любая окрестность произвольной точки  $(x_0, y_0)$  квадрата  $(P)$ , кроме точек трех отрезков  $0 \leq x \leq 1$ ,  $y = 0; 1/2; 1$ , содержит точки со значениями функции как равными нулю, так и равными  $\sin(2\pi y_0) \neq 0$ . Не существует также повторный интеграл

$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx$ , так как при любых значениях  $y \neq 0; 1/2; 1$  интеграл

$\int_0^1 D(x)\sin(2\pi y) dx$  не существует. Однако повторный интеграл

$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = 0$  существует, потому что при любом  $0 \leq x \leq 1$

$$\int_0^1 D(x)\sin(2\pi y) dy = 0.$$

**15.13. Функция  $f(x, y)$ , для которой существует двойной интеграл, но не существуют оба повторных интеграла.** Примем  $f(x, y) = D(x)R(y) + D(y)R(x)$ . Двойной интеграл в  $(P)$  существует, так как в силу рассуждений из примера 15.11 существуют двойные интегралы функций  $D(x)R(y)$  и  $D(y)R(x)$ . Из тех же рассуждений следует, что не существуют оба повторных интеграла, так как в каждом из двух случаев повторный интеграл будет существовать только от одной из функций  $D(x)R(y)$  или  $D(y)R(x)$ .

**15.14. Функция  $f(x, y)$ , для которой не существует двойной интеграл и не существуют оба повторных интеграла.** Пусть  $f(x, y) = D(x)D(y)$ . Двойной интеграл не существует, что было показано в примере 15.7. Оба повторных интеграла также не существуют, так как не существуют интегралы  $\int_0^1 D(y) dy$  и  $\int_0^1 D(x) dx$ .

**Равенство двух повторных интегралов в случае прямоугольной области.** Пусть существует двойной интеграл (15.6) и существуют оба определенных интеграла  $\int_c^d f(x, y) dy, x = \text{const}$ , и  $\int_a^b f(x, y) dx, y = \text{const}$ . Тогда справедливы обе формулы: (15.9) и  $\iint_{(P)} f(x, y) dP = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$ , при этом

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (15.11)$$

В примере 15.10 двойной интеграл не существовал, но существовали оба повторных интеграла и выполнялось равенство (15.11). Покажем, что в случае несуществования двойного интеграла выполнение равенства (15.11) не является обязательным. Контрпример.

**15.15. Функция  $f(x, y)$ , для которой не существует двойной интеграл, но существуют оба повторных интеграла (неравных).** Приведем известный контрпример, данный в [1], с. 157–158. Пусть функция  $f(x, y)$  определена в квадрате  $(P)$ :  $0 \leq x, y \leq 1$ ,

$$f(x, y) = \begin{cases} y^{-2}, & \text{если } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, & \text{если } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{в остальных точках } (P). \end{cases}$$

Для любого  $y, 0 < y < 1$ , получаем

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^y y^{-2} dx - \int_x^1 x^{-2} dx = y^{-2} x \Big|_0^y + x^{-1} \Big|_y^1 = y^{-1} + 1 - y^{-1} = 1.$$

Отсюда  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx = 1$ . Для любого  $x$ ,  $0 < x < 1$ , получаем

$$\int_0^1 f(x, y) dy = - \int_0^x x^{-2} dy + \int_x^1 y^{-2} dy = -x^{-2} y \Big|_0^x - y^{-1} \Big|_x^1 = -x^{-1} - 1 + x^{-1} = -1.$$

Отсюда  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy = -1$ .

Заметим, что невыполнение равенства (15.11) не противоречит теореме, так как двойной интеграл от функции  $f(x, y)$  не существует. Это следует из неограниченности  $f(x, y)$  в любой окрестности точки  $(0, 0)$ .

Заметим, что примеры 15.10 – 15.14 и контрпример 15.15 сохраняют свою силу и для теоремы о приведении двойного интеграла к повторному в случае криволинейной области. Только в этом случае необходимо вписать в область квадрат и в точках области, не принадлежащих квадрату, доопределить дан-

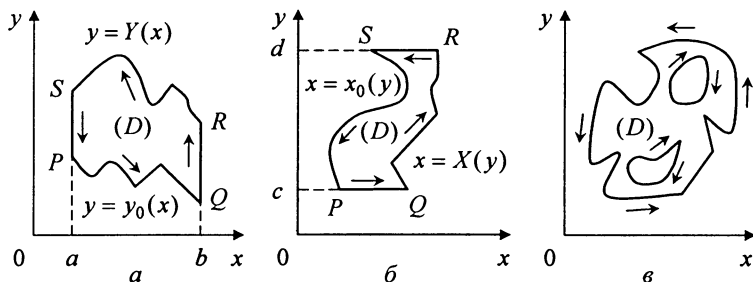


Рис. 15.3

ные в примерах функции нулевыми значениями. При этом от единичного надо перейти преобразованием подобия к квадрату нужного размера.

Новым моментом для криволинейной области является необходимость во многих случаях разбивать область на конечное число частей (криволинейных трапеций), для каждой из которых вычисление двойного интеграла можно свести к вычислению интегралов повторных. Приведем примеры областей, для которых такая процедура невыполнима.

**15.16. Области, которые невозможно разбить на конечное число криволинейных трапеций.** Спиралевидные квадратируемые области из примеров 9.3 и 9.21 не допускают разбивку на конечное число частей, к каждой из которых применим переход к вычисле-

нию повторного интеграла. Еще более яркий пример такого рода – снежинка Коха, квадратуемость которой показана в примере 9.19. Каждую из названных областей можно разбить только на счетное множество требуемых частей.

### 15.3. Формула Грина

**Формулы Грина для криволинейной трапеции.** Пусть область  $(D)$  – криволинейная трапеция, ограниченная контуром  $(L)$ , состоящим из непрерывных кривых  $(PQ)$ :  $y = y_0(x)$  и  $(SR)$ :  $y = Y(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) и двух отрезков  $PS$  и  $QR$ , параллельных оси  $Oy$  (рис. 15.3, а). И пусть в  $(D)$  определена функция  $P(x, y)$ , непрерывная вместе со своей производной  $\frac{\partial P}{\partial y}$ . Тогда

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{(L)} P(x, y) dx. \quad (15.12)$$

Аналогично, если область  $(D)$  – криволинейная трапеция другого типа (рис. 15.3, б) и в области  $(D)$  определена функция  $Q(x, y)$ , непрерывная вместе со своей производной  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ , то выполняется

$$\iint_{(D)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{(L)} Q(x, y) dy. \quad (15.13)$$

У криволинейных интегралов в правых частях формул (15.12) и (15.13) контур  $(L)$  ориентирован положительно.

Предположение о непрерывности функции  $P(x, y)$  не является необходимым для выполнения равенства (15.12). Приведем контрпример.

**15.17. Функция  $P(x, y)$  с множеством точек разрыва, плотным на  $(D)$ , для которой**  $\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{(L)} P(x, y) dx$ . Рассмотрим

произвольную криволинейную трапецию  $(D)$  вида, изображенного на рис. 15.3, а, и функцию  $P(x, y) = f(x, y) + R(x)$ , где функция  $f(x, y)$  – любая, удовлетворяющая всем условиям утверждения,  $R(x)$  – функция Римана. Заметим, что функция  $P(x, y)$  имеет разрывы на любом отрезке  $x = x^*$ ,  $y_0(x^*) \leq y \leq Y(x^*)$ , где  $x^*$  – любое рациональное число,  $a \leq x^* \leq b$ . Отсюда точки разрыва функции располагаются плотно на  $(D)$ .

Запишем левую часть формулы (15.12):

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_{(D)} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy + \iint_{(D)} \frac{\partial R}{\partial y} dx dy = - \int_{(L)} f(x, y) dx,$$

так как  $f(x, y)$  удовлетворяет всем условиям утверждения, а

$$\iint_{(D)} \frac{\partial R}{\partial y} dx dy = 0, \text{ ибо } \frac{\partial R}{\partial y} \equiv 0.$$

Запишем правую часть формулы (15.12):

$$- \int_{(L)} P(x, y) dx = - \int_{(L)} f(x, y) dx - \int_{(L)} R(x) dx = - \int_{(L)} f(x, y) dx,$$

так как  $\int_{(L)} R(x) dx = 0$ . Последнее следует из того, что криволиней-

ный интеграл  $\int_{(L)} R(x) dx$  равен нулю по сторонам трапеции, перпендикулярным оси  $Ox$ , а по нижней и верхней ее сторонам равен соответственно интегралам  $\int_a^b R(x) dx = 0$  и  $-\int_a^b R(x) dx = 0$ .

Видим, что равенство (15.12) выполняется и в нашем случае, хотя функция  $P(x, y)$  имеет множество точек разрыва плотное в  $(D)$ .

Аналогично строится контрпример и применительно к формуле (15.13).

**Формула Грина.** Пусть область  $(D)$  разлагается как на конечное число трапеций первого типа, так и на конечное число трапеций второго типа. Тогда, если в  $(D)$  непрерывны функции  $P(x, y)$ ,  $Q(x, y)$  и их производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ , то справедливы обе формулы (15.12) и (15.13). Вычитая формулу (15.12) из (15.13), получаем собственно формулу Грина:

$$\int_{(L)} P dx + Q dy = \iint_{(D)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (15.14)$$

У криволинейного интеграла в левой части (15.14) ориентация контура  $(L)$  положительна (рис 15.3, в).

Контрпример 15.17 можно модифицировать и для данного общего случая. Соответствующее упражнение помещено в конце раздела.

В примере 15.16 приведены области, которые нельзя разбить на конечное число трапеций ни первого, ни второго типов. Приведем другие примеры областей, при которых также неприменима формула Грина (непосредственно).

**15.18. Области, которые можно разбить на конечное число криволинейных трапеций только одного типа.** Таким свойством обладают области из примера 9.1, см. рис. 9.1, б, и из примера 9.2,

см. рис. 9.2, а. Обе эти области представляют собой криволинейные трапеции первого типа и их, очевидно, нельзя разбить на конечное число трапеций второго типа.

Однако условие разложимости области на конечное число трапеций не является необходимым для выполнения формулы (15.14). Контрпример.

**15.19. Область, которую невозможно разбить на конечное число криволинейных трапеций, но при которой применима формула Грина.** Рассмотрим в качестве  $(D)$  спиралевидную квадратуруемую область из примера 9.3, см. рис. 9.2, б. Очевидно, ее не разбить на конечное число трапеций ни первого, ни второго типа. Однако формула (15.14) выполняется и в этом случае. Это можно показать путем следующего предельного перехода.

Рассмотрим часть области  $(D)$ , расположенную вне открытого круга  $K$  радиуса  $\delta$ ,  $1 > \delta > 0$ , с центром в точке  $(0, 0)$ , обозначим ее  $(D_1)$ . Обозначим также граничную кривую области  $(D_1)$  через  $(L_1)$ ,

$$I_1 = \int_{(L_1)} P dx + Q dy \quad \text{и} \quad J_1 = \iint_{(D_1)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

При любом, сколь угодно малом, значении  $\delta$  область  $(D_1)$  удовлетворяет условиям утверждения и для нее справедлива формула (15.14), т.е.  $I_1 = J_1$ .

Рассмотрим также часть области  $(D)$ , расположенную в замкнутом круге  $\bar{K}$ , обозначим ее  $(D_2)$ . Как следует из примера 14.17, для граничной кривой  $(L_2)$  области  $(D_2)$  существует криволинейный интеграл  $I_2 = \int_{(L_2)} P dx + Q dy$ . Существует также двойной интеграл

$$J_2 = \iint_{(D_2)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

что следует из квадратуемости  $(D_2)$  и непрерывности подынтегральной функции.

Из сказанного выше получаем для левой и правой частей (15.14)

$$I = \int_{(L)} P dx + Q dy = I_1 + I_2, \quad J = \iint_{(D)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = J_1 + J_2.$$

При  $\delta \rightarrow 0$   $I_2 \rightarrow 0$  и  $J_2 \rightarrow 0$ , так как при  $\delta \rightarrow 0$  длина  $L_2 \rightarrow 0$  и площадь  $D_2 \rightarrow 0$ , а функции  $P$ ,  $Q$  и их производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  ограничены в  $(D)$ . Последнее объясняется замкнутостью  $(D)$  и не-

прерывностью  $P$ ,  $Q$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ . Таким образом, учитывая, что  $I_1 = J_1$ , а при  $\delta \rightarrow 0$   $I_2 \rightarrow 0$  и  $J_2 \rightarrow 0$ , получаем  $I = J$ . Формула Грина (15.14) выполняется и в данном случае.

**Формула Грина с другими условиями для области.** Если область  $(D)$  ограничена одним или несколькими кусочно-гладкими контурами (см. рис. 15.3, в) и условия непрерывности функций  $P$ ,  $Q$  и их производных  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  выполняются, то формула Грина (15.14) справедлива.

С использованием данного утверждения предыдущий контрпример обосновать значительно проще, так как в нем граница области  $(D)$  – кусочно-гладкая кривая (контур), состоящая из двух спиралей, одного отрезка и точки.

Но границы области из предыдущего контрпримера можно легко изменить так, что данное утверждение не будет применимо к полученной области, однако справедливость формулы Грина сохранится. Контрпример.

**15.20. Область, которая не разбивается на конечное число криволинейных трапеций и ограничена не кусочно-гладким контуром, но при которой применима формула Грина.** Изменим границу области  $(D)$ , рассмотренной в предыдущем контрпримере, следующим образом. Обе спирали заменим вписанными в них ломаными со счетными множествами звеньев. Начала ломаных расположим в концах отрезка  $[1, e^{\pi/2}]$  оси  $Ox$ , а точка  $(0, 0)$  будет их (ломаных) общей предельной (асимптотической) точкой. Эти ломаные будем строить из таких, достаточно коротких звеньев, чтобы ломаные не имели общих точек и вместе с отрезком  $[1, e^{\pi/2}]$  и точкой  $(0, 0)$  образовывали границу области. Полученную область обозначим  $(D')$ . На обосновании возможности, достаточно очевидной, такого построения останавливаться не будем.

Как и  $(D)$ , область  $(D')$  нельзя разбить на конечное число криволинейных трапеций. Наряду с этим, к области  $(D')$  неприменимо и данное утверждение, так как под кусочно-гладким контуром понимается контур, непрерывно составленный из конечного числа гладких кривых, а граница области  $(D')$  составлена из счетного их множества. Однако путем предельного перехода, описанного в предыдущем примере, можно показать (с использованием последнего утверждения) справедливость формулы Грина и в этом случае. Проработку деталей доказательства оставляем читателям.



Условия непрерывности функций  $P$ ,  $Q$  и их производных  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  в области  $(D)$  не являются необходимыми для выполнения формулы Грина.

**15.21. Функции  $P$ ,  $Q$  и производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ , для которых нарушаются условия непрерывности в  $(D)$ , но формула Грина выполняется.** Функции  $P(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$  и  $Q(x, y) = \frac{2y}{x^2 + y^2}$

возьмем из примера 14.31. Пусть область  $(D)$  есть круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Заметим, что условия непрерывности функций  $P$ ,  $Q$  и их производных  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  нарушаются в точке  $(0, 0)$ . При этом выполняется

формула Грина, так как, см. пример 14.31,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$ , а

дифференциальная форма  $P dx + Q dy$  является дифференциалом от однозначной функции двух переменных  $U(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ . Из первого следует равенство нулю правой части формулы Грина (15.14), из второго – равенство нулю ее левой части, так как равен нулю интеграл по контуру  $(L)$  – окружности  $x^2 + y^2 = 1$ .

Однако условия непрерывности в области  $(D)$  функций  $P$ ,  $Q$  и их производных  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  нельзя убрать из утверждения.

**15.22. Функции  $P$ ,  $Q$  и производные  $\frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ , для которых нарушаются условия непрерывности в  $(D)$  и формула Грина не выполняется.** Функции  $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$  и  $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

возьмем из примера 14.30. Примем  $(D)$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ . И здесь условия непрерывности функций  $P$ ,  $Q$  и их производных  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  нарушаются в точке  $(0, 0)$ . При этом формула Грина не выполняется, так как, см. пример 14.30,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$  и правая часть

(15.14) равна нулю, а интеграл слева в (15.14), взятый по окружности  $x^2 + y^2 = 1$ , равен  $2\pi$ .

## 15.4. Замена переменных в двойных интегралах

**Выражение площади в криволинейных координатах.** Предположим, что на плоскости  $xu$  дана ограниченная простым кусочно-гладким контуром  $(S)$  замкнутая и ограниченная область  $(D)$ , а на плоскости  $\xi\eta$  дана удовлетворяющая таким же условиям область  $(\Delta)$  с контуром  $(\Sigma)$ . Пусть функции

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad (15.15)$$

определяют взаимно однозначное отображение  $(\Delta)$  на  $(D)$ . В области  $(\Delta)$  функции (15.15) непрерывны и непрерывны их частные производные первого порядка, а значит, и функциональный определитель (якобиан)

$$J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (15.16)$$

есть непрерывная функция от  $\xi, \eta$  в области  $(\Delta)$ . И пусть  $J(\xi, \eta) \neq 0$  для любой точки  $(\xi, \eta) \in (\Delta)$ . Тогда площадь  $D$  области  $(D)$  выразится формулой

$$D = \iint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (15.17)$$

Как известно, уже в самом практически важном случае перехода от прямоугольных декартовых к полярным координатам нарушаются некоторые предположения утверждения. А именно, не обеспечивается взаимно однозначное соответствие, и определитель (якобиан) не является ненулевым во всех точках. Однако так как нарушения происходят на множествах, имеющих нулевую площадь, формула (15.17) обобщается и на этот важный случай.

Рассмотрим более ярко выраженный пример нарушения предположений, при котором формула (15.17) применима.

**15.23. Не взаимно однозначное отображение  $(\Delta)$  на  $(D)$  такое, что  $J(\xi, \eta) \equiv 0$ , но выполняется  $D = \iint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta$ .** Пусть

функции (15.15) имеют вид  $\begin{cases} x = \sin(\xi\eta), \\ y = \cos(\xi\eta). \end{cases}$  Тогда якобиан (15.16) бу-

дет тождественно равен нулю  $J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \eta \cos(\xi\eta) & \xi \cos(\xi\eta) \\ -\eta \sin(\xi\eta) & -\xi \sin(\xi\eta) \end{vmatrix} \equiv 0$ .

Для любых значений  $\xi$  и  $\eta$  имеем  $x^2 + y^2 = \sin^2(\xi\eta) + \cos^2(\xi\eta) = 1$ . Следовательно, любой точке  $(\xi, \eta)$  плоскости  $\xi\eta$  отвечает некото-

рая точка окружности  $x^2 + y^2 = 1$  в плоскости  $xu$ . При этом произвольной точке этой окружности (пусть проведенный в нее радиус имеет угол  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha < 2\pi$ , с положительной полуосью  $x$ ) отвечает бесконечное множество точек плоскости  $\xi\eta$ . Это все точки  $(\xi, \eta)$ , лежащие на бесконечном множестве гипербол  $\xi\eta = \alpha + 2\pi k$ ,  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Иными словами, вся плоскость  $\xi\eta$  отображается на окружность  $x^2 + y^2 = 1$  и соответствие не взаимно однозначно.

Если рассмотреть некоторую замкнутую область  $(\Delta)$  в плоскости  $\xi\eta$ , то ей, в силу непрерывности отображения, будет соответствовать в плоскости  $xu$  некоторая замкнутая дуга окружности  $x^2 + y^2 = 1$ . Эта дуга не является областью в плоскости  $xu$ , но, заметим, и в этом случае формула (15.17) будет выполняться, так как площадь названной дуги равна нулю, и  $J(\xi, \eta) \equiv 0$ .

В данном примере якобиан равнялся нулю тождественно, и двумерной области  $(\Delta)$  в плоскости  $\xi\eta$  отвечала дуга (одномерное множество) в плоскости  $xu$ . Рассмотрим более сложный пример, когда якобиан равняется нулю только на некоторой части (с положительной площадью) двумерной области  $(\Delta)$  в  $\xi\eta$ . И снова формула (15.17) оказывается применимой.

**15.24. Отображение  $(\Delta)$  на  $(D)$  такое, что  $J(\xi, \eta) \equiv 0$  на части  $(\Delta') \subset (\Delta)$ ,  $\Delta' > 0$ , но выполняется  $D = \iint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta$ . По-**

ложим 
$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta), \end{cases} \quad \text{где} \quad x(\xi, \eta) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi^2 + \eta^2 < 1, \\ (\xi^2 + \eta^2 - 1)^2, & \text{если } \xi^2 + \eta^2 \geq 1, \end{cases}$$
  
 $y(\xi, \eta) = \xi\eta$ . Покажем, что эти функции всюду на плоскости  $\xi\eta$  непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Очевидно, для функции  $y(\xi, \eta)$  это выполняется всюду, а для функции  $x(\xi, \eta)$  — внутри и вне круга  $\xi^2 + \eta^2 < 1$  (по отдельности). Значения функции  $x(\xi, \eta)$  и ее частных производных первого порядка внутри названного круга тождественно равны нулю. Они также равны нулю на окружности  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ . Действительно, если  $\xi^2 + \eta^2 = 1$ , то  $x(\xi, \eta) = (\xi^2 + \eta^2 - 1)^2 = 0$ ,  $x'_\xi = 2(\xi^2 + \eta^2 - 1)2\xi = 0$ ,  $x'_\eta = 2(\xi^2 + \eta^2 - 1)2\eta = 0$ . Отсюда функция  $x(\xi, \eta)$  непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка также всюду на плоскости  $\xi\eta$ .

Следовательно, якобиан  $J(\xi, \eta)$  – непрерывная функция от  $\xi, \eta$ . Он равен нулю во всем замкнутом круге  $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$ . Вне этого круга

$$J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} 4(\xi^2 + \eta^2 - 1)\xi & 4(\xi^2 + \eta^2 - 1)\eta \\ \eta & \xi \end{vmatrix} = 4(\xi^2 + \eta^2 - 1)(\xi^2 - \eta^2).$$

Заметим, что якобиан равен нулю еще на прямых  $\eta = \pm\xi$ . Знаки якобиана и его нулевые значения показаны на рис. 15.4, а.

Таким образом, все предположения утверждения, относящиеся к функциям (15.15), выполнены, кроме неравенства якобиана нулю и однозначности соответствия между точками плоскостей  $xu$  и  $\xi\eta$ .

Рассмотрим область  $(\Delta)$ :  $\xi^2 + \eta^2 \leq 2$ ,  $|\xi| \geq |\eta|$ ,  $\xi \geq 0$  – замкнутый сектор, четверть круга радиуса  $\sqrt{2}$  (рис. 15.4, а). Ей отвечает область  $(D)$ :  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-\frac{\sqrt{x+1}}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{x+1}}{2}$  (рис. 15.4, б). Действительно, точке  $(\xi = 0, \eta = 0)$  соответствует точка  $(x = 0, y = 0)$ ; произвольной дуге  $\xi^2 + \eta^2 = R^2$ ,  $0 < R < 1$ , сектора отвечает отрезок

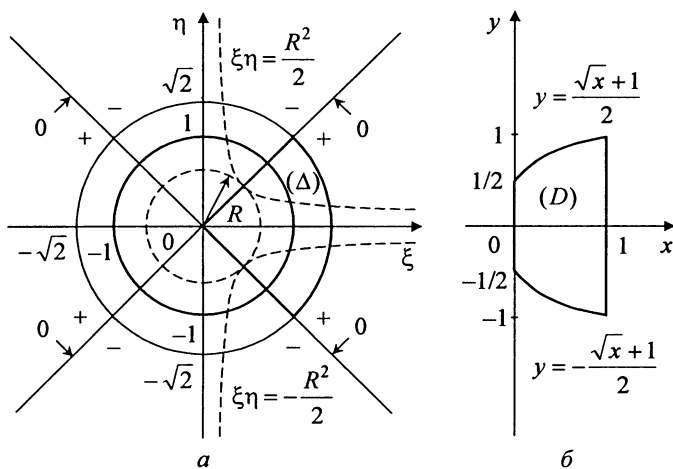


Рис. 15.4

$x = 0$ ,  $-R^2/2 \leq y \leq R^2/2$ , так как на этой дуге функция  $y = \xi\eta$  строго монотонно возрастает от  $-R^2/2$  до  $R^2/2$ ; аналогично, любой дуге  $\xi^2 + \eta^2 = R^2$ ,  $1 \leq R \leq \sqrt{2}$ , сектора отвечает отрезок  $x = (R^2 - 1)^2$ ,  $-R^2/2 \leq y \leq R^2/2$ . Для последней части сектора (при

$1 \leq R \leq \sqrt{2}$ ) соответствие является взаимно однозначным, так как при любом значении  $x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , ему отвечает дуга  $R^2 = \xi^2 + \eta^2 = \sqrt{x} + 1$  сектора. На этой дуге функция  $y = \xi\eta$  строго монотонно возрастает от  $-\frac{\sqrt{x}+1}{2}$  до  $\frac{\sqrt{x}+1}{2}$ . Площадь  $D$  области

$$(D) \text{ равна } D = 2 \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{2} dx = \left( \frac{2}{3} x\sqrt{x} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

Проверим справедливость формулы (15.17). Обозначим через  $(\Delta^*)$  область  $(\Delta)$  с удаленным кругом  $\xi^2 + \eta^2 < 1$ , в котором якобиан  $J(\xi, \eta) \equiv 0$ . Интеграл вычислим в полярных координатах  $\rho$  и  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \iint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta &= 4 \iint_{(\Delta^*)} (\xi^2 + \eta^2 - 1) |\xi^2 - \eta^2| d\xi d\eta = \\ &= 4 \int_1^{\sqrt{2}} \rho (\rho^2 - 1) \rho^2 d\rho \int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi| d\varphi = \\ &= 4 \int_1^{\sqrt{2}} (\rho^5 - \rho^3) d\rho \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = 4 \left( \frac{\rho^6}{6} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \\ &= 4 \cdot \frac{5}{12} \cdot 1 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Видим, что формула (15.17) оказывается применимой и в этом случае, хотя отображение не обеспечивает взаимно однозначное соответствие между точками областей  $(\Delta)$  и  $(D)$ , и во всей области  $\xi^2 + \eta^2 \leq 1$ ,  $|\xi| \geq |\eta|$ ,  $\xi \geq 0$ , якобиан равняется нулю.

Однако отбросить в утверждении условия неравенства якобиана нулю и обеспечения взаимно однозначного соответствия нельзя. Контрпример.

**15.25. Отображение  $(\Delta)$  на  $(D)$  такое, что  $J(\xi, \eta) \equiv 0$  на части  $(\Delta') \subset (\Delta)$ ,  $\Delta' > 0$ , и  $D \neq \iint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta$ .** Если в предыдущем

примере в качестве области  $(\Delta)$  рассматривать весь замкнутый круг  $\xi^2 + \eta^2 \leq 2$ , то ему опять будет отвечать область  $(D)$ :  $0 \leq x \leq 1$ ,  $-\frac{\sqrt{x}+1}{2} \leq y \leq \frac{\sqrt{x}+1}{2}$ . Это объясняется тем, что при отображении образом каждого из четырех секторов, на которые разбивается круг  $\xi^2 + \eta^2 \leq 2$  прямыми  $\eta = \pm \xi$ , является область  $(D)$ . Опять будет нарушаться условие взаимно однозначного соответствия точек  $(\Delta)$  и

( $D$ ), но в данном случае уже не будет выполняться формула (15.17): правая ее часть будет в четыре раза больше левой.

**Замена переменных в двойных интегралах.** Пусть область ( $D$ ) ограничена простым кусочно-гладким контуром ( $S$ ), а функция  $f(x, y)$  непрерывна в этой области. Предположим, что область ( $D$ ) связана функциями (15.15) с некоторой областью ( $\Delta$ ) на плоскости  $\xi\eta$  и все условия предыдущего утверждения выполняются. Тогда справедливо равенство:

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (15.18)$$

Условие непрерывности функции  $f(x, y)$  в ( $D$ ) не является необходимым для выполнения равенства (15.18). Приведем контрпример.

**15.26. Функция  $f(x, y)$ , для которой выполняется формула**  

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta,$$
**хотя ее мно-**

**жество точек разрыва плотно на ( $D$ ).** Пусть область ( $D$ ) – замкнутый круг  $x^2 + y^2 \leq 1$ , функция  $f(x, y)$  непрерывна в ( $D$ ) и выполнены все прочие условия утверждения. Перейдем к полярным координатам  $\rho$  и  $\varphi$ , получим равенство

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\Delta)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi, \quad (15.19)$$

где область ( $\Delta$ ) – замкнутый прямоугольник  $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Рассмотрим функцию  $f^*(x, y) = f(x, y) + R(\sqrt{x^2 + y^2})$ , здесь  $R(t)$  – функция Римана. В точке  $(0, 0)$  и точках всех окружностей  $x^2 + y^2 = \rho^2$  с рациональными значениями радиусов  $\rho, 0 < \rho \leq 1$ , функция  $R(\sqrt{x^2 + y^2})$ , а значит, и  $f^*(x, y)$  имеют разрывы. Таким образом, точки разрыва образуют счетное множество гладких кривых, расположенных плотно в области интегрирования.

Покажем выполнение в данном случае равенства (15.18) для функции  $f^*(x, y)$ . Множество ее точек разрыва может быть помещено в счетную систему квадратуемых множеств (одна окружность и кольца) с суммарной площадью, меньшей  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$  – произвольно), как это сделать показано в примере 15.11. Отсюда получаем существование интегралов:  $\iint_{(D)} R(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy = 0$  и соответственно

$$\iint_{(D)} f^*(x, y) dx dy = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy. \quad (15.20)$$

Первый из интегралов равен нулю, так как интегрируемая функция  $R(\sqrt{x^2 + y^2})$  отлична от нуля только на множестве нулевой меры. Так как  $f^*(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) + R(\rho)$ , то функции  $R(\rho)$  и  $f^*(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$ , а значит,  $R(\rho)\rho$  и  $f^*(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)\rho$ , имеют разрывы в точках отрезков  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $\rho = \text{const}$ , где  $\rho$  рационально,  $0 \leq \rho \leq 1$ . Отсюда получаем существование интегралов:  $\iint_{(\Delta)} R(\rho)\rho \, d\rho \, d\varphi = 0$  (функция  $R(\rho)\rho$  отлична от нуля на множестве

нулевой меры) и

$$\iint_{(\Delta)} f^*(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi = \iint_{(\Delta)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi. \quad (15.21)$$

Сравнивая равенства (15.19) – (15.21), получаем

$$\iint_{(D)} f^*(x, y) \, dx \, dy = \iint_{(\Delta)} f^*(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho \, d\rho \, d\varphi.$$

В то же время условие непрерывности функции  $f(x, y)$  в  $(D)$  нельзя убирать из утверждения. Построение контрпримера выносим в упражнения.

### Упражнения

15.1. Привести примеры несуществования двойных интегралов, аналогичные примерам 8.7 и 8.8 для обычных определенных интегралов.

15.2. Опровергнуть контрпримером утверждение: если в области  $(P)$  определены функции  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  и интеграл  $\iint_{(P)} (f(x, y) \pm g(x, y)) \, dP$  существует, то выполняется

$$\iint_{(P)} (f(x, y) \pm g(x, y)) \, dP = \iint_{(P)} f(x, y) \, dP \pm \iint_{(P)} g(x, y) \, dP.$$

15.3. Опровергнуть контрпримером утверждение: если по области  $(P)$  интегрируема функция  $|f(x, y)|$ , то интегрируема по  $(P)$  и функция  $f(x, y)$ .

15.4. Привести пример функции  $P(x, y)$ , имеющей разрывы, для которой

$$\iint_{(D)} \frac{\partial P}{\partial y} \, dx \, dy \neq - \int_{(L)} P(x, y) \, dx.$$

15.5. Построить пример функций  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  с множествами точек разрыва, плотными на  $(D)$ , для которых выполнялась бы формула Грина.

15.6. Показать контрпримером, что условие непрерывности функции  $f(x, y)$  в  $(D)$  нельзя убирать из утверждения о замене переменных в двойных интегралах.

## РАЗДЕЛ 16

# ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ, ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### 16.1. Двусторонние поверхности

**Определение простой поверхности.** Поверхностью ( $S$ ) (в 3-мерном пространстве) называется множество точек  $(x, y, z)$  в пространстве  $xуz$ , заданное параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v), \quad (16.1)$$

где функции  $\varphi, \psi, \chi$  определены и непрерывны в некоторой ограниченной квадрируемой области ( $\Delta$ ) на плоскости  $uv$  параметров  $u$  и  $v$ . При этом функции (16.1) устанавливают взаимно однозначное отображение точек плоской области ( $\Delta$ ) на точки ( $S$ ), т.е. каждая точка поверхности является образом лишь одной пары значений параметров. Такая поверхность называется простой. Предполагается, что область ( $\Delta$ ) и поверхность ( $S$ ) ограничены простыми замкнутыми контурами, они соответствуют друг другу при отображении (16.1). Параметры  $u$  и  $v$  называются криволинейными координатами точки  $(x, y, z)$ , которая является их образом при данном отображении.

Далеко не все поверхности являются простыми. Не будем здесь приводить строгих обоснований, ограничимся иллюстративным примером.

**16.1. Примеры поверхностей, которые являются (не являются) простыми.** Рассмотрим в плоскости  $uv$  в качестве области ( $\Delta$ ) квадрат  $0 \leq u, v \leq 1$ , а в качестве поверхности в пространстве  $xуz$  – поверхность куба  $0 \leq x, y, z \leq 1$  с удаленной нижней гранью – открытым квадратом (рис. 16.1). На рисунке показаны:  $a$  – область ( $\Delta$ );  $b$  – поверхность. Графически изображено взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и поверхности куба (без нижней грани), соответствующие друг другу точки обозначены одинаковыми буквами – без штриха и со штрихом. Запись непрерывных функции (16.1), отвечающих данному случаю, оставляем читателям.

Однако если у поверхности куба не удалять грань, оставив ее



(поверхность) замкнутой, то установить взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и поверхности куба посредством непрерывных функций (16.1) уже не удастся.

Возможно, что точки некоторой поверхности при одном выборе функций (16.1) не будут взаимно однозначно соответствовать точкам области  $(\Delta)$ , при другом – будут. Пример.

**16.2. Примеры разных параметрических заданий поверхности при помощи отображений, взаимно однозначных и нет.** Рассмотрим часть конуса  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . В качестве параметров используем сферические координаты  $\rho$  и  $\varphi$  ( $\theta = \pi/4$ ) (рис. 16.2, а).

Получим следующие (непрерывные) функции (16.1):  $x = \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi$ ,  $y = \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi$ ,  $z = \rho \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Данной поверхности отвечает область  $(\Delta)$  – прямоугольник:  $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  (рис. 16.2, б). Взаимно однозначное соответствие между точками области и поверхности не вы-

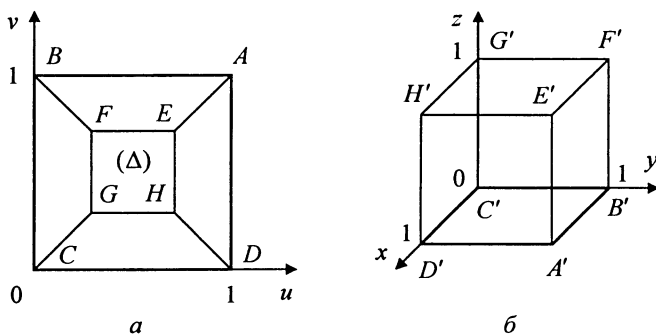


Рис. 16.1

полняется, так как при значениях  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$  получаем одни и те же точки поверхности, а вершине конуса отвечает целый отрезок точек:  $\rho = 0$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ .

Для задания этой же поверхности используем непрерывные функции  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ , а в качестве области  $(\Delta)$  возьмем замкнутый круг  $u^2 + v^2 \leq 1$  (см. рис. 16.2, а). Как видим соответствие между точками  $M$  области  $(\Delta)$  и точками  $M'$  поверхности взаимно однозначное.

Наконец заметим, что под поверхностями принято понимать не только простые поверхности, но и составленные из конечного числа частей – простых поверхностей, не пересекающихся, но примыкающих одна к другой. Среди составленных таким образом поверхностей будут как ограниченные контурами, так и замкнутые поверхности. Представителем первых может служить часть конуса из примера 16.2, вторых – полная поверхность куба из примера 16.1. Часть конуса можно составить из одной, двух, или более частей (простых поверхностей), поверхность куба – из двух и более.

Приведем (без строгого обоснования) пример поверхности, которую нельзя составить из конечного числа простых поверхностей.

**16.3. Поверхность, которую нельзя разбить на конечное число простых поверхностей.** Таким примером может служить сфера со счетным множеством круглых (их границы – окружности – оста-

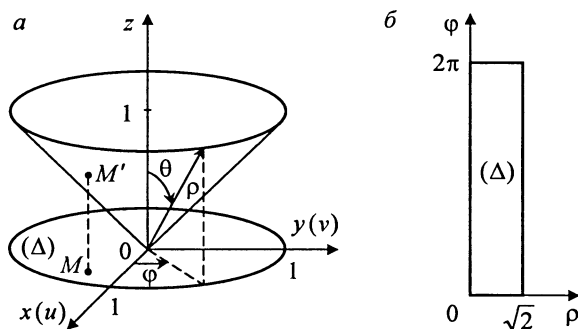


Рис. 16.2

ются в составе поверхности) непересекающихся вырезов, расположенных так, что в любой окрестности любой точки сферы находятся точки вырезов.

**Уравнение касательной плоскости.** Пусть в области  $(\Delta)$  непрерывны функции (16.1) и их частные производные первого порядка. Рассмотрим функциональную матрицу

$$\begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} \quad (16.2)$$

и точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  поверхности, отвечающую значениям  $(u_0, v_0)$  параметров. Пусть в точке  $(u_0, v_0)$  отличается от нуля хотя бы один из определителей второго порядка матрицы (16.2):

$$A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}. \quad (16.3)$$

Тогда в точке  $M_0$  поверхности существует касательная плоскость, определяемая уравнением

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (16.4)$$

Для начала заметим, что непрерывность функций (16.1) в области  $(\Delta)$  не является необходимым условием существования касательной плоскости (16.4) в некоторой точке поверхности. Но и отбросить в утверждении условие непрерывности функций (16.1) нельзя. Построение соответствующих контрпримеров включено в упражнения к разделу.

Существование и непрерывность частных производных функций (16.1) в некоторой точке  $(\Delta)$  не является необходимым условием существования касательной плоскости в соответствующей точке поверхности. Контрпример.

**16.4. Поверхность, при параметрическом задании которой  $z'_u, z'_v$  равны  $+\infty$  на прямой  $u + v = 0$ , но имеющая касательную плоскость всюду.** Пусть  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = \sqrt[3]{u + v}$ , область  $(\Delta)$  – квадрат  $|u| + |v| \leq 1$  (рис. 16.3, а). Функция, выражающая  $z$ , не имеет

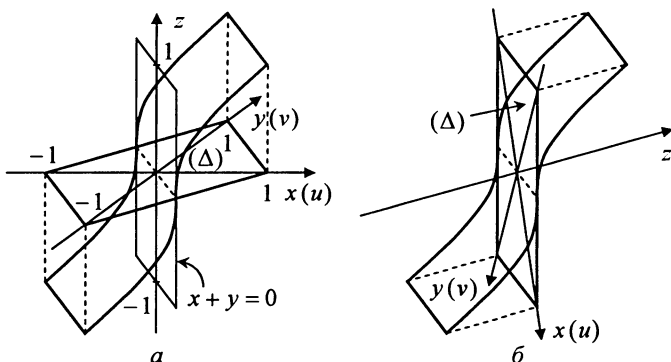


Рис. 16.3

в точках  $u + v = 0$  конечных частных производных  $z'_u, z'_v$ . Явное уравнение данной поверхности  $z = \sqrt[3]{x + y}$  определяет график, который имеет параллельную оси  $Oz$  касательную плоскость  $x + y = 0$  во всех точках  $x + y = 0, z = 0$  поверхности (общую).

Однако убрать из утверждения условие существования и непрерывности частных производных функций (16.1) нельзя. Приведем контрпример.

**16.5. Поверхность, при параметрическом задании которой  $z'_u, z'_v$  не существуют и нигде не имеющая касательной плоскости.** Если в предыдущем контрпримере положить  $z = W(u + v)$ , где  $W(t)$  – функция Вейерштрасса, всюду непрерывная, но нигде не

имеющая производной, см. пример 3.19, оставив прочие предположения неизменными, то полученное при этом явное уравнение «поверхности»  $z = W(x + y)$ , определит график, ни в какой точке не имеющий касательной плоскости.

Если в точке  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  все три определителя (16.3) обращаются в нуль (точка  $M_0$  – особая точка поверхности), то о существовании касательной плоскости ничего сказать нельзя. Приведем по одному примеру существования и несуществования касательной плоскости в особой точке.

**16.6, 16.7. Поверхности: имеющая (и не имеющая) в своей особой точке касательную плоскость.** Положим  $x = u^3$ ,  $y = v^3$ ,  $z = u^3 + v^3$ , область  $(\Delta)$  – квадрат  $-1 \leq u, v \leq 1$ . Несложно убедиться, что при таком задании поверхности выполняется взаимно одно-

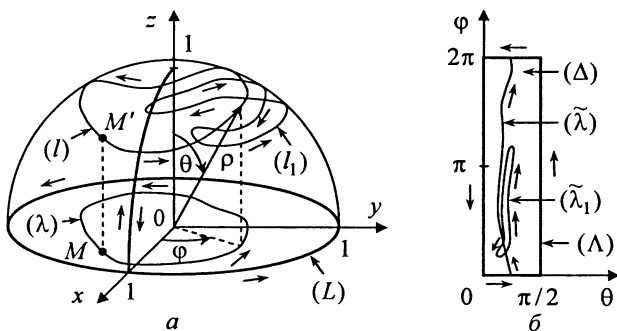


Рис. 16.4

значное соответствие между точками области  $(\Delta)$  и точками поверхности, так как функции  $x = u^3$ ,  $y = v^3$  строго монотонные. Получим для значений параметров  $u_0 = 0$ ,  $v_0 = 0$  точку  $M_0(0, 0, 0)$  поверхности, в ней

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 3u^2 \\ 3v^2 & 3v^2 \end{vmatrix} = 0, \quad B = \begin{vmatrix} 3u^2 & 3u^2 \\ 3v^2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad C = \begin{vmatrix} 3u^2 & 0 \\ 0 & 3v^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Однако эта поверхность определяется явным уравнением  $z = x + y$ ,  $-1 \leq x, y \leq 1$ , она является плоскостью, проходящей через точку  $M_0(0, 0, 0)$ , и в любой своей точке имеет касательную плоскость, совпадающую с ней самой.

Рассмотрим поверхность из примера 16.2, заданную в сфериче-

ской системе координат:  $x = \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi$ ,  $y = \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi$ ,  $z = \rho \frac{\sqrt{2}}{2}$ , область  $(\Delta)$  – прямоугольник  $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Рассмотрим вершину конуса  $M_0$ , которой отвечает значение  $\rho = 0$ , в ней

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}_{\rho=0} = 0, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \\ 0 & -\rho \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \end{vmatrix}_{\rho=0} = 0,$$

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi & \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi \\ -\rho \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \varphi & \rho \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \varphi \end{vmatrix}_{\rho=0} = 0. \text{ Заметим, что в точке } M_0 \text{ (вер-}$$

шине конуса) касательная плоскость к поверхности не существует.

**Ориентация поверхности и выбор ее стороны.** Предположим, что  $(S)$  простая гладкая поверхность, ограниченная простым замкнутым контуром  $(L)$ . Выберем определенную сторону поверхности  $(S)$ . Замкнутый контур  $(L)$  поверхности отвечает замкнутому контуру  $(\Lambda)$  области  $(\Delta)$  на плоскости параметров  $uv$ . Пусть положительному обходу контура  $(\Lambda)$  отвечает положительный (отрицательный) обход контура  $(L)$ . Тогда и для любых простых контуров  $(\lambda)$  в области  $(\Delta)$  и  $(l)$  на поверхности  $(S)$ , соответствующих друг другу, имеет место то же самое: положительный обход  $(\lambda)$  влечет за собой положительный (отрицательный) обход  $(l)$ . При этих условиях выбранная сторона поверхности будет характеризоваться нормалью с направляющими косинусами, выраженными следующими формулами, в которых берутся знаки плюс (минус):

$$\cos \alpha = \pm \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \beta = \pm \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos \gamma = \pm \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

где  $A, B, C$  заданы формулами (16.3) и хотя бы одно из них не равно нулю.

Заметим, что в любом случае, при заранее выбранной стороне поверхности, можно так изменить параметрическое задание поверхности, чтобы положительному обходу контура  $(\Lambda)$  отвечал положительный обход контура  $(L)$ . Соответствующее упражнение помещено в конец раздела.

Посмотрим, будет ли соблюдаться соответствие обходов простых контуров в области  $(\Delta)$  и на поверхности  $(S)$ , в случае, когда простая гладкая поверхность задается в сферических координатах, т.е. с нарушением взаимно однозначного соответствия точек области  $(\Delta)$  и поверхности  $(S)$ . Пример.

**16.8. Простая гладкая поверхность, заданная двумя способами, при одном соблюдается соответствие обходов контуров**

( $\lambda$ ) на ( $\Delta$ ) и ( $l$ ) на ( $S$ ), при другом – нет. Рассмотрим верхнюю полусферу, заданную двумя следующими способами: явным уравнением  $z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ , и в сферической системе координат (рис. 16.4, а). Выберем верхнюю сторону полусферы. При первом задании взаимно однозначное соответствие между точками  $M$  замкнутого круга  $x^2 + y^2 \leq 1$  и точками  $M'$  полусферы соблюдается, и положительному обходу любого простого контура ( $\lambda$ ) в круге отвечает положительный же обход простого контура ( $l$ ) на полусфере. Однако при задании в сферической системе координат это будет не так. Рассмотрим область ( $\Delta$ ):  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  (рис. 16.4, б). Простой положительно ориентированной граничной кривой ( $\Lambda$ ) области ( $\Delta$ ), отвечает не граничная кривая ( $L$ ) полусферы (окружность  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ), а она же, дополненная дважды проходимой на полусфере дугой:  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$ . Хотя этот контур не является простым (имеет самопересечения в точках названной дуги), он ориентирован положительно. При этом самой (замкнутой) граничной окружности ( $L$ ) полусферы отвечает в области ( $\Delta$ ) только отрезок  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , граничной кривой ( $\Lambda$ ) области ( $\Delta$ ). И вообще, любому простому контуру ( $l$ ) на полусфере, охватывающему ее полюс, отвечает некоторая незамкнутая кривая ( $\tilde{\lambda}$ ) в ( $\Delta$ ).

В то же время простому контуру ( $\tilde{\lambda}_1$ ) в области ( $\Delta$ ), лежащему внутри ( $\Delta$ ), отвечает простой контур ( $l_1$ ) на полусфере, не охватывающий ее полюса. Это объясняется тем, что между внутренними точками области ( $\Delta$ ) и полусферы взаимно однозначное соответствие соблюдается. При этом соблюдается и соответствие положительных обходов простых контуров в области ( $\Delta$ ) и на полусфере.

**Определение двусторонних поверхностей, состоящих из нескольких простых гладких кусков.** Рассмотрим поверхность ( $S$ ) как связное множество, которое является объединением простых и гладких поверхностей (кусков) ( $S_1$ ), ( $S_2$ ), ..., ( $S_m$ ), примыкающих друг к другу по ребрам – общим частям их контуров. Пусть каждый из этих кусков в отдельности – двусторонняя поверхность. Для каждого куска ( $S_i$ ),  $i = \overline{1, m}$ , на его контуре ( $K_i$ ) можно выбрать в качестве положительного одно из двух направлений, этим

выбором определится сторона поверхности ( $S_i$ ). Если среди  $2^m$  возможных вариантов выбора существует такой, что общая часть (ребро) контуров двух любых примыкающих кусков проходится для этих кусков в противоположных направлениях (рис. 16.5, а), то тогда, и только тогда поверхность ( $S$ ) – двусторонняя. Сторона поверхности ( $S$ ) определяется, как совокупность выбранных таким образом сторон ее  $m$  кусков.

Заметим, что корректность определения обеспечивается тем, что замена направления контуров всех кусков сохраняет описанное в определении свойство противоположности направлений общей части контуров у двух примыкающих кусков. Этим обеспечивается переход от одной стороны поверхности к другой. Приведем иллюстративные примеры.

**16.9. Сравнение цилиндрического кольца и листа Мебиуса:** для первого возможно, для второго – нет, согласование ориентации составляющих их кусков. Рассмотрим две незамкнутые поверхности: цилиндрическое кольцо и лист Мебиуса. Каждую из них можно представить составленной из двух простых гладких кусков (рис. 16.5). Но если для первой поверхности описанный в определе-

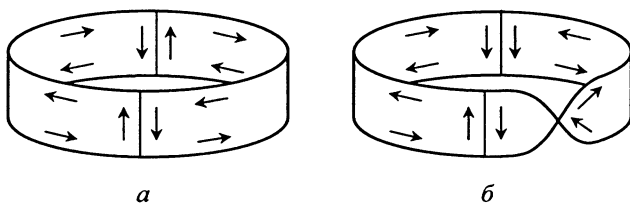


Рис. 16.5

нии выбор направлений контуров отдельных ее кусков возможен (рис. 16.5, а), то для второй – невозможен (рис. 16.5, б). Первая поверхность двусторонняя, вторая – односторонняя. Смена направлений контуров у всех кусков в случае кольца приведет к смене его стороны, а в случае листа Мебиуса такого результата не даст. Заметим, что обе граничные кривые кольца оказались одинаково ориентированы. У листа Мебиуса его единственная граничная кривая не оказалась ориентированной вообще.

**16.10. Сравнение сферы и бутылки Клейна:** для первой возможно, для второй – нет, согласование ориентации составляющих их кусков. Рассмотрим две замкнутые поверхности: сферу и бутылку Клейна. Представим их составленными из простых гладких кусков (рис. 16.6).

Сферу составим из четырех одинаковых кусков, примыкающих

друг к другу вдоль экватора и двух, лежащих в одной плоскости, меридианов (рис 16.6, *а*). У каждого куска сферы выберем внешнюю сторону, соответствующие направления их контуров показаны на рисунке стрелками. Условие, данное в определении для двусторонней поверхности, выполняется: общие части контуров любых двух примыкающих кусков проходятся для этих кусков в противоположных направлениях.

Бутылку Клейна представим себе симметричной, относительно некоторой плоскости и составим из четырех кусков, также попарно симметричных относительно этой плоскости (рис. 16.6, *б*). Куски примыкают друг к другу вдоль линии ( $L$ ) пересечения бутылки Клейна с плоскостью ее симметрии (эта линия замкнута и имеет самопересечения) и вдоль двух круговых разрезов: на «горлышке» и

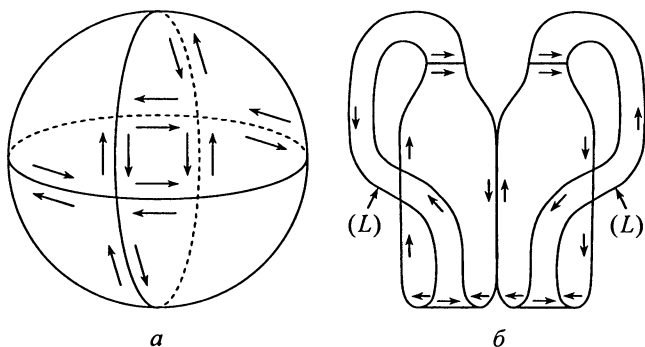


Рис. 16.6

«донышке». Разрез на «донышке» проходит по окружности контакта «стола» и стоящей на нем «бутылки». Куски бутылки Клейна можно назвать «полукорпусом» и «полуручкой» – их по две штуки. Каждый из этих кусков – простая гладкая поверхность. Для обозримости на рисунке одну из половинок бутылки Клейна развернем на угол  $180^\circ$  и симметрично совместим обе половинки. Принять даже на любой одной половинке направления контуров двух ее кусков так, чтобы выполнялось условие определения для двусторонней поверхности нельзя. Каждая из половинок – односторонняя незамкнутая поверхность. Однако можно принять направления контуров кусков половинок так, см. рис. 16.6, *б*, чтобы вдоль линии ( $L$ ) общие части контуров примыкающих кусков проходились для этих кусков в противоположных направлениях. Легко проверить это на рисунке, мысленно совместив края половинок. Из сказанного сле-



дует, что бутылка Клейна – односторонняя замкнутая поверхность. Смена направлений контуров у всех кусков в случае сферы приведет к смене ее стороны, а в случае бутылки Клейна – нет.

## 16.2. Площадь поверхности

**Определение площади поверхности, заданной явным уравнением.** Пусть поверхность  $(S)$  задана явным уравнением  $z = f(x, y)$ , где функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна на ограниченной квадратуемой и замкнутой области  $(D)$  плоскости  $xy$  и имеет в этой области непрерывные частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ . Пусть квадратуемые области  $(D_1), (D_2), \dots, (D_n)$  образуют разбиение  $T$  области  $(D)$  с диаметром  $\lambda_T$ . Дополним разбиение  $T$  выбором точек  $P_i(x_i, y_i)$  в пределах  $(D_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , получим размеченное разбиение  $T'$ . Точкам  $P_i(x_i, y_i)$  соответствуют точки  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  на поверхности  $(S)$ , где  $z_i = f(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  (рис. 16.7, а). Пусть  $\gamma_i$  угол между нормалью к поверхности  $(S)$  в точке  $M_i$  и осью  $z$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Рассмотрим часть  $(S_i)$  касательной плоскости к поверхности  $(S)$  в точке  $M_i$ , имеющую своей проекцией на плоскость  $xy$ , область  $(D_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Известно, что площадь  $S_i = \frac{D_i}{|\cos \gamma_i|}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Назовем площадью  $S$  поверхности  $(S)$  предел

$$S = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S_i = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{|\cos \gamma_i|}. \quad (16.5)$$

В определении для приближения площадей кусков поверхности, отвечающих областям  $(D_i)$ , используются площади кусков  $(S_i)$  касательных плоскостей к поверхности в точках  $M_i$ . Заметим, что выше в определении длины незамкнутой кривой использовалась не сумма длин отрезков касательных к точкам кривой, что было бы аналогично (16.5), а сумма длин звеньев вписанных в кривую ломаных. При этом за длину кривой принимался предел длин вписанных в кривую ломаных, при условии стремления максимальной длины звена ломаной к нулю. Казалось бы, и в случае поверхности можно за ее площадь принять предел площадей вписанных в нее многогранных поверхностей, при условии, что максимум диаметров граней стремится к нулю.

Известный пример Шварца, [2], т. II, с. 304–306, показал некорректность такого подхода к определению площади поверхности. Здесь мы дадим схожий пример, но с другой вписанной в цилиндр многогранной поверхностью, построение которой несколько более наглядно.

**16.11. Некорректность определения площади поверхности как предела площадей, вписанных в нее многогранных поверхностей.** Имеем боковую поверхность цилиндра (далее для кратко-

сти – поверхность цилиндра) радиуса  $R$  и высоты  $H$ . Впишем в нее следующую многогранную поверхность. Построим на поверхности цилиндра  $n$  равноотстоящих его образующих. Каждую из них разобьем на  $m$  равных отрезков с концами в  $m+1$  точке. Получим  $n(m+1)$  точек, лежащих на поверхности цилиндра и являющихся вершинами  $nm$  равных прямоугольников (рис. 16.7, б). Длины соответствующих сторон прямоугольников будут равны:  $\frac{H}{m}$  – длине от-

резков образующих,  $2R \sin \frac{\pi}{n}$  – длине хорд, стягивающих дуги окружностей радиуса  $R$  с центральными углами  $\frac{2\pi}{n}$ . Упомянутые равные прямоугольники (их  $nm$ ) образуют многогранную поверхность ( $Q$ ), вписанную в поверхность цилиндра.

Если остановиться на такой многогранной поверхности, то не-

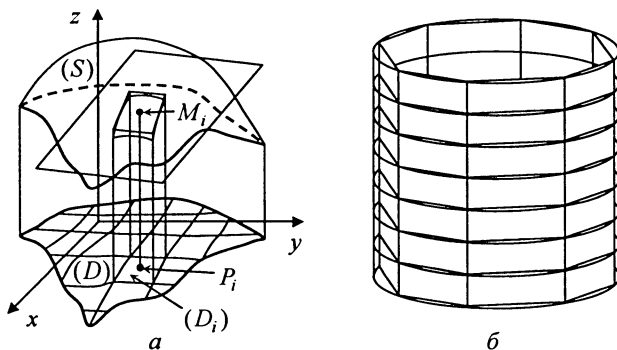


Рис. 16.7

корректность подхода к определению площади поверхности не будет обнаружена. Действительно, площадь  $Q$  вписанной поверхности равна  $Q = nm \frac{H}{m} 2R \sin \frac{\pi}{n} = 2\pi RH \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}$ , а ее предел при диаметре  $\delta \rightarrow 0$  граней (они одинаковы) или, что то же, при  $n \rightarrow \infty$ ,  $m \rightarrow \infty$  равен  $\lim_{\delta \rightarrow 0} Q = 2\pi RH \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = 2\pi RH$ . Это соответствует формуле площади боковой поверхности цилиндра.

Но перейдем от построенной многогранной поверхности ( $Q$ ) к другой ( $Q^*$ ), казалось бы, более близкой для поверхности цилиндра (рис. 16.8). Заменим каждый из  $nm$  равных прямоугольников че-

тырьмя боковыми гранями пирамиды, построенной на этом прямоугольнике, как основании, с вершиной на поверхности цилиндра и высотой, имеющей основание в центре прямоугольника (рис. 16.8, а). Сразу заметим, что высота  $h$  пирамиды равна  $h = R \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)$ .

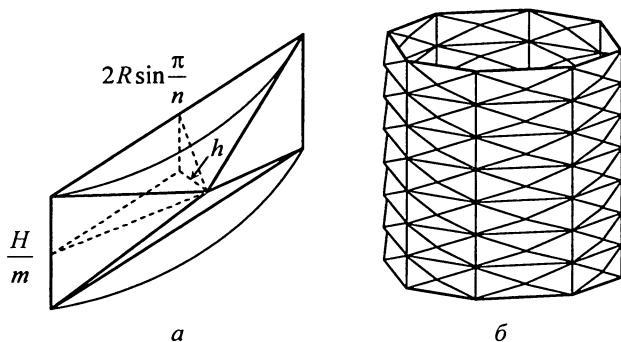


Рис. 16.8

Получим вписанную в поверхность цилиндра многогранную поверхность ( $Q^*$ ), состоящую из  $4nm$  треугольных граней (рис. 16.8, б). Выразим ее площадь

$$Q^* = 2nmQ_1 + 2nmQ_2, \quad (16.6)$$

где  $Q_1$  – площадь треугольника (грани) с основанием длиной  $\frac{H}{m}$ ,

$Q_2$  – с основанием длиной  $2R \sin \frac{\pi}{n}$ . Имеем

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{H}{m} \sqrt{R^2 \sin^2 \frac{\pi}{n} + R^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2} = \frac{RH}{m} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos \frac{\pi}{n}} = \\ &= \frac{RH}{m} \sin \frac{\pi}{2n}, \quad Q_2 = R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\left( \frac{H}{2m} \right)^2 + R^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2}. \end{aligned}$$

Вычислим по отдельности пределы двух слагаемых в правой части (16.6) при  $\delta \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty$ ), где  $\delta$  – максимальный диаметр грани. Получим  $\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} (2nmQ_1) = \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} 2nRH \sin \frac{\pi}{2n} =$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \pi R H \frac{\sin(\pi/(2n))}{\pi/(2n)} = \pi R H, \text{ т.е. предел первого слагаемого в}$$

(16.6) равен половине площади поверхности цилиндра. Далее

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} (2nmQ_2) &= \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} 2nmR \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{H^2}{(2m)^2} + R^2 4 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} Rn \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{H^2 + 16m^2 R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \pi R \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \sqrt{H^2 + \pi^4 R^2 \frac{m^2}{n^4} \left( \frac{\sin(\pi/(2n))}{\pi/(2n)} \right)^4} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \pi R \sqrt{H^2 + \pi^4 R^2 q^2}, \text{ где, следуя Шварцу, обозначили} \\ q &= \frac{m}{n^2}. \end{aligned}$$

Предел не существует, так как для различных случаев стремления  $n$  и  $m$  к бесконечности получим разные частичные пределы. Например, если примем  $m = n$ , то получим частичный предел, равный  $\pi R H$  (в этом случае частичный предел  $\lim_{\delta \rightarrow 0} Q^* = 2\pi R H$  —

площади поверхности цилиндра). Однако если примем  $m = n^3$ , то получим частичный предел, равный  $+\infty$ . Последний случай объясняется тем, что при  $m$ , возрастающем значительно быстрее, чем  $n$ , грани пирамид, обращенные вверх и вниз (по оси  $z$ ) становятся все более горизонтальными, а многогранная поверхность ( $Q^*$ ) становится все более складчатой.

Определение предполагает, что функция, задающая поверхность, всюду имеет непрерывные частные производные. Соответственно поверхность всюду является гладкой. Однако есть непрерывные поверхности ни в одной окрестности любой своей точки не являющиеся гладкими, но для которых вполне корректно определяется понятие площади. Контрпример.

**16.12. Непрерывная, простая, но всюду негладкая поверхность, имеющая площадь.** Построим поверхность, используя в качестве прототипа пирамиду Коха, [12], с. 202–203. Но в отличие от пирамиды Коха, имеющей бесконечную площадь поверхности, получим поверхность конечной площади. Построение проведем в виде рекуррентной процедуры.

На нулевом шаге имеем правильный треугольник единичной площади.

На шаге 1 разобьем его средними линиями на 4 равных пра-

вильных треугольника и заменим центральный из них тремя такими же треугольниками, образующими боковые грани пирамиды, построенной на отброшенном треугольнике, как на основании, и с вершиной, расположенной с внешней стороны (выше) отброшенного треугольника (рис. 16.9). Получим непрерывную поверхность ( $S_1$ ), составленную из  $k_1 = 4 + 2 = 6$  одинаковых правильных треугольников, имеющую площадь  $S_1 = 1 \cdot \frac{4+2}{4}$ .

На шаге  $n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , для каждого из  $k_{n-1}$  треугольников, полученных на шаге  $n-1$ , сделаем следующее: разобьем его на  $4^n$

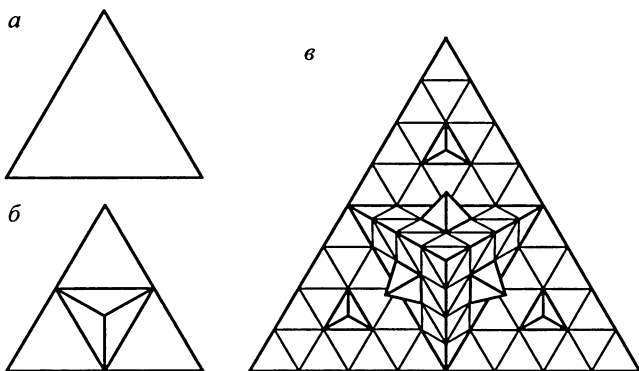


Рис. 16.9

равных правильных треугольников (последовательным построением средних линий) и заменим центральный из них тремя такими же треугольниками, образующими боковые грани пирамиды, построенной на отброшенном треугольнике, как на основании, и с вершиной, расположенной с внешней стороны отброшенного треугольника. Получим непрерывную поверхность ( $S_n$ ), составленную из  $k_n = k_{n-1}(4^n + 2)$  одинаковых правильных треугольников, имеющую площадь  $S_n = S_{n-1} \frac{4^n + 2}{4^n}$ . Отсюда  $S_n = 1 \cdot \frac{4+2}{4} \cdot \frac{4^2+2}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{4^n+2}{4^n}$ .

На рис. 16.9 показаны поверхности:  $a$  – исходный правильный треугольник;  $b$  – ( $S_1$ );  $c$  – ( $S_2$ ), линейные размеры увеличены в два раза для различимости деталей.

Процесс построения продолжим для всех  $n = 2, 3, \dots$ , т.е. для

бесконечного числа шагов. Заметим, что все поверхности  $(S_n)$  простые (не имеют самопересечений). Бесконечная последовательность  $\{(S_n)\}$  непрерывных поверхностей  $(S_n)$  равномерно сходится при  $n \rightarrow \infty$  к некоторой непрерывной поверхности  $(S)$ . В силу своего построения непрерывная поверхность  $(S)$  также не имеет самопересечений, но уже не является, в отличие от кусочно-гладких поверхностей  $(S_n)$ , кусочно-гладкой. Действительно, она в любой окрестности любой своей точки имеет ребра. В то же время за площадь  $S$  поверхности  $(S)$  естественно принять величину предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

Представляя  $S_n$  в виде:  $S_n = 1 \cdot \left(1 + \frac{2}{4}\right) \cdot \left(1 + \frac{2}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{2}{4^n}\right)$  и учитывая, что ряд  $\frac{2}{4} + \frac{2}{4^2} + \dots + \frac{2}{4^n} + \dots$  знакопостоянный и сходится, получаем сходимость при  $n \rightarrow \infty$  бесконечного произведения, т.е. существование конечного предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Площадь поверхности  $(S)$ :  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  существует.

В определении площади рассмотрены простые гладкие поверхности, задаваемые явным уравнением  $z = z(x, y)$ , они двусторонние. Очевидно, определение распространяется на случаи аналогичных поверхностей, задаваемых явными уравнениями  $y = y(z, x)$  и  $x = x(y, z)$ .

Дальнейшим обобщением является аддитивный перенос понятия площади на поверхности, которые допускают разложение кусочно-гладкими кривыми на конечное число простых и гладких кусков, каждый из которых задается одним из названных трех явных уравнений. Проиллюстрируем примерами два обстоятельства: такое обобщение распространяется не на все поверхности; оно охватывает не только двусторонние, но и односторонние поверхности.

**16.13. Поверхность, которую нельзя разложить на конечное число простых и гладких кусков.** Поверхность, построенная в предыдущем примере, не может быть разложена на конечное число гладких кусков. Более того, любая ее часть не является гладкой. Сама процедура построения этой поверхности  $(S)$  такова, что все ребра поверхностей  $(S_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , являются таковыми и для  $(S)$ . Иными словами, на поверхности  $(S)$  ребра (в их точках нарушается гладкость поверхности) располагаются всюду плотно.

**16.14. Распространения понятия площади на односторонние поверхности – на примере листа Мебиуса.** Заметим, что в опреде-

лении нигде не используется понятие стороны поверхности. Если односторонняя поверхность может быть разложена на конечное число простых гладких кусков, задаваемых явными уравнениями, то за ее площадь можно принять сумму площадей этих кусков – они двусторонние. В примерах 16.9 и 16.10 такие разложения на простые гладкие куски показаны для листа Мебиуса и бутылки Клейна.

Здесь подробно рассмотрим первый случай. Зададим лист Мебиуса как линейчатую поверхность, образованную движением отрезка прямой единичной длины (образующей) по направляющей кривой – окружности единичного радиуса. Это движение определим следующим образом: середина отрезка равномерно совершает один полный оборот по окружности, при этом отрезок, перпендикулярный окружности, равномерно совершает половину полного оборота

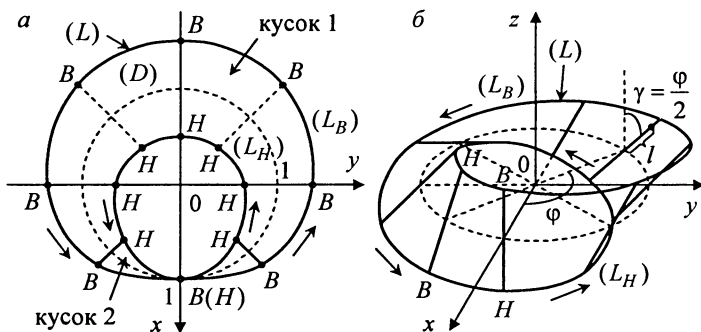


Рис. 16.10

вокруг своей середины. Для определенности рассмотрим окружность  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$  в плоскости  $xy$  с центром в начале координат. Примем вертикальное положение отрезка (параллельное оси  $z$ ) с расположением его середины в точке  $(1, 0, 0)$  за начальное (рис. 16.10). На рисунке показан лист Мебиуса:  $a$  – вид со стороны оси  $z$ ;  $b$  – общий вид. Показано восемь положений образующей  $NB$ .

Движение середины отрезка пусть происходит в положительном (против часовой стрелки) направлении, а его вращение также против часовой стрелки, если смотреть навстречу (против движения его середины). Концы отрезка обозначены точками  $H$  (нижний в начале движения) и  $B$  (верхний в начале движения). Во время движения точка  $H$  перемещается вверх по спирали  $(L_H)$  и в конце движения совмещается с начальным положением точки  $B$ . Напротив, точка  $B$

опускается по спирали ( $L_B$ ) и завершает свое движение в начальном положении точки  $H$ . Таким образом, обе спирали составляют непрерывную замкнутую граничную кривую ( $L$ ) листа Мебиуса, ее обход отмечен стрелками. При таком задании листа Мебиуса его можно разбить на два простых гладких куска – выделены на рисунке. Кусок 1 можно задать явным уравнением  $z = z(x, y)$ , а кусок 2 – явным уравнением  $x = x(y, z)$ . Если отбросить отрезок (вертикальный) в его начальном положении, что не изменит площади поверхности, то поверхность можно задать одним явным уравнением вида  $z = z(x, y)$ .

Как и в случае двусторонней поверхности, несложно показать, что площадь поверхности односторонней не будет зависеть от способа ее разложения на двусторонние куски, задаваемые явными уравнениями.

**Площадь поверхности, заданной явным уравнением.** Пусть поверхность ( $S$ ) задана явным уравнением  $z = f(x, y)$ , где функция  $f(x, y)$  определена и непрерывна на ограниченной квадрируемой и замкнутой области ( $D$ ) плоскости  $xy$  и имеет в этой области непрерывные частные производные

$p = \frac{\partial z}{\partial x}$  и  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ . Тогда ее площадь  $S$  выразится интегралом

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy. \quad (16.7)$$

Для существования интеграла (16.7) необходима ограниченность подынтегральной функции, а значит, ограниченность частных производных  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$

и  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ . Однако в случаях, когда  $p$  и  $q$  не определены в отдельных точках

или на кривых нулевой площади и не ограничены в окрестностях таких точек и кривых, у поверхностей может существовать конечная площадь и формула (16.7) может оказаться применимой. Приведем простой пример.

**16.15. Поверхность, для которой  $p = z'_x$  и  $q = z'_y$  бесконечны вдоль граничной кривой области ( $D$ ), но площадь выражается формулой  $S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy$ .** Рассмотрим верхнюю полусферу

ру  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , область ( $D$ ):  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Найдем

$$p = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad q = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$



$$\begin{aligned}
 1 + p^2 + q^2 &= \frac{R^2 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}, \\
 S &= R \iint_{(D)} \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = R \iint_{(\Delta)} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = \\
 &= \left| t = R^2 - \rho^2 \right|_{dt = -2\rho d\rho} = -2\pi R \frac{1}{2} \int_{R^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\pi R \sqrt{t} \Big|_{R^2}^0 = 2\pi R^2.
 \end{aligned}$$

Заметим, что результат получился правильным. Однако вычисленный двойной интеграл формально (по своему определению) в области  $(D)$  не существует, так как подынтегральная функция неограниченна в окрестности ее границы, т.е. окружности  $x^2 + y^2 = R^2$ . На самой этой границе подынтегральная функция не определена, т.е. в этом случае мы имеем несобственный интеграл, и надо было рассмотреть его в области  $(D^*)$ :  $x^2 + y^2 \leq (R - \delta)^2$ , где  $0 < \delta < R$ , а затем выполнить при  $\delta \rightarrow 0$  предельный переход.

Корректность использования формулы (16.7) может зависеть от выбора системы координат. Пример.

**16.16. Поверхность, для вычисления площади которой формула  $S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$  неприменима в одной и применима**

**в другой системе координат.** Рассмотрим задание поверхности функцией из контрпримера 16.4. Пусть  $z = \sqrt[3]{x + y}$ , область  $(D)$  – квадрат  $|x| + |y| \leq 1$  (см. рис. 16.3, а). В этом случае получаем

$p = q = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x + y)^2}}$ , и интеграл (16.7) не существует, так как подын-

тегральная функция неограниченна в окрестности отрезка прямой  $x + y = 0$ , лежащего в области  $(D)$ . Можно разбить область  $(D)$  названной прямой на две части, и вычислить два несобственных интеграла. Но удобнее задать данную поверхность иначе, например, перейти к другой декартовой прямоугольной системе координат, в которой поверхность будет определяться функцией  $z = -(x + y)^3$ ,  $|x| + |y| \leq 1$ . Для этого необходимо повернуть систему координат на

угол  $\frac{\pi}{2}$  вокруг прямой  $x + y = 0$  в любом направлении (см. рис. 16.3,

б). В этом случае использование формулы (16.7) уже будет полностью корректным.

**Площадь поверхности в общем случае.** Пусть задана параметрически простая гладкая поверхность  $(S)$ , т.е. непрерывные функции (16.1) имеют в области  $(\Delta)$  непрерывные частные производные первого порядка. И пусть в любой точке  $(\Delta)$  хотя бы один из определителей (16.3) не равен нулю. Тогда площадь  $S$  поверхности  $(S)$  выразится интегралом

$$S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du \, dv. \quad (16.8)$$

Пусть  $x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = E$ ,  $x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v' = F$ ,  $x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2 = G$ , где  $E$ ,  $F$ ,  $G$  – гауссовы коэффициенты поверхности. Тогда  $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$ ,

$$S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv. \quad (16.9)$$

Неравенство нулю в любой точке области  $(\Delta)$  хотя бы одного из определителей  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и гладкость поверхности не являются необходимыми условиями применимости формул (16.8) и (16.9). Приведем пример.

**16.17. Поверхность  $(S)$ , для которой на некотором отрезке области  $(\Delta)$   $A$ ,  $B$ ,  $C$  равны нулю и нарушается гладкость, но формула  $S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, dudv$  применима.** Вернемся к боковой

поверхности части конуса, рассмотренной в примерах 16.2 и 16.7, где эта поверхность задана в сферической системе координат.

Из примера 16.7 имеем:  $A = -\frac{1}{2}\rho \cos \varphi$ ,  $B = -\frac{1}{2}\rho \sin \varphi$ ,  $C = \frac{1}{2}\rho$ . От-

сюда находим  $A^2 + B^2 + C^2 = \frac{1}{2}\rho^2$ . Вычислим интеграл (16.8), область  $(\Delta)$  – прямоугольник  $0 \leq \rho \leq \sqrt{2}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Получим

$$\iint_{(\Delta)} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, d\rho \, d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_0^{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2},$$

что соответствует формуле для площади боковой поверхности круглого конуса:  $S = \pi r l$ , где  $r$  – радиус основания,  $l$  – длина образующей. В нашем случае  $r = 1$ ,  $l = \sqrt{2}$ . Формула (16.8) дала верный результат, несмотря на то, что  $A = B = C = 0$  на всем отрезке  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $\rho = 0$ , из области  $(\Delta)$ , и в вершине конуса, которая отвечает этому отрезку, нарушается гладкость поверхности.

### 16.3. Поверхностные интегралы первого рода

**Определение поверхностного интеграла первого рода.** Пусть в точках двусторонней поверхности  $(S)$  определена функция  $f(M) = f(x, y, z)$ . Предположим, что поверхность  $(S)$  задана явным уравнением  $z = z(x, y)$ , где функция  $z(x, y)$  определена, непрерывна и имеет непрерывные частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$  на ограниченной квадратируемой и замкнутой области  $(D)$  плоскости  $xy$ . Рассмотрим разбиение  $T$  области  $(D)$  на квадратируемые области  $(D_1), (D_2), \dots, (D_n)$ , пусть  $\lambda_T$  – диаметр  $T$ . Дополним разбиение  $T$  выбором точек  $P_i(x_i, y_i) \in (D_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , получим размеченное разбиение  $T'$ . Точкам  $P_i(x_i, y_i)$  соответствуют точки  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  на поверхности  $(S)$ , где  $z_i = z(x_i, y_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  (см. рис. 16.7, а). Рассмотрим часть  $(S_i)$  поверхности  $(S)$ , имеющую своей проекцией на плоскость  $xy$  область  $(D_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Пусть  $S_i$  – площадь  $(S_i)$ . Запишем интегральную сумму

$$\sigma_{T'} = \sum_{i=1}^n f(M_i) S_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) S_i.$$

Если существует конечный предел  $I = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sigma_{T'} = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) S_i$ , то он называется поверхностным интегралом первого рода от функции  $f(M) = f(x, y, z)$  по поверхности  $(S)$  и обозначается так:

$$\iint_{(S)} f(M) dS = \iint_{(S)} f(x, y, z) dS. \quad (16.10)$$

Многие примеры и контрпримеры, приведенные ранее для других видов интегралов, могут быть модифицированы для данного случая, скажем, примеры, относящиеся к несуществованию интегралов. Здесь мы остановимся только на моментах, характерных для поверхностных интегралов.

Определение допускает поверхностные интегралы первого рода только в случае двусторонних поверхностей. Однако его можно с помощью простой оговорки перенести и на односторонние поверхности. Контрпример.

**16.18. Возможность переноса поверхностных интегралов первого рода на односторонние поверхности.** Возьмем на односторонней кусочно-гладкой поверхности  $(S)$  простую кусочно-гладкую кривую  $(L)$  (возможно замкнутую), отбрасывание которой превращает поверхность в двустороннюю. Для соблюдения условий определения интеграла заменим кривую  $(L)$  двумя ее экземплярами  $(L')$  и  $(L'')$  – двумя берегами разреза, которые становятся дугами (частями) контура полученной двусторонней поверхности. Например, за такую кривую  $(L)$  можно принять: для рассмотренного в

примере 16.14 листа Мебиуса – любую его образующую (отрезок); для изображенной на рис. 16.6, б, бутылки Клейна – простую замкнутую кривую, рассекающую ее (бутылки) «корпус» или «ручку». Определяющим моментом является то, что величина интеграла первого рода не зависит от выбора указанной кривой ( $L$ ) на поверхности ( $S$ ). Показать это предлагаем читателям в упражнениях.

В определении по умолчанию допускаются случаи, когда замкнутый контур, ограничивающий поверхность, имеет бесконечную длину. Однако такого рода примеры практически не встречаются. Приведем подобный пример.

**16.19. Пример существования интеграла по поверхности, ограниченной кусочно-гладким контуром бесконечной длины.** Пусть поверхность ( $S$ ) задана явным уравнением  $z = x^2 + y^2$  в области ( $P$ ), а область ( $P$ ) взята из примера 9.21 (рис. 9.9). Предположим, что функция  $f(M) = f(x, y, z)$  непрерывная. Напомним, что граница области ( $P$ ) составлена из двух имеющих бесконечную длину дуг гиперболических спиралей, одного конечного отрезка и точки  $(0, 0)$ , которая является предельной (асимптотической) точкой для этих спиралей. Область ( $P$ ) ограничена и квадрируема. Поверхность ( $S$ ), очевидно, гладкая, ограниченная кусочно-гладким контуром, имеющим бесконечную длину. Разбиение  $T$  области ( $P$ ) на конечное число  $n$  квадрируемых областей возможно, но одна из них, скажем  $(P_n)$ , содержащая точку  $(0, 0)$ , совершает бесконечное число витков вокруг точки  $(0, 0)$  и имеет контур бесконечной длины. Но это обстоятельство, так как  $(P_n)$  квадрируема и может иметь сколь угодно малый диаметр, а функция  $z = x^2 + y^2$  гладкая, не мешает существованию поверхностного интеграла (16.10).

Выше в случае двойного интеграла допускалась несвязность множеств, получаемых при разбиении области интегрирования. Этот момент актуален и для поверхностного интеграла. Рассмотрим пример.

**16.20. Область задания поверхности такая, что любое ее разбиение  $T$  с диаметром  $\lambda_T < 1/2$  содержит несвязные множества разбиения.** Предположим, что поверхность ( $S$ ) задана явным уравнением  $z = x^2 + y^2$  в области  $\overline{G}$ , где область  $\overline{G}$  взята из контрпримера 15.2 (см. рис. 15.1, а). Пусть функция  $f(M) = f(x, y, z)$  непрерывная. Область  $\overline{G}$  ограничена, квадрируема и замкнута. Напомним, что разбиение области  $\overline{G}$  на конечное число достаточно малых

(например, диаметром меньше  $1/2$ ) связных областей невозможно, см. контрпример 15.2. Для применимости определения к данному случаю требуется допущение несвязных областей (множеств) в разбиениях области  $\bar{G}$ . Эти несвязные множества должны содержать счетную совокупность связных компонент (из всех «зубчиков», начиная с некоторого).

**Сведение к обыкновенному двойному интегралу.** Пусть определенная в точках поверхности  $(S)$  функция  $f(x, y, z)$  ограничена:  $|f(x, y, z)| \leq L$ . Тогда выполняется равенство интегралов

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (16.11)$$

при этом если существует один из них, то существует и другой.

Пользуясь формулой (16.11), вычислим поверхностный интеграл первого рода по листу Мебиуса.

**16.21. Пример вычисления поверхностного интеграла первого рода по листу Мебиуса.** В качестве подынтегральной рассмотрим всюду определенную и непрерывную, ограниченную во всем пространстве функцию

$$f(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{(\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + 4x^2 + 4y^2 + z^2}}.$$

Зададим параметрическими уравнениями (16.1) лист Мебиуса  $(S)$ , рассмотренный в примере 16.14. Для этого введем криволинейные координаты  $\varphi$ ,  $\gamma$  и  $l$  (рис. 16.10, б), где  $\varphi$  есть полярный угол середины отрезка  $H\bar{B}$  (образующей),  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ;  $\gamma$  – угол между вектором  $\overline{HB}$  и ортом оси  $z$ ,  $0 \leq \gamma \leq \pi$ ;  $l$  – линейная координата точки на оси с началом в середине отрезка  $H\bar{B}$  и ортом  $\overline{HB}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq l \leq \frac{1}{2}$ . Заметим, что на листе Мебиуса  $\gamma = \varphi/2$ , и в качестве параметров примем координаты  $\varphi$  и  $l$ .

Получим следующие параметрические уравнения:

$x = \cos \varphi \left(1 + l \sin \frac{\varphi}{2}\right)$ ,  $y = \sin \varphi \left(1 + l \sin \frac{\varphi}{2}\right)$ ,  $z = l \cos \frac{\varphi}{2}$ . Далее найдем:

$$x'_\varphi = -\sin \varphi \left(1 + l \sin \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{l}{2} \cos \varphi \cos \frac{\varphi}{2}, \quad x'_l = \cos \varphi \sin \frac{\varphi}{2};$$

$$y'_\varphi = \cos \varphi \left(1 + l \sin \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{l}{2} \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2}, \quad y'_l = \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2};$$

$$z'_\varphi = -\frac{l}{2} \sin \frac{\varphi}{2}, \quad z'_l = \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Найдем гауссовы коэффициенты поверхности (выкладки из-за их громоздкости опускаем):

$$E = x'^2_\varphi + y'^2_\varphi + z'^2_\varphi = \left(1 + l \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2, \quad G = x'^2_l + y'^2_l + z'^2_l = 1,$$

$$F = x'_\varphi x'_l + y'_\varphi y'_l + z'_\varphi z'_l = 0.$$

Отсюда  $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\left(1 + l \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ . Выразим функцию

$f(x, y, z)$  через параметры  $\varphi$  и  $l$ , последовательно получим

$$x^2 + y^2 = \left(1 + l \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2, \quad (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 = l^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 + 4x^2 + 4y^2 + z^2 &= l^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 4\left(1 + l \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 + l^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \\ &= 4\left(1 + l \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 + l^2 = 4\left(\left(1 + l \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2\right), \end{aligned}$$

извлекая из обеих частей квадратный корень и деля 2 на него, наконец, получим

$$f(x(\varphi, l), y(\varphi, l), z(\varphi, l)) = \left(\sqrt{\left(1 + l \sin \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}\right)^{-1}.$$

Интеграл  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \iint_{(\Delta)} f(x(\varphi, l), y(\varphi, l), z(\varphi, l)) \sqrt{EG - F^2} d\varphi dl =$

$$= \iint_{(\Delta)} d\varphi dl = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1/2}^{1/2} dl = 2\pi. \text{ Заметим, что мы фактически разрезали}$$

лист Мебиуса по его образующей, отвечающей значению  $\varphi = 0$ , заменив ее двумя «берегами» разреза, отвечающими значениям  $\varphi = 0$  и  $\varphi = 2\pi$ . При этом поверхность стала двусторонней.

**Сведение к обыкновенному двойному интегралу при задании поверхности явным уравнением.** Пусть поверхность  $(S)$  задана явным уравнением:  $z = z(x, y)$ ,  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ . Тогда формула (16.11) примет вид:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy, \quad (16.12)$$

где  $(D)$  – проекция поверхности  $(S)$  на плоскость  $xy$ .

Вычислим с помощью формулы (16.12) интеграл первого рода по поверхности, ограниченной кусочно-гладкой кривой бесконечной длины.

**16.22. Пример вычисления интеграла первого рода по поверхности, ограниченной кусочно-гладким контуром бесконечной длины.** Рассмотрим поверхность  $(S)$  из примера 16.19, заданную явным уравнением  $z = x^2 + y^2$  в области  $(P)$ , которая описана в примере 9.21 (см. рис. 9.9). Пусть  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 3z + 1}$ . Имеем  $p = 2x$ ,  $q = 2y$ ,  $\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}$ . Получаем по формуле (16.12), переходя затем к полярным координатам:

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} f(x, y, z) dS &= \iint_{(P)} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} dx dy = \\ &= \iint_{(P)} (1 + 4(x^2 + y^2)) dx dy = \iint_{(\Delta)} (1 + 4\rho^2) \rho d\rho d\varphi = \\ &= \frac{1}{8} \int_{\pi/2}^{+\infty} d\varphi \int_{1/(\varphi + \pi/2)}^{1/\varphi} (1 + 4\rho^2) d(1 + 4\rho^2) = \frac{1}{2 \cdot 8} \int_{\pi/2}^{+\infty} d\varphi (1 + 4\rho^2)^2 \Big|_{1/(\varphi + \pi/2)}^{1/\varphi} = \\ &= \frac{1}{16} \int_{\pi/2}^{+\infty} \left( 1 + 8\varphi^{-2} + 16\varphi^{-4} - 1 - 8\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^{-2} - 16\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^{-4} \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{16} \left( -8\varphi^{-1} - \frac{16}{3}\varphi^{-3} + 8\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^{-1} + \frac{16}{3}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)^{-3} \right) \Big|_{\pi/2}^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} + \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{\pi^3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\pi} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\pi^3} = \frac{1}{2\pi} + \frac{7}{3\pi^3}. \end{aligned}$$

Заметим, что особенность поверхности (огибание ею асимптотической точки бесконечное число раз) привела к несобственному интегралу.

## 16.4. Поверхностные интегралы второго рода

**Определение поверхностного интеграла второго рода.** Примем предположения и обозначения из данного выше определения поверхностного интеграла первого рода. Выберем одну из сторон поверхности  $(S)$ . Запишем интегральную сумму  $\sigma_T = \sum_{i=1}^n f(M_i) \tilde{D}_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \tilde{D}_i$ , где  $\tilde{D}_i$  — площади областей  $(D_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , входящих в разбиение  $T$ , взятые со знаком плюс, если выбрана верхняя сторона поверхности  $(S)$ , или со знаком минус, если выбрана ее нижняя сторона.

Если существует конечный предел  $I = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sigma_{T'} = \lim_{\lambda_T \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \tilde{D}_i$ , то он называется поверхностным интегралом второго рода от функции  $f(M) = f(x, y, z)$  по стороне поверхности  $(S)$  и обозначается так:

$$\iint_{(S)} f(M) dx dy = \iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy. \quad (16.13)$$

Аналогично определяются поверхностные интеграла второго рода:

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dy dz \text{ и } \iint_{(S)} f(x, y, z) dz dx. \quad (16.14)$$

Если для интеграла (16.13) задание всей поверхность явным уравнением  $z = z(x, y)$  невозможно, то она разбивается (если это допустимо) на конечное число кусков, каждый из которых либо задается уравнением вида  $z = z(x, y)$ , либо является цилиндрическим с образующими, параллельными оси  $z$ , в последнем случае интегралы (16.13) равны нулю. Выбор стороны каждого куска соответствует выбору стороны всей поверхности.

Сказанное переносится и на случаи задания поверхности явными уравнениями  $x = x(y, z)$  и  $y = y(z, x)$  для соответствующих интегралов (16.14).

Рассматривается и сумма всех трех интегралов

$$\iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad (16.15)$$

где  $P, Q, R$  – функции от  $(x, y, z)$ , заданные в точках поверхности  $(S)$ . В этом случае для поверхности  $(S)$  должны существовать все три описанные выше разбиения на куски (рис. 16.11).

На рис. 16.11, а поверхность для интеграла (16.13) разбита на семь частей, части 1, 2, 4, 7 задаются уравнениями вида  $z = z(x, y)$  – каждая своим. Части 2, 4, 7 ориентированы положительно, часть 1 – отрицательно. Части 3, 5, 6 – цилиндрические с образующими, параллельными оси  $z$ . На рис. 16.11, б та же поверхность разбита для интеграла (16.15) уже на девять частей.

Поверхностный интеграл первого рода, очевидно, не существует по поверхности с бесконечной площадью. Однако поверхностные интегралы второго рода (16.13) и (16.14) могут в этом случае существовать. Пример.

**16.23. Интеграл второго рода по стороне поверхности бесконечной площади.** Рассмотрим интеграл  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$ , по верх-

ней стороне поверхности  $(S)$ , заданной в области  $(D)$ :  $-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}$ ,

$0 \leq y \leq 1$  явным уравнением  $z(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$  Эта по-

верхность является непрерывной, кусочно-гладкой, цилиндрической, она имеет бесконечную площадь. Последнее следует из того,



что бесконечную длину имеет направляющая линия этой цилиндрической поверхности, см. пример 9.49, а ее образующая – единичный отрезок. Проекция поверхности  $(S)$  на плоскость  $xy$  есть прямоугольная замкнутая область  $(D)$  с площадью  $D = 2/\pi$ . Пусть функция  $f(x, y, z)$  всюду определена и непрерывна. При таких предположениях интеграл  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$  существует. Это следует из

приводимого ниже сведения данного интеграла к обыкновенному двойному интегралу при задании поверхности явным уравнением.

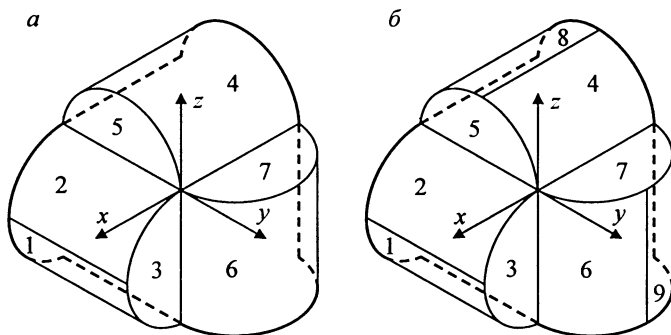


Рис. 16.11

При этом нарушение гладкости поверхности на отрезке  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , где частная производная  $\frac{\partial z}{\partial x}$  не существует, не влияет на существование интеграла, так как область  $(D)$  можно указанным отрезком разбить на две области, а поверхностный и отвечающий ему двойной интегралы разбить (соответствующим образом) на два интеграла каждый.

Отметим, что в настоящем определении, как и в предыдущем, актуальна несвязность множеств, получаемых при разбиении области  $(D)$ . Соответствующий пример легко получить модификацией примера 16.20.

В определении вводятся поверхностные интегралы второго рода по выбранной стороне двусторонней поверхности. Покажем, что перенос этого определения на односторонние поверхности некорректен.

**16.24. Контрпример, показывающий некорректность рассмотрения интеграла второго рода по односторонней поверхности.** Пусть  $f(x, y, z) \equiv 1$ . Снова обратимся к листу Мебиуса из примера 16.14. Если отбросить любую из его образующих (отрезков

$HB$ ), см. рис. 16.10, заменив его двумя берегами разреза, то получим двустороннюю поверхность. Если отбросить отрезок  $HB$  в его начальном положении (с серединой в точке  $(1, 0, 0)$ ), то поверхность, обозначим ее  $(S)$ , выразится явным уравнением вида  $z = f(x, y)$  и будет иметь верхнюю и нижнюю стороны. Если отбросить отрезок  $HB$  в промежуточном положении, когда его середина находится в точке  $(-1, 0, 0)$ , а сам он лежит в плоскости  $xu$ , то поверхность, обозначим ее  $(S^*)$ , будет составлена из двух кусков, задаваемых явными уравнениями вида  $z = f(x, y)$ , каждый своим. Куски будут смыкаться по начальному положению отрезка  $HB$ , при этом любая из двух сторон поверхности  $(S^*)$  будет составлена из верхней стороны одного из них и нижней стороны другого.

Интеграл второго рода  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(S)} dx dy$  будет равняться  $D$  для верхней стороны поверхности  $(S)$  и  $-D$  для нижней ее стороны, где  $D$  – площадь области  $(D)$  на плоскости  $xu$ , на которую проектируется поверхность  $(S)$ , см. рис. 16.10, а.

Интеграл второго рода  $\iint_{(S^*)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(S^*)} dx dy = 0$  для обеих сторон поверхности  $(S^*)$ . Это объясняется тем, что  $(S^*)$  состоит из двух кусков (проекция каждого из них на плоскость  $xu$  имеет площадь  $D/2$ ) и каждая из двух сторон  $(S^*)$  составлена из верхней стороны одного из кусков и нижней стороны другого, т.е. для каждой стороны поверхности  $(S^*)$  будем иметь  $\iint_{(S^*)} dx dy = \frac{D}{2} - \frac{D}{2} = 0$ .

Обратим внимание на следующее. Если в случае интеграла второго рода по выбранной стороне двусторонней поверхности мы удаляем из этой поверхности любую кусочно-гладкую кривую, то значение интеграла не меняется. Но, как следует из данного контр-примера, удаление различных кусочно-гладких кривых (отрезков) из односторонней поверхности, превращающее ее в двустороннюю, приводит к различным значениям интеграла второго рода (для каждой из двух полученных сторон), т.е. описанный перенос определения на односторонние поверхности некорректен, так как не обеспечивает однозначность величин интегралов второго рода.

Второе обстоятельство заключается в том, что если не превращать одностороннюю поверхность в двустороннюю, а вычислять поверхностный интеграл второго рода по всей (одной) стороне по-

верхности, то будем всегда получать нуль. Это объясняется тем, что интеграл будет распространен по обеим сторонам (с разной ориентацией) любого куска (двустороннего) односторонней поверхности.

**Сведение к обыкновенному двойному интегралу при задании поверхности явным уравнением.** Пусть поверхность  $(S)$  задана явным уравнением  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ , где функция  $z(x, y)$  непрерывна вместе со своими частными производными  $p = \frac{\partial z}{\partial x}$  и  $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ . Тогда выполняется

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy, \quad (16.16)$$

где в правой части принимается знак плюс, если интеграл берется по верхней стороне  $(S)$ , и знак минус, если – по нижней. При этом из существования любого интеграла в (16.16) следует существование другого. Равенства, аналогичные (16.16), справедливы и для двух других поверхностных интегралов.

Приведем пример, в котором функция, задающая поверхность, неограниченна в любой окрестности отдельной точки и не существуют пределы у частных производных  $p$  и  $q$  в этой точке. Однако применение формулы (16.16) и рассмотрение несобственного интеграла дают результат.

**16.25. Интеграл второго рода по стороне неограниченной поверхности.** В примере 16.22 был вычислен интеграл первого рода по поверхности  $(S)$ , заданной явным уравнением  $z = x^2 + y^2$  в области  $(P)$ . Область  $(P)$  подробно описана в примере 9.21 (см. рис. 9.9). Она имеет спиралевидную форму и огибает асимптотическую точку  $(0, 0)$  бесконечное число раз.

Изменим пример 16.22. Пусть поверхность  $(S)$  задается функцией  $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ , определенной в области  $(P)$ , кроме точки  $(0, 0)$ , и неограниченной в любой окрестности этой точки. Не существуют пределы частных производных  $p = -\frac{2x}{(x^2 + y^2)^2}$  и  $q = -\frac{2y}{(x^2 + y^2)^2}$  при  $x \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow 0$ . Это следует из несовпадения частичных пределов при  $x \rightarrow 0$  ( $y = 0$ ) и  $y \rightarrow 0$  ( $x = 0$ ). Спиралевидная поверхность  $(S)$  совершает бесконечное число оборотов вокруг оси  $z$  и уходит по этой оси в бесконечность. Примем  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^{-1}}$  и выберем верхнюю сторону поверхности.

Вычислим поверхностный интеграл второго рода, используя формулу (16.16). Для корректности использования формулы рас-

смотрим область  $(P^*)$  – часть области  $(P)$ , заключенную между дугами спиралей при  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \varphi^*$ ,  $\varphi^* > \frac{\pi}{2}$ . Вычислив интеграл для области  $(P^*)$ , выполним затем предельный переход при  $\varphi^* \rightarrow +\infty$ . Соответствующую области  $(P^*)$  часть поверхности  $(S)$  обозначим через  $(S^*)$ , обозначим через  $(\Delta^*)$  область  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \varphi^*$ ,  $\frac{1}{\varphi + \pi/2} \leq \rho \leq \frac{1}{\varphi}$ .

Получим, переходя к полярным координатам

$$\begin{aligned} \iint_{(S^*)} f(x, y, z) dx dy &= \iint_{(P^*)} f(x, y, z(x, y)) dx dy = \sqrt{2} \iint_{(P^*)} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \\ &= \sqrt{2} \iint_{(\Delta^*)} \rho^2 d\rho d\varphi = \sqrt{2} \int_{\pi/2}^{\varphi^*} d\varphi \int_{1/(\varphi + \pi/2)}^{1/\varphi} \rho^2 d\rho = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_{\pi/2}^{\varphi^*} d\varphi \rho^3 \Big|_{1/(\varphi + \pi/2)}^{1/\varphi} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \int_{\pi/2}^{\varphi^*} \left( \varphi^{-3} - \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right)^{-3} \right) d\varphi = -\frac{\sqrt{2}}{3 \cdot 2} \left( \varphi^{-2} - \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right)^{-2} \right) \Big|_{\pi/2}^{\varphi^*} = \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{6} \left( \varphi^{*-2} - \left( \varphi^* + \frac{\pi}{2} \right)^{-2} - \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} \right). \end{aligned}$$

Предельный переход при  $\varphi^* \rightarrow +\infty$  дает  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \frac{\sqrt{2}}{2\pi^2}$ .

Если допустить разрывность функции  $z = z(x, y)$  и несуществование частных производных  $p$  и  $q$ , то из существования интеграла в (16.16) справа может и не следовать существование интеграла слева. Контрпример.

**16.26. Функции  $f(x, y, z)$  и  $z = z(x, y)$  такие, что существует двойной интеграл  $\iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy$ , но не существует по-**

**верхностный интеграл  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$ .** Пусть  $f(x, y, z) = xyz^2$

и  $(S)$  задана явным уравнением  $z = z(x, y) = 2D(x + y) - 1$ , здесь  $D(t)$  – функция Дирихле, область  $(D)$  – квадрат  $0 \leq x, y \leq 1$ . Так как тождественно выполняется  $(z(x, y))^2 = (2D(x + y) - 1)^2 \equiv 1$ , то в этом случае двойной интеграл  $\iint_{(D)} f(x, y, z(x, y)) dx dy = \iint_{(D)} xy dx dy$

существует. В то же время интеграл  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$  не существует.

ет, так как в определении интегралов второго рода поверхности с разрывами не допускаются.

**Сведение к поверхностному интегралу первого рода при задании поверхности явным уравнением.** В предположениях предыдущего утверждения выполняется равенство

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(S)} f(x, y, z) \cos v dS, \quad (16.17)$$

где  $v$  есть угол между нормалью к поверхности  $(S)$  и осью  $z$ . Причем существование одного из интегралов в (16.17) влечет за собой существование другого. Заметим, что при выборе верхней стороны поверхности нормаль направляется вверх, при выборе нижней стороны – вниз. Равенства, аналогичные (16.17), справедливы и для двух других поверхностных интегралов.

Заметим, что из существования в (16.17) интеграла слева может и не следовать существование интеграла справа, если поверхность не является квадратруемой. Приведем контрпример.

**16.27. Кусочно-гладкая поверхность  $(S)$  такая, что интеграл  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$  существует, а интеграл  $\iint_{(S)} f(x, y, z) \cos v dS$  не существует.** Пусть функция  $f(x, y, z)$  всюду определена и непрерывна. Рассмотрим непрерывную, кусочно-гладкую поверхность  $(S)$  из контрпримера 16.23, которая задана в области  $(D)$ :

$$-\frac{1}{\pi} \leq x \leq \frac{1}{\pi}, 0 \leq y \leq 1, \text{ уравнением } z(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Как было показано, данная поверхность имеет бесконечную площадь, но интеграл второго рода  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$  по выбранной

стороне поверхности  $(S)$  существует. Однако отвечающий ему поверхностный интеграл первого рода  $\iint_{(S)} f(x, y, z) \cos v dS$  не существует.

Это следует из определения поверхностного интеграла первого рода. Если, согласно определению интеграла второго рода, член интегральной суммы это произведение значения функции в точке элемента поверхности на площадь (с определенным знаком) проекции элемента, то, согласно определению интеграла первого рода, – произведение значения функции в точке элемента на площадь самого элемента. Так как при любом разбиении поверхности  $(S)$ , имеющей бесконечную площадь, на конечное число элементов хотя бы один из них имеет бесконечную площадь, то составление инте-

гральной суммы невозможно, а интеграл первого рода не может существовать.

**Сведение к обыкновенному двойному интегралу при параметрическом задании поверхности.** Пусть поверхность  $(S)$  простая, незамкнутая и гладкая. При сделанных ранее предположениях о параметрическом задании поверхности имеем

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C du dv, \quad (16.18)$$

где справа берется знак плюс, если ориентация плоскости  $uv$  отвечает ориентации поверхности  $(S)$ , и знак минус – в противном случае. Из существования любого интеграла в (16.18) следует существование другого. Равенства, аналогичные (16.18), справедливы и для двух других интегралов.

Если допустить разрывность функции  $z = \chi(u, v)$  и несуществование частных производных  $z'_u, z'_v$ , то из существования интеграла в (16.18) справа может и не следовать существование интеграла слева. Контрпример.

**16.28. Функции  $f(x, y, z)$ ,  $x(u, v)$ ,  $y(u, v)$  и  $z(u, v)$  такие, что существует двойной интеграл  $\iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C du dv$ ,**

**но не существует поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$ .**

Пусть функция  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$  и  $(S)$  задана уравнениями:  $x = u - v$ ,  $y = u + v$ ,  $z = 2D(u + v) - 1$ , область  $(\Delta)$  есть квадрат  $0 \leq u, v \leq 1$ . Имеем:  $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (u - v)^2 + (u + v)^2 + 1$ , так как  $z^2 = (2D(u + v) - 1)^2 \equiv 1$ ;  $C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$  и двойной интеграл  $\iint_{(\Delta)} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) C du dv$  существует.

Однако поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy$  не существует,

так как определение поверхностного интеграла второго рода не допускает разрывов у поверхности  $(S)$ .

**Формула Стокса.** Пусть кусочно-гладкая поверхность  $(S)$  ограничена замкнутым кусочно-гладким контуром  $(L)$ . И пусть в некоторой, содержащей внутри себя поверхность  $(S)$ , пространственной области заданы функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывные в этой области вместе со своими частными производными. Тогда имеют место формулы:

$$\int_{(L)} P dx = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy, \quad \int_{(L)} Q dy = \iint_{(S)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz,$$

$$\int_{(L)} R dz = \iint_{(S)} \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \frac{\partial R}{\partial x} dz dx. \quad (16.19)$$

И выполняется формула Стокса:

$$\begin{aligned} & \int_{(L)} P dx + Q dy + R dz = \\ & = \iint_{(S)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx. \end{aligned} \quad (16.20)$$

Заметим, что сторона поверхности  $(S)$  и направление обхода контура  $(L)$  соответствуют друг другу.

Непрерывность функций  $P$ ,  $Q$  и  $R$  не является необходимым условием для выполнения формул (16.19). Контрпример.

**16.29.** Функция  $P(x, y, z)$  со всюду плотным множеством точек разрыва, для которой  $\int_{(L)} P dx = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ . Для определенности рассмотрим первую из формул (16.19). Пусть  $P(x, y, z) = f(x, y, z) + R(x)$ , где функция  $f(x, y, z)$  — всюду непрерывна вместе со своими частными производными,  $R(x)$  — функция Римана (не путать с функцией  $R(x, y, z)$ ). И пусть контур  $(L)$  такой, что любая плоскость, перпендикулярная оси  $x$ , может пересекать его только в конечном числе точек. Тогда получим

$$\iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_{(S)} \frac{\partial f}{\partial z} dz dx - \frac{\partial f}{\partial y} dx dy = \int_{(L)} f dx,$$

так как  $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ ; а  $\int_{(L)} P dx = \int_{(L)} f dx + \int_{(L)} R(x) dx = \int_{(L)} f dx$ , так

как  $\int_{(L)} R(x) dx = 0$ . Последнее следует из того, что функция Римана

интегрируема, и на контуре  $(L)$  только счетное множество точек имеет рациональную координату  $x$ , и, следовательно,  $R(x) \neq 0$  только на счетном множестве точек контура. Видим, что для функции  $P(x, y, z)$  первая формула (16.19) выполняется. Однако эта функция разрывна во всех точках любой плоскости  $x = x^*$ , где  $x^*$  — произвольное рациональное число.

Однако условие непрерывности функций  $P$ ,  $Q$  и  $R$  удалять из утверждения нельзя. Контрпример.

**16.30.** Разрывная функция  $P(x, y, z)$ , для которой формула

$\int_{(L)} P dx = \iint_{(S)} \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$  не имеет смысла. Если в предыду-

щем контрпримере заменим функцию  $R(x)$  на  $D(x)$ , где  $D(x)$  – функция Дирихле, сохранив все прочие предположения, и положим  $P(x, y, z) = f(x, y, z) + D(x)$ , то правая часть первой формулы (16.19) будет по-прежнему равна  $\int_{(L)} f dx$ , так как и в этом случае

$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$ . Но левая часть первой формулы (16.19), т.е. ин-

теграл  $\int_{(L)} P dx$  не будет существовать, так как функция  $D(x)$  раз-

рывна в любой точке и неинтегрируема.

В случае квадратируемой поверхности, ограниченной кусочно-гладкой кривой, когда криволинейный интеграл слева в формуле Стокса существует, может не существовать поверхностный интеграл справа. Контрпример.

**16.31. Квадрируемая поверхность  $(S)$ , при которой существует интеграл  $\int_{(L)} P dx + Q dy + R dz$ , но не существует интеграл**

$\iint_{(S)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx$ . Вернемся к

контрпримеру 16.12, где была построена (с использованием в качестве прототипа пирамиды Коха) квадратируемая поверхность  $(S)$ . Полученные там в результате рекуррентной процедуры поверхности  $(S_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , являются простыми кусочно-гладкими, ограниченными общим кусочно-гладким контуром  $(L)$  – сторонами правильного треугольника. Таким образом, при задании функций  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ , непрерывных всюду в пространстве  $x, y, z$  вместе со своими частными производными, формула (16.20) в соответствии с утверждением выполняется для каждой поверхности  $(S_n)$ . Последовательность  $\{(S_n)\}$  непрерывных поверхностей  $(S_n)$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно сходится к непрерывной поверхности  $(S)$ , не имеющей самопересечений.

Поверхность  $(S)$  уже не является кусочно-гладкой, более того, то же можно сказать про любую ее часть. Однако эту поверхность, по ее построению, ограничивает тот же кусочно-гладкий контур  $(L)$ , который ограничивает все поверхности  $(S_n)$ . Отсюда получаем



существование криволинейного интеграла  $\int P dx + Q dy + R dz$ . Но

интеграл  $\iint_{(S)} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx$  не

существует в силу определения поверхностного интеграла второго рода, так как поверхность  $(S)$  не является кусочно-гладкой.

Формула Стокса неприменима в случае односторонних поверхностей.

**16.32. Неприменимость формулы Стокса к односторонним поверхностям – на примере листа Мебиуса.** Выше в примерах 16.14 и 16.24 рассматривался лист Мебиуса, см. рис. 16.10, и было отмечено что, если вычислять поверхностный интеграл второго рода (от любой функции), распространив его на всю сторону листа Мебиуса (она одна), то получим нуль. Поэтому интеграл в правой части формулы Стокса в этом случае будет равен нулю.

В то же время можно выбрать функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ , непрерывные всюду в пространстве  $x, y, z$  вместе со своими частными производными, такие, что криволинейный интеграл слева в формуле Стокса, взятый по простому, замкнутому и гладкому контуру  $(L)$  – краю листа Мебиуса, не будет равен нулю.

Подбор таких функций предоставляем в качестве упражнения читателям. При этом для параметрического задания контура  $(L)$ , через параметр  $\varphi$ , можно воспользоваться параметрическим заданием листа Мебиуса, через параметры  $\varphi$  и  $l$ , данным в примере 16.21. Удобно использовать представление  $(L)$  как объединения двух спиралей  $(L_H)$  и  $(L_B)$ , см. рис. 16.10.

### Упражнения

**16.1.** Построить рекуррентную процедуру получения на сфере  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  счетного множества круглых вырезов со свойствами, данными в примере 16.3, и суммарной площадью меньше  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 4\pi$ .

**16.2.** Привести контрпример, показывающий, что непрерывность функций в параметрических уравнениях (16.1) не является необходимым условием существования касательной плоскости в некоторой точке поверхности.

**16.3.** Если из условий существования касательной плоскости удалить непрерывность функций (16.1) в области  $(\Delta)$ , то получим ложное утверждение. Опровергнуть его контрпримером.

**16.4.** В примере 16.7 поверхность части конуса задана в сферической системе координат, при этом в вершине конуса (особой точке) определители  $A = 0$ ,  $B = 0$ ,  $C = 0$ . Рассмотреть другое параметрическое задание этой поверхности:

$x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = \sqrt{u^2 + v^2}$ , область  $(\Delta)$  – круг  $u^2 + v^2 \leq 1$ . Найти в этом случае определители  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Чему они равны в вершине конуса, т.е. при  $u = v = 0$ ?

16.5. Показать, что при заранее выбранной стороне поверхности  $(S)$  всегда можно так изменить параметрическое задание поверхности, что положительному обходу контура  $(\Lambda)$  области  $(\Delta)$  будет отвечать положительный обход контура  $(L)$  поверхности  $(S)$ .

16.6. Построить иллюстративный пример задания параметрическими уравнениями кусочно-гладкой простой поверхности  $(S)$ , при котором соблюдается соответствие направлений обходов произвольных простых контуров  $(\lambda)$  на  $(\Delta)$  и  $(l)$  на выбранной стороне  $(S)$ .

16.7. Показать примером, что условие неравенства нулю в любой точке  $(\Delta)$  хотя бы одного из определителей (16.3) не является необходимым для использования формулы площади поверхности  $(S)$ :  $S = \iint_{(\Delta)} \sqrt{EG - F^2} du dv$ .

16.8. В контрпримере 16.18 рассматривался вопрос переноса интеграла первого рода на односторонние поверхности. Показать, что необходимое для этого условие выполняется: величина интеграла первого рода не зависит от выбора на поверхности  $(S)$  кривой  $(L)$ , указанной в контрпримере 16.18.

16.9. В контрпримере 16.24 рассматривался поверхностный интеграл второго рода  $\iint_{(S)} f(x, y, z) dx dy = \iint_{(S)} dx dy = D$  по верхней стороне двусторонней по-

верхности  $(S)$ . Используя формулу (16.18) и параметрическое задание поверхности  $(S)$ , данное в примере 16.21, вычислить этот интеграл.

16.10. Исследовать возможность применения формулы Стокса в случае ограниченного кусочно-гладкого контура бесконечной длины из примера 9.21. В качестве поверхности  $(S)$  принять плоскую область  $(P)$ , лежащую в плоскости  $xy$ , в качестве контура  $(L)$  – границу  $(K)$  области  $(P)$ . Выбрать верхнюю сторону  $(P)$  и положительную ориентацию  $(K)$ .

Указание. Применить формулу Стокса к контуру конечной длины, составленному из части бесконечного контура, находящейся вне малой  $\delta$ -окрестности точки  $(0, 0)$ , и меньшей дуги границы этой окрестности. Затем выполнить предельный переход.

## РАЗДЕЛ 17

### ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

#### 17.1. Определение и свойства тройных интегралов

**Определение тройного интеграла.** Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена на ограниченной кубируемой области  $(V)$ . Рассмотрим разбиение  $T$  этой области на конечное число кубируемых множеств  $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$ , имеющих соответственно объемы  $V_1, V_2, \dots, V_n$ . Диаметр разбиения  $T$  обозначим через  $\lambda_T$ . Совокупность всех разбиений области  $(V)$  обозначим через  $A_{(V)}$ . Дополним разбиение  $T$  разметкой, взяв в пределах каждого  $i$ -го множества (элемента) разбиения  $(V_i)$  точку  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , получим размеченное разбиение  $T'$ . Совокупность всех размеченных разбиений области  $(V)$  обозначим через  $A'_{(V)}$ . Рассмотрим сумму  $\sigma(T') = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i$ , которую назовем интегральной суммой размеченного разбиения  $T'$ .

Число  $I$  называется тройным интегралом функции  $f(x, y, z)$  по области  $(V)$ , если для каждого числа  $\epsilon > 0$  существует число  $\delta > 0$  такое, что для любого размеченного разбиения  $T' \in A'_{(V)}$ , для которого  $\lambda_T < \delta$  выполняется неравенство  $|\sigma(T') - I| < \epsilon$ .

Тройной интеграл обозначается символом 
$$I = \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dV.$$

Используемые в определении понятия разбиения, диаметра разбиения, размеченного разбиения определены в разделе «Двойные интегралы».

Случаи несуществования определенных интегралов, приведенные в примерах 8.7 и 8.8, легко переносятся и на тройные интегралы. Дополнительно скажем о еще одной причине несуществования тройных (и двойных) интегралов. Пример.

**17.1. Несуществование тройных (и двойных) интегралов в случае неограниченной области.** Для определенного интеграла неограниченность промежутка интегрирования всегда означает, что промежуток имеет бесконечную длину. При разбиении такого про-

межутка на конечное число частей бесконечную длину имеет хотя бы одна из них, при этом интегральная сумма теряет смысл. Для тройных (двойных) интегралов существуют неограниченные области интегрирования с конечным объемом (площадью), см. контрпример 9.26 и рис. 9.11, *а*. Но определение на такой случай не распространяется, так как при разбиении области на конечное число частей хотя бы одна из них имеет бесконечный диаметр.

Контрпример 15.1, показывающий некорректность альтернативного (упрощенного) определения двойного интеграла, и контрпример 15.2, в котором обоснована допустимость несвязности множеств разбиения, могут быть адаптированы и для случая тройного интеграла. Сделать это предлагается в упражнениях к разделу.

В определении требуется кубируемость области интегрирования. Обычно в задачах и практических приложениях области интегрирования задают кусочно-гладкими граничными поверхностями. Приведем примеры областей, ограниченных не кусочно-гладкими поверхностями, но кубируемых.

**17.2, 17.3. Области, по которым можно интегрировать, но ограниченные не кусочно-гладкими поверхностями.** Область  $(V)$ , образованная счетным множеством замкнутых кубов, последовательно примыкающих гранями друг к другу, из примера 9.27, см. рис. 9.11, *б*. Там длины ребер  $a_n$  кубов  $(C_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , равны  $a_n = \frac{1}{2^n}$ . Так как  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ , то область  $(V)$  ограничена. Она кубируема по Жордану, но ее поверхность не является кусочно-гладкой, так как имеет не конечное, а счетное множество граней. Тройной интеграл в этой ограниченной кубируемой области может по определению рассматриваться.

В контрпримере 16.12 была построена, с использованием в качестве прототипа пирамиды Коха, непрерывная, но не кусочно-гладкая поверхность  $(S)$ , имеющая конечную площадь (см. рис. 16.9). Она имеет нулевой объем. Покажем это.

По своему построению поверхность  $(S_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , состоит из  $k_n = (4 + 2)(4^2 + 2) \dots (4^n + 2)$  одинаковых частей – правильных треугольников со сторонами  $l_n = l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2^n}$ , где  $l$  – длина стороны исходного правильного треугольника. Заметим, что на всех шагах  $m > n$  ни одна поверхность  $(S_m)$  не выходит за пределы слоя, построенного на поверхности  $(S_n)$ , толщиной  $l_{n+1}$  (в направлении

внешнего нормального вектора к  $(S_n)$ ), так как высота пирамид, которые строятся на шаге  $n+1$ , меньше их ребер, т.е. меньше  $l_{n+1}$ . Таким образом, и поверхность  $(S)$  находится целиком в пределах этого слоя. Но при  $n \rightarrow \infty$  толщина слоя  $l_{n+1}$  стремится к нулю, а площадь  $S_n$  поверхности  $(S_n)$  стремится к конечной величине  $S$ , поэтому объем слоя также стремится к нулю. Отсюда объем поверхности  $(S)$  нулевой.

Поверхность  $(S)$  ограничена правильным треугольником и располагается по одну сторону от его плоскости, эту сторону мы назвали внешней. Составим замкнутую поверхность  $(K)$  из четырех экземпляров поверхности  $(S)$  так, чтобы их граничные кривые (правильные треугольники) образовали ребра четырех граней тетраэдра. При этом каждую из четырех поверхностей  $(S)$  ориентируем внешней стороной вовне тетраэдра. Полученная замкнутая поверхность  $(K)$  ограничивает пространственную область  $(V)$ . Так как поверхность  $(K)$  имеет нулевой объем, то область  $(V)$  кубируема. В этой ограниченной кубируемой области тройной интеграл может рассматриваться в соответствии с его определением.

**Достаточное условие существования тройного интеграла.** Если все разрывы ограниченной функции лежат на конечном множестве поверхностей, имеющих нулевые объемы, то функция интегрируема.

Это только достаточное условие интегрируемости. Контрпримеры.

**17.4. Интегрируемая функция с плотным в области интегрирования множеством точек разрыва – счетной совокупностью поверхностей.** Пусть  $f(x, y, z) = R(x)D(y)D(z)$ , область  $(V)$ :  $0 \leq x, y, z \leq 1$ . У этой ограниченной функции точки разрыва – это лежащие в  $(V)$  точки плоскостей  $x = x^*$ , где  $x^*$  – любое рациональное число. Множество названных плоскостей счетное. Функция  $f(x, y, z)$  интегрируема согласно критерию Лебега, так как все ее точки разрыва (в пределах  $(V)$ ) могут быть помещены в счетную систему открытых прямоугольных параллелепипедов, имеющих суммарный объем, меньший любого заданного числа  $\varepsilon > 0$ .

Действительно, перенумеруем все рациональные числа на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ , получим последовательность  $\{r_n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Точки  $(r_n, y, z)$ ,  $0 \leq y, z \leq 1$ , поместим в открытый прямоугольный параллелепипед  $r_n - \varepsilon/(36 \cdot 2^n) < x < r_n + \varepsilon/(36 \cdot 2^n)$ ,  $-1 < y, z < 2$ . Его объ-

ем  $v_n = 3 \cdot 3 \cdot 2\varepsilon / (36 \cdot 2^n) = \varepsilon / 2^{n+1}$ . Сумма объемов всех параллелепипедов  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ .

**17.5\*. Интегрируемая функция, множество точек разрыва которой состоит из континуума поверхностей.** Пусть

$$f(x, y, z) = x + y + \gamma(z), \quad (17.1)$$

где  $\gamma(z)$  – характеристическая функция канторова множества  $C$ , область  $(V)$ :  $0 \leq x, y, z \leq 1$ . В этом случае имеем континуум плоскостей  $z = z^*$  точек разрыва, где  $z^* \in C$ , так как множество  $C$  имеет мощность континуума. Но функция (17.1) интегрируема, так как ее точки разрыва образуют множество нулевой меры. Покажем это.

По построению  $C$ , см. пример 8.14, счетное множество параллелепипедов  $(P_i)$ :  $0 \leq x, y \leq 1, z \in (l_i), i = 1, 2, \dots$ , где  $(l_i)$  – интервалы, удаляемые при построении множества  $C$ , не содержат точек разрыва. Так как сумма длин интервалов  $\sum_{i=1}^{\infty} l_i = 1$ , то сумма объемов

параллелепипедов  $\sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$ . Так как область  $(V)$  имеет объем  $V = 1$ , то множество точек разрыва имеет нулевую меру.

**Свойство независимости тройного интеграла от значений функции на конечном множестве поверхностей.** Существование и величина тройного интеграла сохраняются при переопределении функции (с сохранением ее ограниченности) на конечном множестве поверхностей с нулевыми объемами.

Изменение значений интегрируемой функции (с сохранением ее ограниченности) в континууме точек, если они образуют конечное число поверхностей с нулевым объемом, не влияет на интегрируемость функции и величину интеграла. Однако такое же изменение функции на некотором счетном множестве точек может привести к ее неинтегрируемости. Пример.

**17.6. Переопределение функции на счетном множестве точек, приводящее к ее неинтегрируемости.** Рассмотрим в кубе  $0 \leq x, y, z \leq 1$  функции  $f(x, y, z) \equiv 0$  и  $f^*(x, y, z) = D(x)D(y)D(z)$ . Функция  $f^*(x, y, z)$  отличается от  $f(x, y, z)$  тем, что на счетном множестве точек (все три координаты которых рациональны) ее значения равны единице. Функция  $f^*(x, y, z)$ , в отличие от  $f(x, y, z)$ , неинтегрируема, так как при любом разбиении куба на части в каждой из них находятся точки как с тремя рациональными

координатами, так и иные, т.е. нижняя и верхняя суммы Дарбу постоянны и равны:  $s = 0$ ,  $S = 1$  и не зависят от диаметра (мелкости)  $\lambda_T$  разбиения  $T$ . При этом имеем  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 1 \neq 0$ .

**Свойство аддитивности тройного интеграла от подынтегральной функции.** Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы по области  $(V)$ , то интегрируема функция  $f \pm g$  и выполняется

$$\iiint_{(V)} (f \pm g) dV = \iiint_{(V)} f dV \pm \iiint_{(V)} g dV.$$

**Свойство почленного интегрирования неравенств.** Если функции  $f$  и  $g$  интегрируемы по области  $(V)$  и на ней выполняется неравенство  $f \leq g$ , то

$$\iiint_{(V)} f dV \leq \iiint_{(V)} g dV.$$

**Свойство интегрируемости модуля интегрируемой функции.** Если интегрируема функция  $f$ , то интегрируема и функция  $|f|$  и выполняется

$$\left| \iiint_{(V)} f dV \right| \leq \iiint_{(V)} |f| dV.$$

Утверждения, обратные к трем данным, неверны. Составление контр-примеров вынесено в упражнения к разделу.

## 17.2. Переход от тройного интеграла к повторному

**Теорема о приведении тройного интеграла к повторному в случае области – параллелепипеда.** Пусть функция  $f(x, y, z)$  определена в прямоугольном параллелепипеде  $(T) = [a, b; c, d; e, f]$ , проекция  $(T)$  на плоскость  $yz$  – прямоугольник  $(R) = [c, d; e, f]$ . И пусть существует тройной интеграл

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT, \quad (17.2)$$

и для каждого фиксированного  $x \in [a, b]$  существует двойной интеграл

$$I(x) = \iint_{(R)} f(x, y, z) dR. \quad (17.3)$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \quad (17.4)$$

и выполняется равенство

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR. \quad (17.5)$$

Если при любых значениях  $x \in [a, b]$  и  $y \in [c, d]$  существует интеграл

$$\int_e^f f(x, y, z) dz, \quad (17.6)$$

то, заменяя двойной интеграл в равенстве (17.5) повторным, получим

$$\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz. \quad (17.7)$$

Так как область  $(T)$  – прямоугольный параллелепипед, то все переменные  $x$ ,  $y$  и  $z$  равноправны, и существует шесть формулировок теоремы, соответственно шесть формул вида (17.7). Геометрически это означает, что можно область  $(T)$  спроектировать на любую из трех координатных плоскостей, а каждую из трех плоских проекций затем спроектировать на одну из двух координатных осей, лежащих в соответствующей плоскости.

Теорема требует совместного существования тройного интеграла (17.2) и двойного (17.3). Встает вопрос: могут ли существовать двойные интегралы ((17.3) плюс еще два) при несуществующем тройном интеграле? Оказывается, могут. Более того, будут существовать три повторных интеграла вида (17.4) и три простых интеграла вида (17.6). При этом соответствующие равенства вида (17.5) и (17.7), очевидно, не будут иметь смысла. Приведем пример.

**17.7. Функция  $f(x, y, z)$ , для которой не существует тройной интеграл, но существуют и равны все шесть повторных интеграла.** Построим в замкнутом единичном кубе  $(T)$ :  $0 \leq x, y, z \leq 1$  множество точек  $M$  следующим образом (рис. 17.1). Разобьем еди-

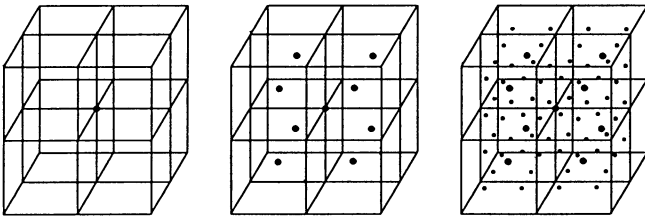


Рис. 17.1

ничный куб  $(T)$  на восемь одинаковых замкнутых кубов. Точку, лежащую на пересечении этих восьми кубов, включаем в  $M$ . Далее аналогично поступаем с каждым из восьми полученных кубов: разбиваем его на восемь одинаковых замкнутых кубов и точку их пересечения включаем в  $M$ . Этот процесс неограниченно продолжаем. На рис. 17.1 показаны три первых шага построения множества  $M$ . Разбиение куба на 8 частей показано только на шаге 1. Изображения точек, полученных на шаге 3, уменьшены.

Выполним бесконечное число шагов, объединяя полученные



точки в множество  $M$ . Это множество по его построению будет обладать следующими свойствами. Точки множества  $M$  плотно располагаются в кубе  $(T)$ ; любая плоскость, параллельная координатным плоскостям  $xy$ ,  $yz$  или  $zx$ , либо не пересекается с  $M$ , либо пересекается с  $M$  в конечном числе точек.

Рассмотрим характеристическую функцию множества  $M$ :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y, z) \in M; \\ 0, & \text{если } (x, y, z) \notin M. \end{cases} \quad (17.8)$$

Тройной интеграл  $\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT$  от функции (17.8) по кубу  $(T)$  не

существует, так как при любом разбиении куба  $(T)$  на части (элементы), в каждой из них есть точки множества  $M$  и точки, не принадлежащие  $M$ , соответственно при любом разбиении нижняя сумма Дарбу равна нулю, а верхняя сумма Дарбу равна объему куба, т.е. единице. Таким образом, пределы нижних и верхних сумм Дарбу отличны друг от друга, и тройной интеграл не существует.

Рассмотрим двойной интеграл  $I(x) = \iint_{(R)} f(x, y, z) dR$ , где  $(R)$

есть квадрат  $0 \leq y, z \leq 1$  – проекция куба  $(T)$  на плоскость  $yz$ . При любом  $x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ , в соответствии со свойством множества  $M$  функция  $f(x, y, z)$  либо тождественно равна нулю, либо отлична от нуля (равна единице) только в конечном числе точек. Отсюда существует интеграл  $I(x) = \iint_{(R)} f(x, y, z) dR \equiv 0$ , а значит, существует так-

же повторный интеграл  $\int_0^1 dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR = 0$ .

Заметим, что существует простой интеграл  $\int_0^1 f(x, y, z) dz = 0$  при любых значениях  $x$  и  $y$ :  $0 \leq x, y \leq 1$ . Следовательно, существует и повторный интеграл  $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dz = 0$ . Видим, что в формулах (17.5) и (17.7) интегралы справа существуют, а интеграл слева – нет, и формулы не имеют смысла.

В силу симметрии области  $(T)$  и функции  $f(x, y, z)$  по переменным  $x$ ,  $y$  и  $z$  проведенные рассуждения справедливы для всех

упомянутых выше шести формулировок теоремы и шести формул вида (17.7).

В теореме, помимо существования тройного интеграла, требуется при каждом постоянном  $x$  из отрезка  $[a, b]$  существование двойного интеграла  $I(x) = \iint_{(R)} f(x, y, z) dR$ . Но, может быть, из существования тройного интеграла

уже следует существование и названного двойного интеграла при любом  $x$  из  $[a, b]$  и, следовательно, повторного интеграла  $\int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR$ ? Оказыва-

ется это не так. Приведем пример.

**17.8. Функция  $f(x, y, z)$ , для которой существует тройной интеграл, но не существует повторный  $\int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR$ .**

Пусть область интегрирования – замкнутый куб  $(T)$ :  $0 \leq x, y, z \leq 1$ , функция  $f(x, y, z) = R(x)D(y)D(z)$ . Выше в контрпримере 17.4 показано существование тройного интеграла от указанной функции в данной области. Однако при любом рациональном значении  $x = x^*$ ,  $R(x^*) > 0$ , и функция  $f(x^*, y, z) = R(x^*)D(y)D(z)$  будет всюду разрывна в квадрате  $(R)$ :  $0 \leq y, z \leq 1$ . Соответственно двойной интеграл  $I(x^*) = \iint_{(R)} f(x^*, y, z) dR$  не будет существовать, т.е. не будет

определена для всех рациональных значений переменной  $x$  подынтегральная функция в повторном интеграле  $\int_0^1 dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR$ , и он

не будет существовать. В данном случае в формуле (17.5) интеграл слева существует, а интеграл справа – нет, и она не имеет смысла.

Следует сказать, что существуют другие повторных интегралы:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy \iint_{(Q)} f(x, y, z) dQ, (Q): 0 \leq z, x \leq 1, \\ & \int_0^1 dz \iint_{(P)} f(x, y, z) dP, (P): 0 \leq x, y \leq 1. \end{aligned}$$

В силу симметрии функции и области интегрирования по переменным  $y$  и  $z$  достаточно рассмотреть только первый из этих интегралов. При любом иррациональном значении переменной  $y$  функция  $f(x, y, z) = R(x)D(y)D(z)$  тождественно (по  $z$  и  $x$ ) равна нулю, при

любом рациональном  $y$  она равна  $R(x)D(z)$ . И в том, и в другом случае существует двойной интеграл  $\iint_{(Q)} f(x, y, z) dQ \equiv 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ , и

существует повторный интеграл  $\int_0^1 dy \iint_{(Q)} f(x, y, z) dQ = 0$ .

В силу симметрии области  $(T)$  по переменным  $x$ ,  $y$  и  $z$  эти рассуждения справедливы для всех трех повторных интегралов вида (17.4) и трех формул вида (17.5). При этом следует рассматривать соответствующие функции:  $D(x)R(y)D(z)$  и  $D(x)D(y)R(z)$ .

Выше для двойных интегралов мы построили примеры 15.10–15.15, исчерпав все возможные варианты существования (несуществования) двойного и соответствующих повторных интегралов. В случае тройных интегралов это также возможно, но вариантов значительно больше. Остановимся здесь еще на двух: тройной интеграл не существует, существует только один из повторных интегралов вида (17.4); тройной интеграл существует, не существуют все три повторных интеграла вида (17.4).

**17.9. Функция  $f(x, y, z)$ , для которой не существует тройной интеграл, но существует только один повторный интеграл**

$\int_a^b dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR$ . Примем  $f(x, y, z) = D(x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z)$ , об-

ласть  $(T)$  – куб:  $0 \leq x, y, z \leq 1$ . Тройной интеграл не существует. Действительно, любая окрестность произвольной точки  $(x_0, y_0, z_0)$  куба  $(T)$ , кроме точек шести плоскостей  $y = 0; 1/2; 1$ ,  $z = 0; 1/2; 1$ , содержит точки со значениями функции, как равными нулю (при иррациональных значениях  $x$ ), так и равными  $\sin(2\pi y_0)\sin(2\pi z_0) \neq 0$  (при рациональных значениях  $x$ ). Следовательно, функция почти всюду разрывна и поэтому неинтегрируема.

Не существуют также повторные интегралы  $\int_0^1 dy \iint_{(Q)} f(x, y, z) dQ$ ,

$(Q)$ :  $0 \leq z, x \leq 1$ , и  $\int_0^1 dz \iint_{(P)} f(x, y, z) dP$ ,  $(P)$ :  $0 \leq x, y \leq 1$ . Так как

функция симметрична по переменным  $y$  и  $z$ , достаточно рассмотреть первый из них:  $\iint_{(Q)} f(x, y, z) dQ = \iint_{(Q)} D(x)\sin(2\pi y)\sin(2\pi z) dQ$

не существует при любом  $y$ , кроме  $y = 0; 1/2; 1$ , по причине, о которой уже говорилось в данном примере (подынтегральная функция

почти всюду разрывна). Соответственно не существует и повторный интеграл  $\int_0^1 dy \iint_{(Q)} f(x, y, z) dQ$ .

Но повторный интеграл  $\int_0^1 dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR$ ,  $(R): 0 \leq y, z \leq 1$ , существует: имеем  $\iint_{(R)} f(x, y, z) dR = D(x) \iint_{(R)} \sin(2\pi y) \sin(2\pi z) dR =$   
 $= D(x) \int_0^1 \sin(2\pi y) dy \int_0^1 \sin(2\pi z) dz = D(x) \cdot 0 \equiv 0$  и  $\int_0^1 dx \iint_{(R)} f(x, y, z) dR = 0$ .

**17.10. Функция  $f(x, y, z)$ , для которой существует тройной интеграл, но не существуют все повторные интегралы.** Пусть  $f(x, y, z) = R(x)D(y)D(z) + D(x)R(y)D(z) + D(x)D(y)R(z)$ , область  $(T)$  – куб:  $0 \leq x, y, z \leq 1$ . Тройной интеграл  $\iiint_{(T)} f(x, y, z) dT$  существ-

ует. Действительно, в примере 17.4 показано существование интеграла  $\iiint_{(T)} R(x)D(y)D(z) dT$  и, в силу симметрии области по пере-

менным  $x, y$  и  $z$ , и равноправия этих переменных, существуют тройные интегралы от всех трех слагаемых, составляющих функцию  $f(x, y, z)$ .

Однако, как показано в примере 17.8, повторный интеграл  $\int_0^1 dx \iint_{(R)} R(x)D(y)D(z) dR$ , где  $(R): 0 \leq y, z \leq 1$ , не существует. По тем

же соображениям симметрии области по переменным  $x, y$  и  $z$  и равноправия этих переменных не будут существовать оба повторных интеграла  $\int_0^1 dy \iint_{(Q)} D(x)R(y)D(z) dQ$ , где  $(Q): 0 \leq z, x \leq 1$ , и

$\int_0^1 dz \iint_{(P)} D(x)D(y)R(z) dP$ , где  $(P): 0 \leq x, y \leq 1$ . Напомним, что в при-

мере 17.8 фактически показано, что каждый из трех только что рассмотренных повторных интегралов существует от двух других (для каждого – своих) слагаемых, составляющих функцию. Таким образом, каждый из трех повторных интегралов не существует от всей суммы слагаемых, составляющих функцию  $f(x, y, z)$ , т.е. от самой этой функции.

Примеры 17.7–17.10 сохраняют свою силу и для приведения тройного интеграла к повторным интегралам в случае произвольной пространственной области. Только в этом случае необходимо вписать в область куб, и в точках области, не принадлежащих кубу, доопределить данные в примерах функции нулевыми значениями. При этом от единичного надо перейти преобразованием подобия к кубу нужного размера.

Использование формул, сводящих вычисление тройного интеграла к вычислению интегралов повторных, возможно только для пространственных областей (тел) специальной формы. Для других областей необходимо их разбиение на конечное число частей, имеющих такую форму. Приведем примеры областей, для которых такая процедура невыполнима.

**17.11. Области, для которых невозможен переход от тройного интеграла к повторному.** Такой областью (множеством), например, является замкнутый шар, из внутренней части которого удалено счетное множество непересекающихся открытых шаров, при этом множество удаленных точек плотно в исходном шаре. Другим примером является ограниченная кубируемая область ( $V$ ) из примера 17.3, граничная поверхность ( $K$ ) которой имеет фрактальную структуру. Она целиком, как и любая (сколь угодно малая) ее часть, включающая фрагменты (куски) ограничивающей поверхности ( $K$ ), не может быть разбита на конечное число частей типа «цилиндрического бруса».

### 17.3. Формула Гаусса–Остроградского

**Формула Гаусса–Остроградского.** Пусть область ( $V$ ) замкнута и ограничена замкнутой кусочно-гладкой поверхностью ( $S$ ). И пусть на области ( $V$ ) определены непрерывные функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ , имеющие на ( $V$ ), включая ( $S$ ), непрерывные производные  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$ . Под непрерывностью указанных производных на границе ( $S$ ) области ( $V$ ) понимается их непрерывная продолжаемость на эту границу. Тогда выполняется:

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{(S)} P dy dz, \quad (17.9)$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{(S)} Q dz dx, \quad (17.10)$$

$$\iiint_{(V)} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{(S)} R dx dy, \quad (17.11)$$

где интегралы справа берутся по внешней стороне ( $S$ ).

Сложением левых и правых частей трех формул (17.9–17.11) получим общую формулу Гаусса–Остроградского:

$$\iiint_{(V)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (17.12)$$

Условие непрерывности функций  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  не является необходимым для выполнения формул (17.9–17.12). Контрпримеры.

**17.12. Функции  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ , для которых условие непрерывности нарушается в одной точке, но формула Гаусса–Остроградского выполняется.** Предположим, что  $P(x, y, z) = \frac{x}{r^2}$ ,

$Q(x, y, z) = \frac{y}{r^2}$ ,  $R(x, y, z) = \frac{z}{r^2}$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , область  $(V)$  –

шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . Получим  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^2 - 2xrx/r}{r^4} = \frac{r^2 - 2x^2}{r^4}$ ,

$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{r^2 - 2y^2}{r^4}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{r^2 - 2z^2}{r^4}$ . Функции  $P, Q, R$  и их производные

определены и непрерывны всюду, кроме точки  $(0, 0, 0)$ . Видим, что

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{3r^2 - 2r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$  во всех точках  $(V)$ , кроме одной.

Вычислим, переходя к сферическим координатам  $\rho, \varphi, \theta$ ,

$$\begin{aligned} \iiint_{(V)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \iiint_{(V)} \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \\ &= \iiint_{(\Delta)} \frac{\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta}{\rho^2} = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi R. \end{aligned}$$

Найдем, переходя к поверхностному интегралу первого типа,

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iint_{(S)} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dS = \\ &= \frac{1}{R^2} \iint_{(S)} (x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu) dS = \frac{1}{R^2} R 4\pi R^2 = 4\pi R. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что на сфере  $(S)$  радиус-вектор  $\vec{r} = (x, y, z) = R\vec{n} = R(\cos \lambda, \cos \mu, \cos \nu)$ , и отсюда скалярное произведение  $(\vec{r}, \vec{n}) = x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu = R(\vec{n}, \vec{n}) = R$ .

Замечаем, что формула Гаусса–Остроградского выполняется.

**17.13. Функции  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , для которых формула Гаусса–Остроградского выполняется, хотя их множества точек разрыва плотны в области.** Рассмотрим сначала формулу (17.9). Пусть область  $(V)$  – куб  $0 \leq x, y, z \leq 1$ ,  $P(x, y, z) = x + R(y) + R(z)$ , здесь  $R(t)$  – функция Римана (не путать с функцией  $R(x, y, z)$ ). Функция  $P(x, y, z)$  имеет точки разрыва, расположенные плотно в области  $(V)$ . Заметим, что существует частная производная  $\frac{\partial P}{\partial x} = 1$ , и она

непрерывна. Очевидно, получим  $\iiint_{(V)} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = 1$ .

Вычислим поверхностный интеграл справа в (17.9), учитывая, что только две грани куба  $(V)$  не перпендикулярны (параллельны) плоскости  $yz$ , и полагая  $(D)$ :  $0 \leq y, z \leq 1$ . Получаем

$$\iint_{(S)} P dy dz = \iint_{(D)} (1 + R(y) + R(z)) dy dz - \iint_{(D)} (0 + R(y) + R(z)) dy dz = 1,$$

так как  $\iint_{(D)} (R(y) + R(z)) dy dz = 0$  (подынтегральная функция интегрируема и отлична от нуля только на множестве нулевой меры).

Видим, что равенство (17.9) выполняется, несмотря на то что функция  $P(x, y, z)$  имеет расположенные плотно в кубе  $(V)$  точки разрыва. Учитывая равноправие координат, симметрию куба  $(V)$ , и аналогично задавая функции  $Q(x, y, z)$  и  $R(x, y, z)$ , можем построить такие же примеры в случае формул (17.10) и (17.11). И наконец, при тех же разрывных функциях  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ , получим выполнение формулы Гаусса–Остроградского.

Однако условие непрерывности функций  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и их частных производных  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$  убрать из утверждения нельзя. Известный контрпример.

**17.14. Функции  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$ , для которых условие непрерывности нарушается в одной точке и формула Гаусса–Остроградского не выполняется.** Предположим  $P(x, y, z) = \frac{x}{r^3}$ ,  $Q(x, y, z) = \frac{y}{r^3}$ ,  $R(x, y, z) = \frac{z}{r^3}$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , область  $(V)$  –

шар  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ . Найдем  $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^3 - 3xr^2x/r}{r^6} = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$ ,

$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$ . Функции  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и их производные

определены и непрерывны всюду, кроме точки  $(0, 0, 0)$ . Видим, что

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{3r^2 - 3r^2}{r^5} = 0$  во всех точках области  $(V)$ , кроме од-

ной. Отсюда получаем  $\iiint_{(V)} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = 0$ .

Вычислим, переходя к поверхностному интегралу первого типа,

$$\iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{(S)} (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) dS =$$

$$= \frac{1}{R^3} \iint_{(S)} (x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu) dS = \frac{1}{R^3} R 4\pi R^2 = 4\pi.$$

Пояснение к последнему равенству было дано в контрпримере 17.12.

Видим, что формула Гаусса–Остроградского не выполняется. Интересно, что в контрпримере 17.12 при схожем задании функций, таком же нарушении условия непрерывности (и в той же точке) формула Гаусса–Остроградского выполнялась.

**Приложение формулы Гаусса–Остроградского к исследованию поверхностных интегралов.** Пусть в некоторой открытой пространственно односвязной области  $(T)$  заданы функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$ , непрерывные вместе со своими производными  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$ . Возьмем любую замкнутую поверхность  $(S)$ , лежащую в области  $(T)$  и ограничивающую некоторое тело  $(V)$ ,  $(V) \subset (T)$ . Рассмотрим поверхностный интеграл

$$\iint_{(S)} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \quad (17.13)$$

Интеграл (17.13) равен нулю тогда и только тогда, когда в области  $(T)$  выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \quad (17.14)$$

Условие непрерывности функций  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  не является необходимым для равенства поверхностного интеграла (17.13) нулю при выполнении равенства (17.14). Контрпример.



**17.15. Функции  $P, Q, R$ , для которых  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$  и**

**$\iint_{(S)} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = 0$ , хотя их множества точек разры-**

**ва всюду плотны.** Пусть область  $(T)$  – все пространство  $x, y, z$ . Рассмотрим функции  $P, Q, R$ , для которых выполняются все требования утверждения, и всюду справедливо равенство (17.14), а значит, и равенство интеграла (17.13) нулю для любой допустимой поверхности  $(S)$ . Возвращаясь к приему, неоднократно использованному ранее, например в контрпримере 17.13, предположим, что

$$P^* = P + R(y) + R(z), \quad Q^* = Q + R(z) + R(x), \quad R^* = R + R(x) + R(y).$$

Они имеют точки разрыва, расположенные всюду плотно в пространстве  $x, y, z$ . У этих функций, очевидно, существуют указанные в

утверждении производные  $\frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q^*}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial R^*}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial z}$  и для

них выполняется равенство  $\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\partial Q^*}{\partial y} + \frac{\partial R^*}{\partial z} = 0$ .

Покажем, что для  $P^*, Q^*, R^*$  выполняется также равенство интеграла (17.13) нулю. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} P^* \, dy \, dz + Q^* \, dz \, dx + R^* \, dx \, dy &= \iint_{(S)} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy + \\ &+ \iint_{(S)} (R(y) + R(z)) \, dy \, dz + (R(z) + R(x)) \, dz \, dx + (R(x) + R(y)) \, dx \, dy = 0, \end{aligned}$$

так как справа первый интеграл равен нулю по предположению, а второй интеграл равен нулю, потому что функция Римана интегрируема и почти всюду равна нулю.

В то же время бывает достаточно одной точки разрыва у функций  $P, Q, R$  и производных  $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ , чтобы при выполнении равенства (17.14) не выполнялось равенство поверхностного интеграла (17.13) нулю.

**17.16. Функции  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ , для которых условие**

**непрерывности нарушается в одной точке,  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ , но**

**$\iint_{(S)} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy \neq 0$ .** Контрпример 17.14 можно исполь-

зовать и в данном случае, если под областью  $(T)$  понимать все про-

странство  $xyz$ . Действительно, для рассмотренных в нем функций  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и их производных справедливо следующее: условие непрерывности нарушается только в одной точке; равенство (17.14) выполняется всюду, кроме этой точки; равенство поверхностного интеграла (17.13) нулю не выполняется ни для какой сферы ( $S$ ) с центром в точке  $(0, 0, 0)$ .

В утверждении требуется пространственно односвязная область ( $T$ ). Это требование нельзя изъять из утверждения. Контрпример.

#### 17.17. Не пространственно односвязная область, при которой

$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$ , но  $\iint_{(S)} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy \neq 0$ . Можно рас-

смотреть контрпример 17.14 и под этим ракурсом. В этом случае примем за область ( $T$ ) все пространство  $xyz$  с удаленным из него шаром  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ . Эта область не является пространственно односвязной. Видим, что всюду в ( $T$ ) функции  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и производные  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$  непрерывны. Всяду в ( $T$ ) выполняется и равенство (17.14). Но для любой сферы ( $S$ ) с центром в точке  $(0, 0, 0)$ , лежащей в ( $T$ ), поверхностный интеграл (17.13) нулю не равняется.

### 17.4. Замена переменных в тройных интегралах

**Выражение объема в криволинейных координатах.** Предположим, что в пространстве с системой прямоугольных координат  $xyz$  дана ограниченная кусочно-гладкой поверхностью ( $S$ ) замкнутая ограниченная область ( $D$ ), а в другом пространстве с системой координат  $\xi\eta\zeta$  дана удовлетворяющая таким же условиям область ( $\Delta$ ) с граничной поверхностью ( $\Sigma$ ). Пусть функции

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta, \zeta), \\ y = y(\xi, \eta, \zeta), \\ z = z(\xi, \eta, \zeta) \end{cases} \quad (17.15)$$

определяют взаимно однозначное отображение ( $\Delta$ ) на ( $D$ ). В области ( $\Delta$ ) функции (17.15) непрерывны и непрерывны их частные производные первого порядка, а значит, и функциональный определитель  $J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$  (якобиан) есть непрерывная функция в области ( $\Delta$ ). И пусть  $J(\xi, \eta, \zeta) \neq 0$  для любой точки  $(\xi, \eta, \zeta) \in (\Delta)$ . Тогда объем  $D$  области ( $D$ ) выразится формулой

$$D = \iiint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta. \quad (17.16)$$

Заметим, что уже в самых распространенных случаях перехода к цилиндрическим и сферическим координатам преобразование координат не обеспечивает взаимно однозначное соответствие между точками областей  $(D)$  и  $(\Delta)$  и определитель (якобиан) не является ненулевым во всех точках области  $(\Delta)$ . Однако так как нарушения происходят на множествах, имеющих нулевой объем, формула (17.16) переносится и на эти случаи.

Возможны более серьезные нарушения предположения о взаимной однозначности, когда якобиан тождественно равен нулю, а формула (17.16) все же применима. Построение контрпримера выносим в упражнения.

Однако условие взаимно однозначного соответствия точек областей  $(\Delta)$  и  $(D)$  не может быть удалено из утверждения. Контрпример.

**17.18. Не взаимно однозначное отображение  $(\Delta)$  на  $(D)$ , при котором формула  $D = \iiint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta$  не выполняется.** Да-

но отображение  $x = \xi^2$ ,  $y = \eta^2$ ,  $z = \zeta^2$ , которое имеет якобиан  $J(\xi, \eta, \zeta) = 8\xi\eta\zeta$ . Пусть область  $(\Delta)$  – куб:  $-1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$ , его объем  $\Delta = 8$ . Ей отвечает область  $(D)$ :  $0 \leq x, y, z \leq 1$ , ее объем  $D = 1$ .

Вычислим интеграл  $\iiint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta$ , учитывая, что модуль якобиана  $|J(\xi, \eta, \zeta)| = 8|\xi\eta\zeta|$  одинаков в каждом из восьми равных кубов, на которые куб  $(\Delta)$  разбивают координатные плоскости  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$ ,  $\zeta = 0$ . Поэтому интегрирование выполним только по кубу  $(\Delta_1)$ :  $0 \leq \xi, \eta, \zeta \leq 1$ , умножив интеграл на 8:

$$\begin{aligned} \iiint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta &= 8 \iiint_{(\Delta_1)} 8\xi\eta\zeta d\xi d\eta d\zeta = \\ &= 64 \int_0^1 \xi d\xi \int_0^1 \eta d\eta \int_0^1 \zeta d\zeta = 64 \left( \frac{1}{2} \xi^2 \right) \Big|_0^1 \cdot \left( \frac{1}{2} \eta^2 \right) \Big|_0^1 \cdot \left( \frac{1}{2} \zeta^2 \right) \Big|_0^1 = 8. \end{aligned}$$

Видим, что формула (17.16) неприменима в данном случае. Это объясняется тем, что соответствие между точками областей  $(\Delta)$  и  $(D)$  не является взаимно однозначным: каждой точке  $(x, y, z) \in (D)$  отвечает восемь точек  $(\pm\sqrt{x}, \pm\sqrt{y}, \pm\sqrt{z}) \in (\Delta)$ .

В утверждении требуется ограниченность областей  $(D)$  и  $(\Delta)$ . Однако и при нарушении этого требования формула (17.16) может выполняться. Приведем контрпримеры.

**17.19. Область  $(\Delta)$ , имеющая бесконечный объем, при кото-**

рой формула  $D = \iiint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta$  выполняется. Задано ото-

бражение  $x = \frac{1}{\xi}$ ,  $y = \frac{1}{\eta}$ ,  $z = \frac{1}{\zeta}$  с якобианом  $J(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{\xi^2 \eta^2 \zeta^2}$ .

Примем область  $(\Delta)$ :  $1 \leq \xi < +\infty$ ,  $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$ ,  $\frac{1}{2} \leq \zeta \leq 1$ , она является неограниченной, более того, ее объем бесконечен. Соответствующая ей область  $(D)$ :  $0 < x \leq 1$ ,  $1 \leq y \leq 2$ ,  $1 \leq z \leq 2$  ограничена и ее объем  $D = 1$ . Заметим, что заданное соответствие между точками областей  $(\Delta)$  и  $(D)$  является взаимно однозначным, и якобиан  $J(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{\xi^2 \eta^2 \zeta^2}$  всюду в  $(\Delta)$  конечен и не равен нулю.

Вычислим интеграл  $\iiint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta$ , он несобственный.

Рассмотрим ограниченную область  $(\Delta^*)$ :  $1 \leq \xi \leq \xi^*$ ,  $\frac{1}{2} \leq \eta \leq 1$ ,  $\frac{1}{2} \leq \zeta \leq 1$ , и отвечающую ей область  $(D^*)$ . Для ограниченных областей  $(D^*)$  и  $(\Delta^*)$  будет выполняться формула (17.16):

$$\begin{aligned} D^* &= \iiint_{(\Delta^*)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta = \iiint_{(\Delta^*)} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\xi^2 \eta^2 \zeta^2} = \\ &= \int_1^{\xi^*} \frac{d\xi}{\xi^2} \int_{1/2}^1 \frac{d\eta}{\eta^2} \int_{1/2}^1 \frac{d\zeta}{\zeta^2} = -\left(\frac{1}{\xi^*} - 1\right)(1-2)(1-2) = 1 - \frac{1}{\xi^*}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $\xi^* \rightarrow +\infty$ , получаем  $D = 1$ . Формула (17.16) справедлива и в данном случае.

Рассмотрим более яркий контрпример.

**17.20. Область  $(\Delta)$  это все пространство  $\xi\eta\zeta$ , а формула  $D = \iiint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta$  выполняется.** Пусть область  $(\Delta)$  – все

пространство  $\xi\eta\zeta$ , а область  $(D)$  – открытый куб  $-\frac{\pi}{2} < x, y, z < \frac{\pi}{2}$ , имеющий объем  $D = \pi^3$ . И пусть отображение выполняется посредством функций  $x = \operatorname{arctg} \xi$ ,  $y = \operatorname{arctg} \eta$ ,  $z = \operatorname{arctg} \zeta$ . Получаем  $J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{(1+\xi^2)(1+\eta^2)(1+\zeta^2)}$ . Заметим, что соответствие между

точками областей  $(\Delta)$  и  $(D)$  взаимно однозначное и якобиан всюду в  $(\Delta)$  конечен и не равен нулю.

Вычислим несобственный интеграл

$$\begin{aligned} \iiint_{(\Delta)} J(\xi, \eta, \zeta) |d\xi d\eta d\zeta| &= \iiint_{(\Delta)} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{(1+\xi^2)(1+\eta^2)(1+\zeta^2)} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{1+\xi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{1+\eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} = \arctg \xi \Big|_{-\infty}^{+\infty} \cdot \arctg \eta \Big|_{-\infty}^{+\infty} \cdot \arctg \zeta \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \\ &= \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right)^3 = \pi^3. \end{aligned}$$

Видим, что и в этом случае формула (17.16) дает правильный результат.

Приведем контрпример, в котором неограниченны обе области.

**17.21. Неограниченные области  $(\Delta)$  и  $(D)$ , при которых формула  $D = \iiint_{(\Delta)} J(\xi, \eta, \zeta) |d\xi d\eta d\zeta|$  выполняется.** Пусть область  $(D)$

имеет кусочно-гладкую границу, заданную явными уравнениями:  $z=1$ ,  $z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $0 < \sqrt{x^2+y^2} \leq 1$  (рис. 17.2, а). Этой области отвечает область  $(\Delta)$  в цилиндрической системе координат  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $z$ ,

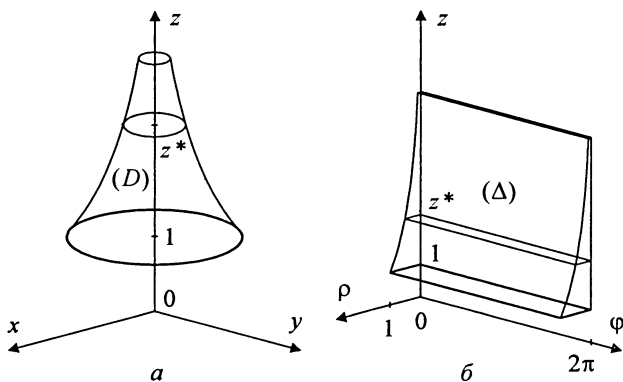


Рис. 17.2

ограниченная кусочно-гладкой поверхностью, заданной явными уравнениями:  $z=1$ ,  $z=\frac{1}{\rho}$ ,  $0 < \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  (рис. 17.2, б). Обе

области не являются ограниченными. Объем  $D$  области  $(D)$  выразится несобственным интегралом  $D = \iiint_{(D)} dx dy dz$ .

Рассмотрим часть  $(D^*)$  области  $(D)$ , ограниченную сверху плоскостью  $z = z^*$ . Ей будет отвечать часть  $(\Delta^*)$  области  $(\Delta)$ . Учитывая, что сечение области  $(D)$  плоскостью  $z = z_0$ ,  $z_0 \geq 1$ , есть круг радиуса  $R = \frac{1}{z_0}$ , получим объем области  $(D^*)$ :

$$D^* = \iiint_{(D^*)} dx dy dz = \int_1^{z^*} \pi R^2 dz = \pi \int_1^{z^*} \frac{dz}{z^2} = -\pi \left( \frac{1}{z^*} - 1 \right).$$

В пределе при  $z^* \rightarrow +\infty$  получаем  $D = \pi$ .

В то же время для ограниченных областей  $(D^*)$  и  $(\Delta^*)$  будет выполняться формула (17.16):  $D^* = \iiint_{(D^*)} dx dy dz = \iiint_{(\Delta^*)} \rho d\rho d\varphi dz =$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left( \int_0^{1/z^*} \rho d\rho \int_1^{z^*} dz + \int_{1/z^*}^1 \rho d\rho \int_1^{1/\rho} dz \right) = \\ &= 2\pi (z^* - 1) \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{1/z^*} + 2\pi \int_{1/z^*}^1 \rho \left( \frac{1}{\rho} - 1 \right) d\rho = \frac{\pi(z^* - 1)}{z^{*2}} + 2\pi \left( \rho - \frac{\rho^2}{2} \right) \Big|_{1/z^*}^1 = \\ &= \frac{\pi(z^* - 1)}{z^{*2}} + 2\pi \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{z^*} + \frac{1}{2z^{*2}} \right). \end{aligned}$$

В результате предельного перехода при  $z^* \rightarrow +\infty$  получаем  $D = \pi$ . Формула (17.16) справедлива.

**Замена переменных в тройных интегралах.** В предположениях предыдущего утверждения справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} &\iiint_{(D)} f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{(\Delta)} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (17.17)$$

где функция  $f(x, y, z)$  непрерывна.

Заметим, что для тройного интеграла можно построить аналог контрпримера 15.26. В нем функция будет иметь точки разрыва, образующие счетное множество гладких поверхностей, лежащих плотно в области интегрирования, но будет выполняться равенство (17.17). Построение такого контрпримера оставляем читателям в качестве упражнения.

## Упражнения

17.1. Перенести данное перед контрпримером 15.1 упрощенное определение с двойного на тройной интеграл. Построить контрпример, показывающий некорректность такого определения.

17.2. Построить пространственную область такую, что ее разбиение  $T$  с диаметром  $\lambda_T$  на конечное число связных множеств невозможно, если  $\lambda_T < 1$ .

17.3. В подразд. 17.1 даны утверждения, выражающие свойства тройного интеграла: аддитивность от подынтегральной функции, почленное интегрирование неравенств, интегрируемость модуля интегрируемой функции. Сформулировать и опровергнуть контрпримерами обратные им утверждения.

17.4. Построить пример функции  $f(x, y, z)$  со всюду плотным множеством точек разрыва, для которой по любой ограниченной кубируемой области существует тройной интеграл, который приводится к любому из шести повторных интегралов вида (17.7).

17.5. Описать рекуррентную процедуру построения из замкнутого шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  множества, свойства которого даны в примере 17.11, с суммарным объемом удаленных шаров, меньшим  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{4}{3}\pi$ .

17.6. Построить отображение области  $(\Delta)$  на  $(D)$ , при котором якобиан  $J(\xi, \eta, \zeta) \equiv 0$ , но выполняется формула  $D = \iiint_{(\Delta)} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta$ .

17.7. Привести пример функции, имеющей плотное в области интегрирования множество точек разрыва, при которой выполняется равенство (17.17).

## РАЗДЕЛ 18

### ДОПОЛНЕНИЕ. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ФУНКЦИЙ

#### 18.1. Примеры разрывных и непрерывных функций

**18.1. Функция  $y = f(x)$  с графиком, всюду плотным на плоскости  $Oxy$ .** При построении примера будем рассматривать действительные числа  $x$  в виде десятичных дробей, различая при этом конечные десятичные дроби

$$\pm a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_l, \quad (18.1)$$

и бесконечные

$$\pm a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_n \dots, \quad (18.2)$$

где  $0 \leq a_i, b_j \leq 9$  – десятичные цифры; если  $k \neq 0$ , то  $a_k \neq 0$ ; если  $l \neq 1$ , то  $b_l \neq 0$ .

Конечные дроби могут рассматриваться как бесконечные периодические с периодом 0, но мы, без потери общности, не будем рассматривать период 0 и оставим для конечных дробей только запись вида (18.1). Для установления взаимно однозначного соответствия между действительными числами и десятичными дробями исключим также периодические дроби с периодом 9. Известно, что множество конечных дробей (18.1) всюду плотно на числовой оси.

Построим функцию  $y = f(x)$ , определенную на всей числовой оси  $Ox$ , имеющую всюду плотный график на плоскости  $Oxy$ . Введем вспомогательную функцию  $\varphi(x)$ , определенную на всей оси  $Ox$ ,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, b_{p+1} b_{p+2} \dots b_l, & \text{если } x \text{ – конечная десятичная дробь (18.1),} \\ 0 & \text{– в противном случае;} \end{cases} \quad (18.3)$$

где  $p = \left[ \frac{l}{2} \right]$  – целой части (антье) числа  $\frac{l}{2}$ .

Покажем, что функция (18.3) в любой  $\varepsilon_x$ -окрестности любой точки  $x_0$  оси  $Ox$  принимает значения в любой  $\varepsilon_y$ -окрестности любой точки  $y_0$  интервала  $(0, 1)$  оси  $Oy$ , где  $\varepsilon_x > 0$ ,  $0,5 \geq \varepsilon_y > 0$  – произвольные. Пусть  $\varepsilon = \min(\varepsilon_x, \varepsilon_y)$ , существует такое натуральное число  $m$ , что



$$\frac{1}{10^m} < \varepsilon. \quad (18.4)$$

Рассмотрим числа  $x_0$  и  $y_0$ , преобразуем их в числа  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{y}_0$  следующим образом. Если  $x_0$  и  $y_0$  выражаются бесконечными десятичными дробями (18.2) или конечными (18.1), у которых  $l \geq m$ , то оставляем в записи их дробной части только  $m$  первых десятичных знаков и отбрасываем все последующие, начиная с номера  $n = m + 1$ , последний знак дробной части (с номером  $m + 1$ ) полагаем равным 1. Если оба или одно из чисел  $x_0$ ,  $y_0$  – конечные десятичные дроби (18.1), у которых  $l < m$ , то дополняем запись их дробной части нулями до  $m$  знаков, последний знак дробной части (с номером  $m + 1$ ) полагаем равным 1. Заметим, что полученные таким образом десятичные записи чисел  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{y}_0$  имеют дробные части длиной  $m + 1$ , а числа  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{y}_0$  принадлежат в силу (18.4) заданным выше  $\varepsilon_x$ - и  $\varepsilon_y$ -окрестностям соответственно, так как отличаются от чисел  $x_0$  и  $y_0$  только знаками дробной части с номерами большими  $m$ . Построим, далее, из таких записей чисел  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{y}_0$  десятичную запись числа  $\tilde{x}$ , а именно, к записи числа  $\tilde{x}_0$  (в продолжение его дробной части) припишем запись дробной части числа  $\tilde{y}_0$ . Получим число  $\tilde{x}$ , которое выражается конечной десятичной дробью (18.1) с  $l = 2(m + 1)$ , целая часть которого и первые  $m + 1$  знаков дробной части дают число  $\tilde{x}_0$ , а последующие  $m + 1$  знаков дробной части, приписанные к нулевой целой части, дают число  $\tilde{y}_0$ . Число  $\tilde{x}$ , таким образом, отличается от числа  $x_0$  только знаками дробной части с номерами большими  $m$ , т.е. принадлежит  $\varepsilon_x$ -окрестности числа  $x_0$ . И наконец, отметим, что в силу своего определения функция (18.3) от  $\tilde{x}$  имеет значение  $\tilde{y}_0$ , которое лежит в  $\varepsilon_y$ -окрестности числа  $y_0$ .

Таким образом, мы доказали, что функция (18.3) в любой  $\varepsilon_x$ -окрестности любой точки  $x_0$  оси  $Ox$  принимает значения в любой  $\varepsilon_y$ -окрестности любой точки  $y_0$  интервала  $(0, 1)$  оси  $Oy$ . Следовательно, точки графика функции (18.3) будут плотно располагаться в полосе:  $-\infty < x < +\infty, 0 < y < 1$ . Отсюда функция  $y = f(x) = \text{ctg}(\pi\varphi(x))$  будет иметь график, всюду плотный на всей плоскости  $Oxy$ .

**18.2. Функция  $y = f(x)$ , определенная на всей оси  $Ox$  и принимающая в любом непустом интервале значения на всей оси  $Oy$ .** Рассмотрим условно сходящийся знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \quad (18.5)$$

Известно, что можно, проводя в (18.5) суммирование не по всем значениям индекса, а выборочно (отбрасывая некоторые его значения), получить сумму образуемого ряда, равную любому действительному числу. Такую бес-

конечную выборку членов ряда определим бесконечной последовательностью нулей и единиц, обозначим ее  $\{a_n\}$ , если  $a_n = 1$ , то член ряда с номером  $n$  суммируется, если  $a_n = 0$ , то нет. Таким образом, для любого действительного числа  $y_0$  найдется некоторая последовательность нулей и единиц  $\{a_n\}$ , такая что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a_n = y_0. \quad (18.6)$$

Рассмотрим действительное число  $x$ , которое записывается бесконечной десятичной дробью, у которой, начиная с некоторого знака, в дробной части стоят только нули и единицы, а предшествующий знак не равен нулю и единице. Если эта последовательность нулей и единиц  $\{a_n\}$  обеспечивает сходимость ряда (18.6) к некоторому конечному числу  $y_0$ , то для краткости будем говорить, что  $x$  соответствует  $\{a_n\}$ .

Функцию  $y = f(x)$  построим следующим образом

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} a_n = y_0, & \text{если } x \text{ соответствует } \{a_n\}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (18.7)$$

Очевидно, по своему построению число  $x$ , соответствующее последовательности  $\{a_n\}$ , при которой ряд (18.6) сходится к любому наперед заданному действительному числу, лежит в любой  $\varepsilon$ -окрестности любого числа  $x_0$  оси

$Ox$ . Действительно, если при некотором  $m$  выполняется  $\frac{1}{10^m} < \varepsilon$ , то число  $x_0$  преобразуем в число  $\tilde{x}_0$  следующим образом. Если  $x_0$  – бесконечная десятичная дробь или конечная, у которой  $l \geq m$ , то сохраним в дробной части  $x_0$  только  $m$  знаков (это гарантирует попадание числа  $\tilde{x}_0$  в названную  $\varepsilon$ -окрестность), затем добавляем знак 2, а следующие знаки берем из последовательности  $\{a_n\}$ . Если  $x_0$  – конечная десятичная дробь, у которой  $l < m$ , то дополним ее дробную часть нулями до знака с номером  $m$  включительно (что обеспечивает попадание числа  $\tilde{x}_0$  в названную  $\varepsilon$ -окрестность), затем добавим знак 2, а следующие знаки берем из последовательности  $\{a_n\}$ . По определению функции (18.7) получаем  $f(\tilde{x}_0) = y_0$ . Напомним, что  $y_0$  – произвольное действительное число. Таким образом, мы доказали, что функция (18.7) в любой  $\varepsilon$ -окрестности любой точки  $x_0$  оси  $Ox$  принимает любые действительные значения.

**18.3. Непрерывная функция  $y = f(x)$ , имеющая строгие минимумы и максимумы в любом интервале изменения аргумента.** Для построения функции используем подход, предложенный Ван-дер-Варденом в его примере всюду непрерывной функции, нигде не имеющей конечной производной, см. [2], т. II, с. 86. Рассмотрим функциональный ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x), \quad (18.8)$$

где  $u_0(x)$  – абсолютная величина разности между числом  $x$  и ближайшим к нему целым числом,  $u_k(x) = \frac{u_0(3^k x)}{3^k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (рис. 18.1). График функции  $u_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) представляет собой ломаную, звенья которой имеют угловые коэффициенты  $\pm 1$ , функция  $u_k(x)$  непрерывна, она имеет период  $T_k = \frac{1}{3^k}$ .

В примере Ван-дер-Вардена «зубчики» каждой последующей ломаной мельче «зубчиков» предыдущей в четыре раза, в нашем примере – в три раза. Это требуется для того, чтобы для любой функции  $u_k(x)$  точки ее максимумов совпадали с точками максимумов всех последующих функций  $u_l(x)$ ,  $l > k$ . Заметим, что точки минимумов любой функции  $u_k(x)$  также совпадают с точками минимумов всех последующих функций  $u_l(x)$ ,  $l > k$ . Далее на это важное свойство будем ссылаться как на «свойство совпадения точек

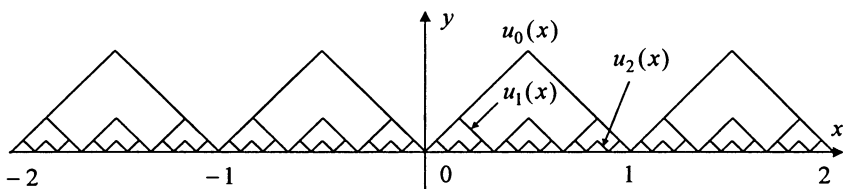


Рис. 18.1

максимумов (минимумов)». Ряд (18.8) сходится равномерно по признаку Вейерштрасса, так как функции  $u_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) удовлетворяют условию

$0 \leq u_k(x) \leq \frac{1}{2 \cdot 3^k}$ , а ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 3^k}$  сходится. Ряд (18.8) составлен из непрерыв-

ных функций и сходится равномерно, поэтому и функция  $f(x)$  непрерывна.

Докажем, что построенная непрерывная функция  $f(x)$  имеет строгие максимумы (минимумы) в тех точках  $x$ , в которых имеют максимумы (минимумы) функции  $u_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Эти значения  $x$  имеют вид

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^k} + \frac{n}{3^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.9)$$

$$x = \frac{n}{3^k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (18.10)$$

для максимумов и минимумов соответственно.

Проведем доказательство для произвольной точки  $x_0$  вида (18.9). Рассмотрим такое минимальное значение  $m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), что функция  $u_m(x)$

имеет максимум в точке  $x_0$ . В силу отмеченного выше свойства совпадения точек максимумов, если  $m = 0$ , то все эти функции  $u_k(x)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) имеют максимум в точке  $x_0$ , если  $m > 0$ , то все функции  $u_k(x)$  ( $0 \leq k \leq m-1$ ) не имеют максимума в  $x_0$ , а все функции  $u_k(x)$  ( $k \geq m$ ) имеют максимум в  $x_0$ .

Заметим, что при этом в окрестности  $|x - x_0| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^m}$  точки  $x_0$  все функции  $u_k(x)$  ( $0 \leq k \leq m-1$ ) линейны и имеют угловые коэффициенты  $\pm 1$ . Следовательно, в этой окрестности частичная сумма  $\sum_{k=0}^{m-1} u_k(x)$  ряда (18.8) будет также линейна, т.е. представима в виде

$$\sum_{k=0}^{m-1} u_k(x) = ax + b, \quad (18.11)$$

где  $a$  ( $|a| \leq m$ ) – некоторое целое число,  $b$  – константа. Запишем ряд (18.8) в виде

$$f(x) = \begin{cases} u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x), & \text{если } m = 0; \\ \sum_{k=0}^{m-1} u_k(x) + \sum_{k=m}^{2m} u_k(x) + \sum_{k=2m+1}^{\infty} u_k(x), & \text{если } m > 0. \end{cases} \quad (18.12)$$

Рассмотрим выражение (18.12) в окрестности точки  $x_0$

$$|x - x_0| < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{2m}}. \quad (18.13)$$

Сравним значения  $f(x_0)$  и  $f(x)$  в произвольной точке  $x \neq x_0$  окрестности (18.13). Если  $m = 0$ , то  $u_0(x_0) > u_0(x)$ , а  $u_k(x_0) \geq u_k(x)$  при всех  $k > 0$ . Отсюда с учетом выражения (18.12) получаем, что  $f(x_0) > f(x)$  для всех  $x \neq x_0$  в окрестности (18.13), т.е. точка  $x_0$  является точкой строгого максимума функции  $f(x)$ . Если  $m > 0$ , то в силу (18.11) в окрестности (18.13)

$$\sum_{k=0}^{m-1} u_k(x) - \sum_{k=0}^{m-1} u_k(x_0) = a(x - x_0) \leq m|x - x_0|. \quad (18.14)$$

В окрестности (18.13) ввиду ее размера содержится только по одному максимуму каждой из функций  $u_k(x)$  ( $m \leq k \leq 2m$ ), все они достигаются в точке  $x_0$ , а слева и справа от точки  $x_0$  все эти функции линейны и имеют угловые коэффициенты 1 и  $-1$  соответственно. Отсюда получаем

$$\sum_{k=m}^{2m} u_k(x) - \sum_{k=m}^{2m} u_k(x_0) = -(m+1)|x - x_0|. \quad (18.15)$$

Складывая левые и правые части (18.14) и (18.15), получаем

$$\sum_{k=0}^{2m} u_k(x) - \sum_{k=0}^{2m} u_k(x_0) \leq |x - x_0|, \text{ откуда для всех } x \neq x_0 \text{ в окрестности (18.13)}$$

выполняется

$$\sum_{k=0}^{2m} u_k(x_0) > \sum_{k=0}^{2m} u_k(x). \quad (18.16)$$

Учитывая, что  $u_k(x_0) \geq u_k(x)$  при всех  $k > 2m$ , принимая во внимание соотношение (18.16) и выражение (18.12) для  $f(x)$ , получаем, что  $f(x_0) > f(x)$  для всех  $x \neq x_0$  в окрестности (18.13), т.е. точка  $x_0$  является точкой строгого максимума функции  $f(x)$ . Почти дословно аналогично, с использованием свойства совпадения точек минимумов функций  $u_k(x)$ , доказывается, что любая точка  $x_0$  вида (18.10) есть точка строгого минимума функции  $f(x)$ .

Оба множества (18.9) и (18.10) значений  $x$  всюду плотны на действительной оси  $Ox$ , т.е. в любом интервале оси  $Ox$  находится бесконечно много точек первого и второго вида. Следовательно, построенная выше непрерывная функция  $f(x)$  имеет строгие минимумы и максимумы в любом интервале изменения аргумента  $x$ .

Построенная функция  $y = f(x)$  имеет еще одно замечательное свойство: значения минимумов (максимумов), достигаемых этой функцией, плотно располагаются на отрезке изменения  $y$ . Докажем это от противного.

Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ , в силу ее периодичности, только на отрезке  $[0, 1]$ . Так как функция непрерывна на этом отрезке, то она ограничена на нем, и в некоторых точках данного отрезка принимает свои минимальное  $y_{\min}$  и максимальное  $y_{\max}$  значения, а также принимает и все промежуточные значения  $y$  ( $y_{\min} < y < y_{\max}$ ). Предположим, что существует интервал изменения  $y$ ,  $y_1 < y < y_2$  ( $y_{\min} \leq y_1, y_2 \leq y_{\max}$ ) такой, что на нем нет ни одного значения минимума (максимума) функции  $y = f(x)$ . Тогда существует такое  $x_0 \in (0, 1)$ , что  $f(x_0) = y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}$ , и существует, в силу непрерывности функции,  $\delta$ -окрестность точки  $x_0$  такая, что все значения функции в этой окрестности будут лежать в интервале  $(y_1, y_2)$ . Таким образом, в интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  не достигаются минимумы (максимумы). Приходим к противоречию, так как выше доказано существование точек минимумов (максимумов) функции в любом интервале изменения  $x$ .

## 18.2. Примеры несуществования и существования производной

**18.4. Функция, имеющая строгие максимумы, точки разрыва, производную на множествах, плотных на отрезке.** Построим функцию  $y = f(x)$  на отрезке  $[0, 1]$  числовой оси  $Ox$ , следуя рекуррентной процедуре. На нулевом шаге в точках 0 и 1 зададим значения  $f(0) = f(1) = 1$ . Затем, на первом

шаге, в точках  $x = \frac{k}{3}$ , где  $k = \overline{0, 3}$ , не совпадающих с теми, в которых функция уже определена, положим  $f(x) = \frac{1}{3^2}$ . Далее, на шаге  $n$ , в точках  $x = \frac{k}{3^n}$ , где  $k = \overline{0, 3^n}$ , не совпадающих с теми, в которых функция определена на предыдущих шагах, положим  $f(x) = \frac{1}{3^{2n}}$  (рис. 18.2). При неограниченном продолжении процесса определим значение функции во всех точках вида

$$x = \frac{k}{3^n}, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots; k = \overline{0, 3^n}; \quad (18.17)$$

множество которых плотно на отрезке  $[0, 1]$ . Во всех точках, кроме точек (18.17), положим  $f(x) = 0$ . На рис. 18.2 показаны значения функции, построенные при  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ . Вертикальный масштаб несколько нарушен для

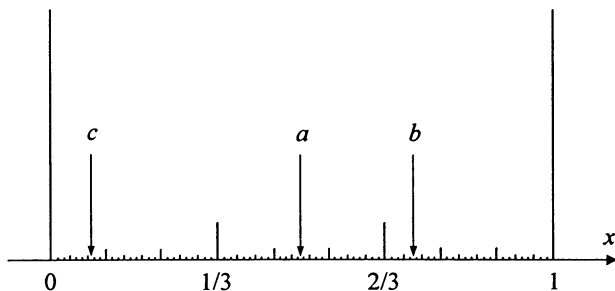


Рис. 18.2

экономии места и из-за быстрого убывания значений функции с ростом  $n$ .

Очевидно, что в любой точке, где значение функции больше нуля, т.е. в точках (18.17), она имеет строгие максимумы. Действительно, пусть точка  $x$  получена при некотором  $n$ , тогда в проколотой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $x$ , где  $\varepsilon < \frac{1}{3^n}$ , все значения функции будут строго меньше, чем  $f(x)$ .

В этих же точках (18.17), где функция принимает ненулевые значения, она имеет разрывы, так как в любой окрестности любой точки (18.17) есть точки, в которых функция равна нулю.

Покажем, что в точках, лежащих строго посередине соседних точек (18.17), т.е. тех, которые при любом  $n$  соответствуют двум последовательным значениям  $k$ , функция  $f(x)$  имеет производную, равную нулю. Такие точки запишутся в виде

$$x = \frac{k+0,5}{3^n}, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots; k = \overline{0, 3^n - 1}. \quad (18.18)$$

Их множество плотно на отрезке  $[0, 1]$ . Любая такая точка не принадлежит

множеству точек (18.17), значение функции в ней равно нулю. Рассмотрим некоторую точку (18.18), которая получена на шаге  $n$  построения функции, обозначим ее  $x_0$ . По самому построению функции такая точка является серединой отрезка между соседними точками и для всех последующих шагов  $m$ ,  $m > n$ . На рис. 18.2 стрелками показаны точки вида (18.18):  $a$  – для  $n = 0$ ,  $b$  – для  $n = 2$ ,  $c$  – для  $n = 4$ . Сделаем в точке  $x_0$  произвольное приращение  $\Delta x$  такое, что  $|\Delta x| < \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}}$ . Тогда для некоторого  $m$ ,  $m > n$ , выполняется

$$\frac{1}{2 \cdot 3^{m+1}} \leq |\Delta x| < \frac{1}{2 \cdot 3^m}. \quad (18.19)$$

По самому построению функции  $f(x)$  в соответствующей окрестности  $x_0 - \frac{1}{2 \cdot 3^m} < x < x_0 + \frac{1}{2 \cdot 3^m}$  выполняется

$$0 \leq f(x) < \frac{1}{3^{2m}}. \quad (18.20)$$

Покажем, что в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  имеет производную, равную нулю. Действительно, используя данные выше оценки (18.19) и (18.20), учитывая, что  $f(x_0) = 0$ , получаем

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta x} - 0 \right| = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{|\Delta x|} < \frac{\frac{1}{3^{2m}}}{\frac{1}{2 \cdot 3^{m+1}}} = \frac{2 \cdot 3^{m+1}}{3^{2m}} = \frac{2}{3^{m-1}}. \quad (18.21)$$

Так как правая часть (18.21) при  $\Delta x \rightarrow 0$  (при  $m \rightarrow \infty$ ) стремится к нулю, производная существует и равна нулю.

**18.5. Строго монотонная функция, имеющая нулевую производную и точки перегиба на множестве, плотном на  $[0, 1]$ .** Определим на полуинтервале  $[0, 1)$  функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (18.22)$$

которая является суммой функционального ряда, составленного из функций  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Эти функции являются ступенчатыми монотонно возрастающими и определяются на полуинтервале  $[0, 1)$  следующим образом

$$u_n(x) = a_n \frac{k-1}{3^n - 1}, \quad \text{где } \frac{k-1}{3^n} \leq x < \frac{k}{3^n}, \quad k = 1, 2, \dots, 3^n, \quad (18.23)$$

где числа  $a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , образуют сходящийся знакоположительный числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  со строго монотонно убывающими членами (рис. 18.3). На рис. 18.3 изображены первые четыре члена  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $u_3(x)$ ,  $u_4(x)$  ряда (18.22). Построенная функция является суммой равномерно сходящегося

функционального ряда (18.22). Равномерная сходимость (18.22) следует из сходимости мажорирующего этот ряд числового ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

Очевидно, что функция  $f(x)$  имеет точки разрыва первого рода в точках разрыва функций  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , т.е. в точках

$$x = \frac{k}{3^n}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots, 3^n - 1. \quad (18.24)$$

Это можно показать, используя возможность почленного предельного перехода в равномерно сходящихся функциональных рядах и тот факт, что любая

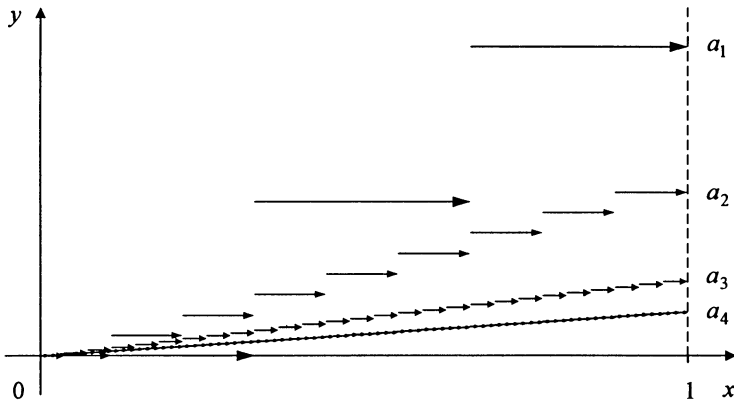


Рис. 18.3

точка разрыва (18.24) функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  является точкой разрыва и для всех функций  $u_m(x)$ ,  $m > n$ . Заметим, что точки (18.24) плотно расположены на  $[0, 1]$  и в них производная не существует.

Покажем, что функция  $f(x)$  строго монотонная на  $[0, 1)$ . Рассмотрим на  $[0, 1)$  две любые точки  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ). В силу монотонного возрастания каждой из функций  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , выполняется  $u_n(x_1) \leq u_n(x_2)$ . Очевидно также, что по крайней мере при всех  $n$ , при которых  $\frac{2}{3^n} < x_2 - x_1$ , выполняется  $u_n(x_1) < u_n(x_2)$ . Иными словами, для некоторого конечного числа первых членов ряда (18.22) выполняется отношение  $u_n(x_1) \leq u_n(x_2)$ , а для бесконечного числа всех последующих членов ряда (18.22) выполняется отношение  $u_n(x_1) < u_n(x_2)$ . Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_1) < \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_2), \quad \text{т.е.} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Покажем, что в точках, лежащих в серединах полуинтервалов постоянства функций  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , т.е. в точках



$$x = \frac{1}{2 \cdot 3^n} + \frac{k-1}{3^n}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, \dots, 3^n, \quad (18.25)$$

функция  $f(x)$  имеет производную.

По своему построению последовательность  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$  обладает следующими свойствами:

- 1) середина любого полуинтервала постоянства функции  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , является серединой и соответствующих полуинтервалов постоянства для всех функций  $u_m(x)$ ,  $m > n$ ;
- 2) любой полуинтервал постоянства функции  $u_n(x)$ ,  $n = 2, 3, \dots$ , целиком лежит в соответствующих полуинтервалах постоянства всех функций  $u_m(x)$ ,  $m < n$ .

Выберем произвольную точку из множества (18.25), для определенности пусть  $n = p$ ,  $k = 1, 2, \dots, 3^p$  – любое, обозначим ее  $x_0$  и рассмотрим окрестность этой точки

$$|x - x_0| < \frac{1}{2 \cdot 3^r}, \quad r > p. \quad (18.26)$$

Запишем функциональный ряд (18.22) в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{p-1} u_n(x) + \sum_{n=p}^r u_n(x) + \sum_{n=r+1}^{\infty} u_n(x). \quad (18.27)$$

Заметим, что если  $p = 1$ , то первая сумма в (18.27) будет отсутствовать, т.е.

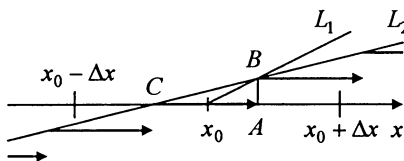


Рис. 18.4

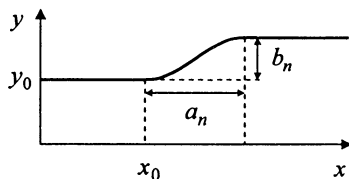


Рис. 18.5

равняться нулю. Предполагая, что производная, если она существует, равна нулю, рассмотрим выражение

$$J(\Delta x) = \left| 0 - \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right| = \frac{|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)|}{|\Delta x|} = \frac{|\Delta f|}{|\Delta x|} \quad (18.28)$$

в окрестности (18.26), т.е. принимая  $|\Delta x| < \frac{1}{2 \cdot 3^r}$ .

Из выбора окрестности (18.26) и указанных выше свойств последовательности функций приращение первых двух сумм в (18.27) будет равно нулю, так как все функции  $u_n(x)$ ,  $n \leq r$  есть константы в рассматриваемой окрестности. Таким образом, модуль приращения функции

$$|\Delta f| = \left| \sum_{n=r+1}^{\infty} \Delta u_n \right| \leq \sum_{n=r+1}^{\infty} |\Delta u_n| < \sum_{n=r+1}^{\infty} 4a_n |\Delta x| = 4 |\Delta x| \sum_{n=r+1}^{\infty} a_n < 4 |\Delta x| \sum_{n=r}^{\infty} a_n, \quad (18.29)$$

где  $\Delta u_n$  – приращение функции  $u_n(x)$ , соответствующее приращению  $\Delta x$  аргумента,  $|\Delta x| < \frac{1}{2 \cdot 3^r}$  (рис. 18.4). Рис. 18.4 иллюстрирует оценку  $|\Delta u_n| < 4a_n |\Delta x|$ , на нем для более удобного рассмотрения приращения функции ось  $Ox$  поднята на величину ее значения  $u_n(x_0)$  в точке  $x_0$ . Абсолютная величина приращения  $\Delta u_n$  функции  $u_n(x)$  в точке  $x_0$ , при приращении  $\Delta x$  аргумента ограничена угловым коэффициентом  $k_1$  прямой  $L_1$ , умноженным на  $|\Delta x|$ ,  $k_1$  в два раза больше углового коэффициента  $k_2$  прямой  $L_2$  (из рассмотрения треугольников  $ABC$  и  $ABx_0$ ). Из рис. 18.3 понятно, что  $k_2 = \frac{a_n}{1 - \frac{1}{3^n}} < \frac{a_n}{1 - \frac{1}{2}} = 2a_n$ .

Соответственно получаем  $|\Delta u_n| \leq k_1 |\Delta x| = 2k_2 |\Delta x| < 4a_n |\Delta x|$ . Возвращаясь к выражению (18.28), можем записать с учетом (18.29)

$$J(\Delta x) = \frac{|\Delta f|}{|\Delta x|} < \frac{4 |\Delta x| \sum_{n=r}^{\infty} a_n}{|\Delta x|} = 4 \sum_{n=r}^{\infty} a_n. \quad (18.30)$$

Правая часть (18.30) представляет собой учетверенный остаток сходящегося числового положительного ряда, который (остаток) при неограниченном увеличении  $r$  ( $r \rightarrow \infty$ ), соответственно при  $\Delta x \rightarrow 0$ , стремится к нулю. Отсюда следует, что при  $\Delta x \rightarrow 0$  величина  $J(\Delta x) \rightarrow 0$  и производная функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  существует и равна нулю. Заметим, что точки (18.25), в которых существует производная, плотно расположены на  $[0, 1]$ .

Из свойств функции (18.22) можно сделать заключение о том, что построенная функция строго монотонна, имеет и не имеет производную на множествах, плотных на  $[0, 1]$ . В точках (18.25) существования производной, равной нулю, в силу строгой монотонности функции располагаются ее точки перегиба. Действительно, из существования и равенства нулю производной в точках (18.25) следует существование горизонтальных касательных к графику функции в этих точках; а из строгой монотонности функции следует, что ее график до и после каждой точки (18.25) лежит соответственно ниже и выше касательной к графику функции в этой точке. И наконец, напомним, что множество точек (18.25), т.е. точек перегиба, плотно на отрезке  $[0, 1]$ .

**18.6. Дифференцируемая строго монотонная функция с производной, равной нулю, и точками перегиба на множестве меры, близкой к полной.** Определим на отрезке  $[0, 1]$  функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (18.31)$$

которая является суммой функционального ряда, составленного из функций

$u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  Функция  $u_n(x)$  определяется на отрезке  $[0, 1]$  следующим образом. Отрезок  $[0, 1]$  разбивается на  $n + 1$  равных частей (отрезков) точками

$$x_k = \frac{k}{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (18.32)$$

На первом отрезке функция  $u_n(x)$  равна нулю, на начальной части второго отрезка, длина которой  $a_n = \frac{\varepsilon}{n2^n}$  ( $1 > \varepsilon > 0$  – произвольное малое число), гладко возрастает от нуля до значения  $b_n = \frac{3}{n2^{2n}}$ , а затем сохраняет постоянное значение, далее на каждом последующем  $k$ -м отрезке (18.32), на начальной его части длиной  $a_n$  гладко возрастает от значения  $(k-2)b_n$  до  $(k-1)b_n$ , а затем сохраняет это значение (рис.18.5). Гладкое возрастание функции от точки  $(x_0, y_0)$  до точки  $(x_0 + a_n, y_0 + b_n)$  определим следующим образом

$$y(x) = y_0 + \frac{b_n}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi}{a_n} (x - x_0) \right) \right). \quad (18.33)$$

Таким образом, функция  $u_n(x)$  представляет собой ступенчатую монотонную функцию, составленную из  $n + 1$  ступеньки. Соседние ступеньки соединяются (гладко сопрягаются) кривыми (18.33) (рис. 18.6). На рис. 18.6 изо-

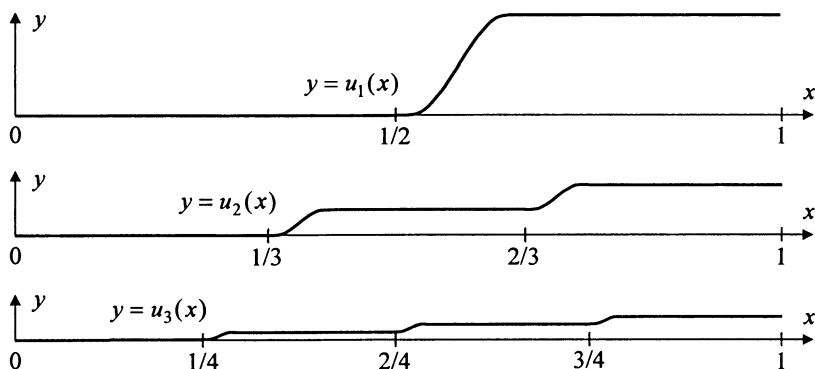


Рис. 18.6

бражены первые три члена  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$ ,  $u_3(x)$  ряда (18.31). Каждая из функций  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  дифференцируема на всем отрезке  $[0, 1]$ , ее производная равна нулю кроме участков сопряжения ступенек, где производная равна производной функции (18.33)

$$y'(x) = \frac{b_n}{2} \cdot \frac{\pi}{a_n} \sin \left( \frac{\pi}{a_n} (x - x_0) \right). \quad (18.34)$$

Производная (18.34) неотрицательна, равна нулю только на концах участков сопряжения (при  $x = x_0$ ,  $x = x_0 + a_n$ ) и ограничена сверху величиной

$$\max_{x_0 \leq x \leq x_0 + a_n} y'(x) = \frac{b_n}{2} \cdot \frac{\pi}{a_n} = \frac{3\pi}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{2^n}. \text{ Таким образом,}$$

$$0 \leq u'_n(x) \leq \frac{3\pi}{2\varepsilon} \cdot \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18.35)$$

Сама функция  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ограничена по своему построению

$$0 \leq u_n(x) \leq nb_n = \frac{3}{2^{2n}}. \quad (18.36)$$

Из ограничений (18.36) и (18.35) следует, что ряд (18.31) и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ , составленный из производных, мажорируются сходящимися числовыми рядами, следовательно, они равномерно сходятся на отрезке  $[0, 1]$ . Согласно известной теореме, при равномерной сходимости рядов (18.31) и  $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$  ряд (18.31) можно почленно дифференцировать на  $[0, 1]$ . В результате такого почленного дифференцирования получаем, что производная  $f'(x)$  функции  $f(x)$  равна нулю в тех точках, где каждая из производных  $u'_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  равна нулю. Иными словами,  $f'(x) = 0$  в точках отрезка  $[0, 1]$ , лежащих вне интервалов, где производные  $u'_n(x)$  функций  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  не равны нулю, такие интервалы назовем интервалами сопряжения. Общая длина  $L$  интервалов сопряжения равна

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} na_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon. \quad (18.37)$$

Обозначим  $M$  – множество точек  $x$ , в которых  $f'(x) = 0$ ,  $M = [0, 1] \setminus I$ , где  $I$  – объединение всех интервалов сопряжения. Так как некоторые интервалы сопряжения лежат в интервалах сопряжения с меньшими значениями  $n$  (см. рис. 18.6), то мера  $\mu(M)$  множества  $M$  в силу (18.37) имеет следующую оценку

$$\mu(M) > 1 - L = 1 - \varepsilon. \quad (18.38)$$

Покажем, что функция  $f(x)$  строго монотонная на  $[0, 1]$ . Рассмотрим две любые точки  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ), принадлежащие  $[0, 1]$ . В силу монотонного возрастания каждой из функций  $u_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , выполняется  $u_n(x_1) \leq u_n(x_2)$ .

Очевидно также, что по крайней мере при всех  $n$ , при которых  $\frac{2}{n+1} < x_2 - x_1$ , хотя бы один интервал сопряжения лежит внутри  $(x_1, x_2)$  и, следовательно, выполняется  $u_n(x_1) < u_n(x_2)$ . Иными словами, для некоторого конечного числа первых членов ряда (18.31) выполняется отношение  $u_n(x_1) \leq u_n(x_2)$ , а для

бесконечного числа всех последующих членов ряда (18.31) выполняется отношение  $u_n(x_1) < u_n(x_2)$ . Отсюда следует, что  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_1) < \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_2)$ , а значит,  $f(x_1) < f(x_2)$ , и функция  $f(x)$  строго монотонна на  $[0, 1]$ . Заметим, что  $f(0) = 0$ , так как  $u_n(0) = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$  по определению, а  $f(1) = 1$ , так как

$$u_n(1) = nb_n = \frac{3}{2^{2n}}, \quad n = 1, 2, \dots \text{ и}$$

$$f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{2n}} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n}} = 3 \cdot \frac{1/4}{1 - 1/4} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$

Таким образом, можно сказать, что функция  $f(x)$  при изменении  $x$  от 0 до 1 строго монотонно возрастает от 0 до 1, при этом мера множества  $M$  точек  $x$ , в которых  $f'(x) = 0$ , может быть сколь угодно близкой к полной, т.е. к единице – мере всего отрезка  $[0, 1]$ , см. оценку (18.38). Заметим, что каждая из точек  $x$  множества  $M$  есть точка перегиба, так как в силу равенства  $f'(x) = 0$  касательная к графику функции  $f(x)$  в точке  $x$  горизонтальна, а функция  $f(x)$  строго монотонна, и ее график расположен левее  $x$  строго ниже, а правее  $x$  строго выше названной касательной.

### 18.3. Фракталы и построение примеров функций

**18.7. Некоторые функции, построенные с применением фракталов.** Самоподобие и другие замечательные свойства фракталов позволяют определять с их помощью различные нетривиальные функции. Наглядность и простота структуры фракталов привносят при этом наглядность и краткость в обоснования свойств построенных функций.

Построим в единичном квадрате  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  плоскости  $Oxy$  фрактал (рис. 18.7). Разобьем единичный квадрат на девять квадратов с длинами сторон  $\frac{1}{3}$ . Стороны среднего из них включаем во фрактал. Далее аналогично поступаем с каждым из этих девяти квадратов: разбиваем его на девять квадратов с длинами сторон  $\frac{1}{9}$ , стороны среднего из них включаем во фрактал (всего включаем стороны девяти квадратов). Затем аналогично поступаем с каждым из полученных на предыдущем шаге восьмидесяти одним квадратом: разбиваем его на девять квадратов с длинами сторон  $\frac{1}{27}$  и стороны среднего из них включаем во фрактал (всего включаем стороны восьмидесяти одного квадрата). Описанный итерационный процесс неограниченно продолжаем. На рис. 18.7 жирно выделены стороны квадратов, полученных на трех первых шагах построения. В результате получаем фрактал, состоящий из непересекающихся квадратов с длинами сторон  $\frac{1}{3^k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  (здесь и ниже для крат-

кости под принадлежащими фракталу квадратами будем понимать только стороны квадратов, эти квадраты назовем фрактальными). По своему построению внутренность каждого фрактального квадрата подобна всему фракталу. Очевидно также, что точки фрактала располагаются плотно в единичном квадрате. Центр некоторого фрактального квадрата является также и центром для concentрических фрактальных квадратов любого меньшего размера.

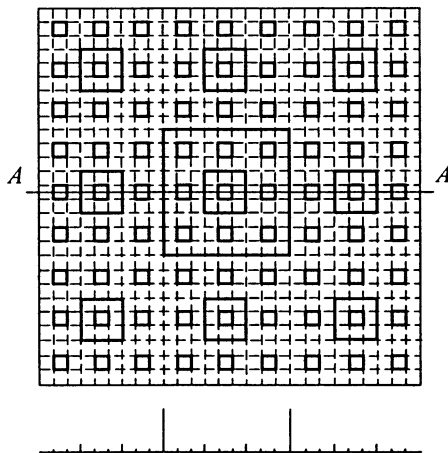


Рис. 18.7

Используем данный фрактал для построения функций с замечательными свойствами.

1. Зададим на единичном квадрате  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  функцию следующим образом

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} a^2, & \text{если } (x, y) \text{ на фракт. квадрате с дл. стороны } a; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (18.39)$$

Покажем, что функция (18.39) имеет точки разрыва, плотно расположенные в единичном квадрате. Действительно, в любой точке фрактала (она принадлежит одному из его квадратов) функция положительна. Однако в любой окрестности такой точки лежат точки, не принадлежащие фракталу, в которых значение функции равно нулю.

В то же время функция дифференцируема в точках, также расположенных плотно в единичном квадрате. Рассмотрим центр любого фрактального квадрата (пусть длина стороны этого квадрата равна  $\frac{1}{3^n}$ ), имеющий координаты  $(x_0, y_0)$ . По построению фрактала этот центр не лежит ни на одном фрактальном квадрате, следовательно,  $f(x_0, y_0) = 0$ . Покажем, что приращение функции в точке  $(x_0, y_0)$  может быть записано в виде

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o(\rho), \quad (18.40)$$

где  $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ , что означает дифференцируемость функции (18.39) в точке  $(x_0, y_0)$ . Действительно, рассмотрим произвольную  $\rho$ -окрестность,  $0 < \rho < \frac{1}{2 \cdot 3^n}$ , точки  $(x_0, y_0)$ . Внутри этой окрестности могут лежать только точки фрактальных квадратов с длинами сторон  $a$ , меньшими  $2\rho$ ,  $a < 2\rho$ . Получаем в данной окрестности

$$0 \leq f(x, y) < \frac{1}{4}(2\rho)^2 = \rho^2.$$

Так как  $\rho^2 = o(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 0$ , убеждаемся в справедливости (18.40). Заметим, наконец, что центры фрактальных квадратов, т.е. точки дифференцируемости функции (18.39), плотно располагаются в единичном квадрате.

Рассмотрим сечение фрактала и функции (18.39) прямой  $AA$  (рис. 18.7). Полученная функция одного переменного  $y = \varphi(x)$  (ее график показан в нижней части рис. 18.7 и несколько растянут по оси  $Oy$  для наглядности) также определена на фрактале, который является сечением исходного фрактала, и обладает свойствами, аналогичными свойствам функции (18.39), т.е. функция  $y = \varphi(x)$  имеет точки разрыва, плотно расположенные в единичном отрезке и дифференцируема в точках, также расположенных плотно в единичном отрезке.

2. Зададим на единичном квадрате  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  функцию

$$\gamma(x, y) = \begin{cases} a^2/4, & \text{если } (x, y) - \text{вершина } A \text{ или } C \text{ фракт. квадрата;} \\ -a^2/4, & \text{если } (x, y) - \text{вершина } B \text{ или } D \text{ фракт. квадрата;} \\ 0, & \text{в других случаях;} \end{cases} \quad (18.41)$$

где  $A$  и  $C$  – верхняя левая и нижняя правая, а  $B$  и  $D$  – верхняя правая и нижняя левая вершины фрактального квадрата,  $a$  – длина его стороны.

Функция (18.41) по ее заданию обладает теми же свойствами, что и функция (18.39). Но дополнительно к этому, она в вершинах фрактальных квадратов  $A$  и  $C$  имеет строгие локальные максимумы, а в вершинах  $B$  и  $D$  имеет строгие локальные минимумы. Действительно, если длина стороны фрактального квадрата равна  $\frac{1}{3^n}$ , то в любой проколотовой  $\varepsilon$ -окрестности,

$0 < \varepsilon < \frac{1}{3^n}$ , вершин  $A$  и  $C$  ( $B$  и  $D$ ) все значения функции (18.41) будут меньше (больше), чем в самой вершине, так как в эту окрестность попадут только вершины квадратов меньшего размера. Заметим, что множества вершин  $A$  и  $C$  ( $B$  и  $D$ ) плотны в единичном квадрате.

3. Зададим на единичном квадрате  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  функцию

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \operatorname{ctg}\left(3^k \pi(x - x_0)\right), & \text{если } (x, y) \text{ лежит на верхней стороне} \\ \text{фракт. квадрата, } x_0 < x < x_0 + \frac{1}{3^k}; & \\ 0, & \text{в других случаях;} \end{cases} \quad (18.42)$$

где  $x_0$  – координата  $x$  верхней левой вершины, а  $\frac{1}{3^k}$  – длина стороны фрактального квадрата. Иными словами, функция (18.42) определена на верхней стороне каждого фрактального квадрата, исключая ее концы (вершины квадрата), как полный период котангенса. Следовательно, функция (18.42) принимает все действительные значения на верхней стороне каждого фрактального квадрата. Учитывая то, что в любой окрестности любой точки единичного квадрата лежат фрактальные квадраты, получаем, что функция (18.42) принимает все действительные значения в такой произвольной окрестности.

**18.8. Фрактальное построение всюду непрерывной, но нигде недифференцируемой функции.** Построим в единичном квадрате плоскости  $Oxy$  фрактал и функцию  $y = f(x)$ . Точки фрактала с координатами  $(x, y)$  будем принимать за точки графика функции  $y = f(x)$ . На нулевом шаге задаем две точки с координатами  $(x_1 = 0, f(x_1) = 0)$  и  $(x_2 = 1, f(x_2) = 1)$ . На первом и всех последующих шагах будем строить точки, используя следующую схему (рис. 18.8). А именно, для каждых двух соседних (в смысле близости по аргументу  $x$ ) ранее построенных точек  $C_1$  и  $C_2$  будем строить две новые точки  $H_1$  и  $H_2$  (см. рис. 18.8). Построение точек  $H_1$  и  $H_2$  выполняется центрально-

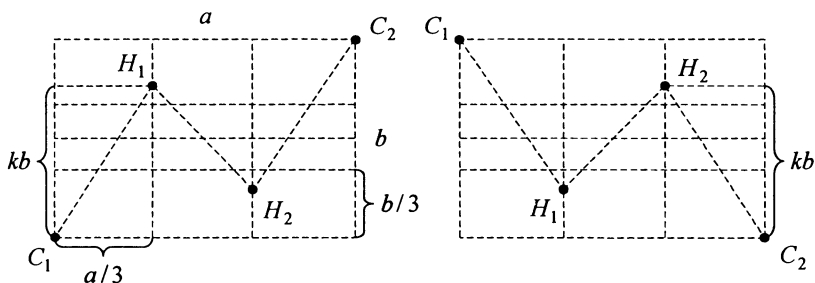


Рис. 18.8

симметрично относительно центра прямоугольника, определяемого точками  $C_1$  и  $C_2$ . Коэффициент  $k$ , данный на схеме, принимаем постоянным и любым из интервала  $\frac{2}{3} < k < 1$ . В зависимости от того, какая из соседних точек  $C_2$  или  $C_1$  выше, используем левую или правую части схемы. Если после этого построения четыре последовательные точки (две старые и две новые) соединить ломаной, то она будет иметь вид «молнии» – левой или зеркальной ей – правой. На первом шаге принимаем  $a = b = 1$ .

Выполнив построение точек при всех номерах шагов  $m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , по-



лучим фрактал, который будет подобен (с точностью до некоторого аффинного преобразования) каждой своей части, заключенной в любой полосе

$$\frac{l}{3^m} \leq x \leq \frac{l+1}{3^m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad l = \overline{0, 3^m - 1}$$

(рис. 18.9). На рисунке показаны точки фрактала, построенные на шагах 0, 1, 2, 3 и 4. Для наглядности в последних двух случаях масштаб утроен, на шаге 4 убраны мелкие линии разметки.

Заметим, что схема построения точек графика функции (фрактала), во-первых, определяет их расположение по оси  $Ox$  в точках

$$x = \frac{l}{3^m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad l = \overline{0, 3^m}, \quad (18.43)$$

во-вторых, влечет за собой то, что построенная функция  $y = f(x)$  имеет в

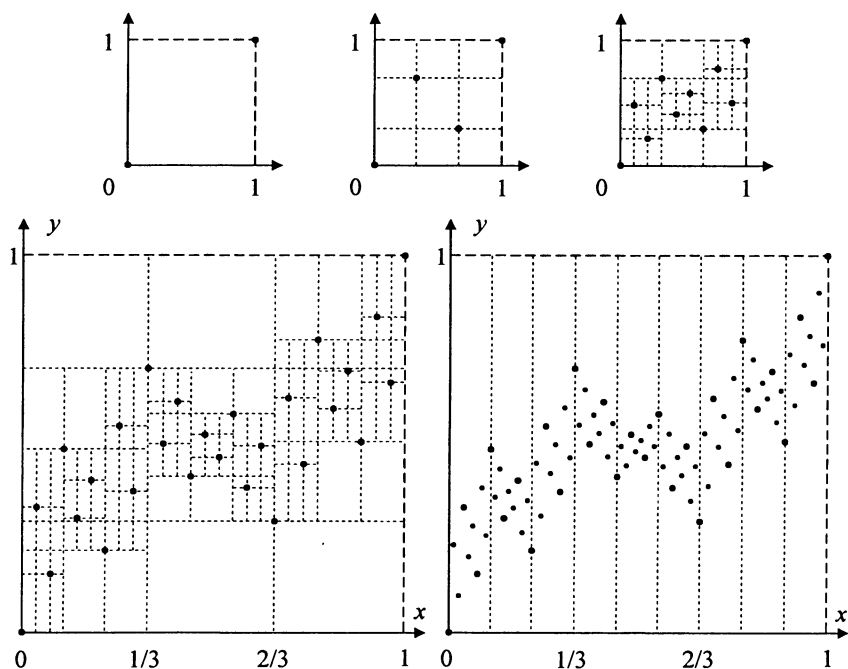


Рис. 18.9

каждой точке вида (18.43) строгий минимум или максимум. Таким образом, в результате построения фрактала получим определенную на множестве точек (18.43), которое плотно на отрезке  $[0, 1]$ , нигде немонотонную функцию  $y = f(x)$ , которая имеет плотные на  $[0, 1]$  множества точек строгих минимумов и максимумов.

Докажем, что функция  $y = f(x)$  непрерывна на множестве точек (18.43).

Обозначим максимальные расстояния по осям  $Ox$  и  $Oy$  между соседними точками, построенными на шаге  $m$ , через  $\delta_x^m$  и  $\epsilon_y^m$  соответственно. Расстояния между соседними точками по оси  $Ox$  равны между собой и  $\delta_x^m = \left(\frac{1}{3}\right)^m$ .

По оси  $Oy$  расстояния разные, но максимальное расстояние  $\epsilon_y^m \leq (k)^m$ , где  $k < 1$ . Последнее объясняется схемой построения точек: на каждом шаге  $m+1$ , начиная с первого, расстояния по оси  $Oy$  между полученными по схеме соседними точками (между новыми и между старыми и новыми) меньше или равно  $kb$ , где  $b$  – расстояние по оси  $Oy$  между соседними точками, построенными на шаге  $m$  (см. рис. 18.8), при этом на нулевом шаге  $b = 1$ . Таким образом, при стремлении расстояния между точками по оси  $Ox$  к нулю (при  $m \rightarrow \infty$ ) расстояние между ними по оси  $Oy$  также стремится к нулю. Следовательно, функция  $y = f(x)$  непрерывна на множестве точек (18.43).

Так как множество точек (18.43) плотно на отрезке  $[0, 1]$  оси  $Ox$ , то определенная и непрерывная на нем функция  $y = f(x)$  доопределяется по непрерывности (предельным переходом) до непрерывной на  $[0, 1]$  функции. Сохраним для полученной доопределенной функции обозначение  $y = f(x)$ . Легко показать, что и доопределенная функция имеет в каждой точке вида (18.43) строгий минимум или максимум, она нигде немонотонна и ее множества точек строгих минимумов и максимумов плотны на  $[0, 1]$ .

Докажем, что построенная непрерывная на  $[0, 1]$  функция  $y = f(x)$  не имеет ни в одной точке даже односторонних производных. Рассмотрим два случая.

Пусть  $x_0$  произвольная точка отрезка  $[0, 1]$  вида (18.43). По построению функции  $y = f(x)$ , любая точка вида (18.43) есть ее точка строгого минимума или максимума. Без потери общности считаем, что в точке  $x_0$  достигается строгий минимум функции. Предположим, что точке  $x_0$  соответствует в (18.43) некоторое  $m = q$ . Рассмотрим произвольную правую  $\epsilon$ -полукрестность  $(x_0, x_0 + \epsilon)$  точки  $x_0$  (рис. 18.10). На рисунке показана схема  $\epsilon$ -окрестности произвольной точки  $x_0$ : слева – в случае, когда  $x_0$  точка вида (18.43), справа – в противном случае. Система координат смещена вдоль оси  $Oy$ . Для данного  $\epsilon > 0$  существует такое достаточно большое  $n > q$ , что в  $[x_0, x_0 + \epsilon)$  попадут четыре подряд следующие точки вида (18.43) для  $m = n$ , включая и саму точку  $x_0$ . На рис. 18.10 жирными точками отмечены точки графика функции при рассматриваемых значениях  $x$  (для полных  $\epsilon$ -окрестностей). Отношение приращения функции к приращению аргумента  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  для точек  $x_1 = x_0 + \frac{1}{3^n}$  и  $x_2 = x_0 + \frac{2}{3^n}$  будет равно соответственно

$$p_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \text{ и } p_2 = \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0}. \quad (18.44)$$

По построению функции  $p_1 > 2$ , а отношение величин (18.44)  $\frac{p_1}{p_2} > 4$ . Отсюда получаем  $p_2 < \frac{p_1}{4}$  или  $-p_2 > -\frac{p_1}{4}$ , следовательно,

$$p_1 - p_2 > p_1 - \frac{p_1}{4} = \frac{3}{4} p_1 > \frac{3 \cdot 2}{4} = 1,5.$$

Так как в любой правой полуокрестности точки  $x_0$  для отношения  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  имеем два отличающихся более чем на 1,5 значения (18.44), то  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  в точке  $x_0$  не существует. Аналогично рассматривается и случай левой полуокрестности и устанавливается несуществование в точке  $x_0$  предела отношения  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  слева. Заметим, что для концевых точек отрезка  $[0, 1]$  рассматривается только одна из двух полуокрестностей. Таким образом, функция  $y = f(x)$  не имеет ни в одной точке вида (18.43) даже односторонних производных.

Пусть  $x_0$  произвольная точка отрезка  $[0, 1]$ , кроме точек вида (18.43). Рассмотрим произвольную правую  $\varepsilon$ -полуокрестность  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$  точки  $x_0$  (см.

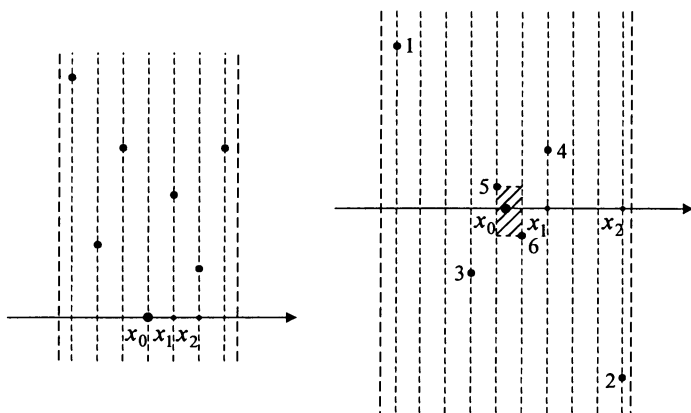


Рис. 18.10

рис. 18.10). Для данного  $\varepsilon > 0$  существует такое достаточно большое  $n$ , что в  $(x_0, x_0 + \varepsilon)$  попадут как минимум пять, а в полную  $\varepsilon$ -окрестность как минимум десять, подряд следующих точек вида (18.43) для  $m = n$ . Обозначим  $x_1$  и  $x_2$  – вторую и пятую из этих точек в правой  $\varepsilon$ -полуокрестности соответственно. На рис. 18.10 для шести из десяти таких точек, попавших в полную  $\varepsilon$ -окрестность, построены и перенумерованы точки графика функции. Без потери общности считаем, что значение функции для точки 5 больше, чем для точки 6. По построению функции  $y = f(x)$  точки графика выстраиваются в

две «молнии» (из точек 1, 3, 4, 2 – большая, из точек 3, 5, 6, 4 – маленькая). Точка графика  $(x_0, f(x_0))$  может располагаться только в открытом прямоугольнике (на рис. 18.10 заштрихован). Из сравнения координат вершин прямоугольника и точки 4 графика функции следует, что при переходе от точки  $x_0$  к  $x_1$  приращение аргумента  $\frac{1}{3^n} < \Delta x_1 < \frac{2}{3^n}$ , а приращение функции  $\Delta y_1 > 0$ ,

т.е.  $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} > 0$ . Из сравнения координат вершин прямоугольника и точек 3 и 2

графика функции следует, что при переходе от точки  $x_0$  к  $x_2$  приращение аргумента  $\frac{4}{3^n} < \Delta x_2 < \frac{5}{3^n}$ , а приращение функции  $\Delta y_2 < 0$ , т.е.  $\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} < 0$ . Напом-

ним, что в схеме построения точек фрактала коэффициент  $\frac{2}{3} < k < 1$ , а на первом шаге  $a = b = 1$ . Отсюда, угловой коэффициент наклона отрезка с концами в точках 4 и 2 по абсолютной величине больше двух. Следовательно, сравнивая проекции этого отрезка на оси  $Oy$  и  $Ox$ , получаем

$$|\Delta y_1| + |\Delta y_2| > 2 \cdot \frac{3}{3^n}. \quad (18.45)$$

Рассмотрим разность

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} - \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} = \left| \frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} \right| + \left| \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} \right| > \left| \frac{\Delta y_1}{\Delta x_2} \right| + \left| \frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} \right| = \frac{|\Delta y_1| + |\Delta y_2|}{\Delta x_2} > \frac{2 \cdot 3 \cdot 3^n}{3^n \cdot 5} = \frac{6}{5}. \quad (18.46)$$

В первом равенстве (18.46) учтено, что  $\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1} > 0$ ,  $\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2} < 0$ , в первой оценке использовано неравенство  $0 < \Delta x_1 < \Delta x_2$ , в последней оценке использованы неравенства (18.45) и  $\frac{4}{3^n} < \Delta x_2 < \frac{5}{3^n}$ . Так как в любой правой полуокрестности

точки  $x_0$  для отношения  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  имеем два, отличающихся более чем на  $\frac{6}{5}$ , значения, то  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  в точке  $x_0$  не существует. Аналогичные рассуждения выполняются и для левой полуокрестности точки  $x_0$ .

Таким образом, построенная непрерывная функция  $y = f(x)$  не имеет ни в одной точке отрезка  $[0, 1]$  даже односторонних производных.

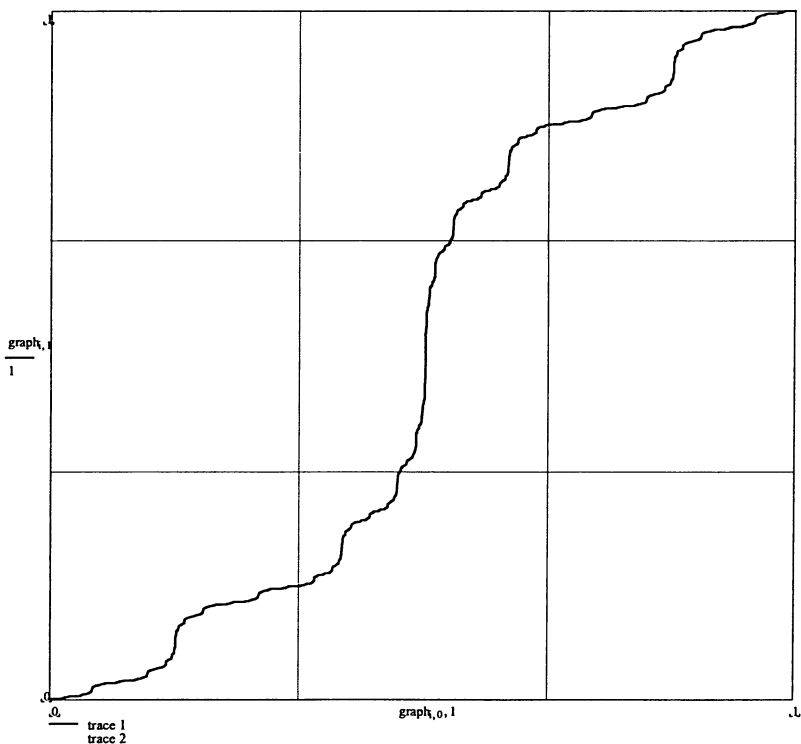
Мы полагали, что  $\frac{2}{3} < k < 1$ . Однако выполненное выше построение дает непрерывные функции для любого  $k$ ,  $0 < k < 1$ . Интервал  $0 < k < 1$  состоит из нескольких промежутков (диапазонов). При изменении  $k$  в каждом из них получаем функции со своими особыми свойствами.

В системе «Mathcad» построены графики функций для различных значений  $k$ , эти графики приводятся ниже. Перед тем как обратиться к ним, заме-

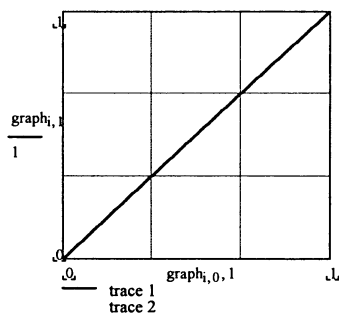
тим следующее. При построении подобных примеров функций с использованием равномерно сходящихся функциональных рядов значения функции в конкретных точках переопределяются при последовательном суммировании членов ряда, и поэтому окончательный график функции не виден, более того, его невозможно зрительно представить себе. Выполненное построение фрактала сразу дает значения функции в конкретных точках, без последующего их переопределения, и график функции можно видеть. Более того, визуально наблюдаемая фрактальная структура графика в определенной степени объясняет свойства построенной функции.

### Графики функций, построенные в системе «Mathcad»

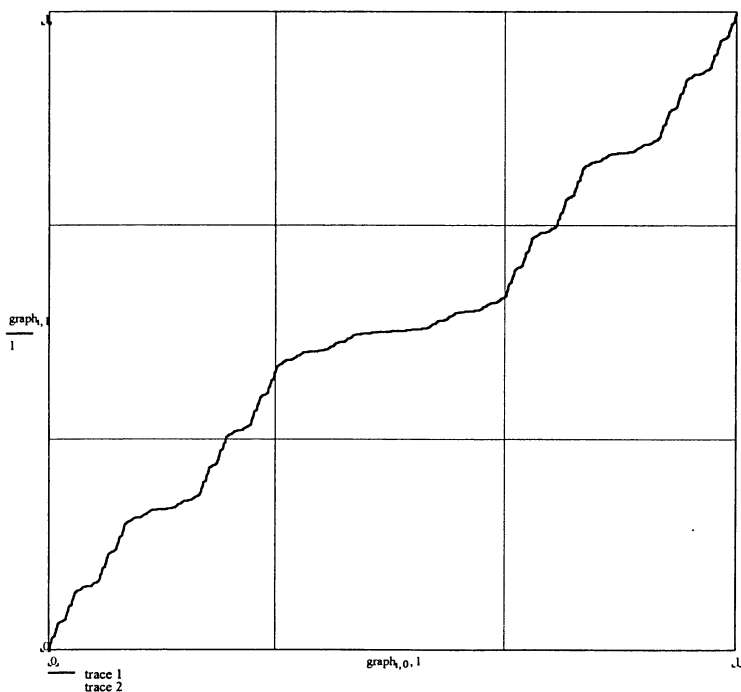
1. В диапазоне  $0 < k < \frac{1}{3}$  функция построена для  $k = \frac{1}{6}$ . Эта функция, как и приведенная ниже для диапазона  $\frac{1}{3} < k < \frac{1}{2}$ , непрерывная и строго монотонно возрастающая, имеет нулевые и бесконечные производные (соответственно точки перегиба) на множествах точек, плотных на отрезке  $[0, 1]$ .



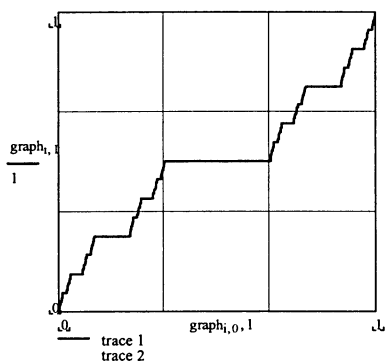
2. Для  $k = \frac{1}{3}$ , как и следовало ожидать, получена линейная функция  $y = x$ .



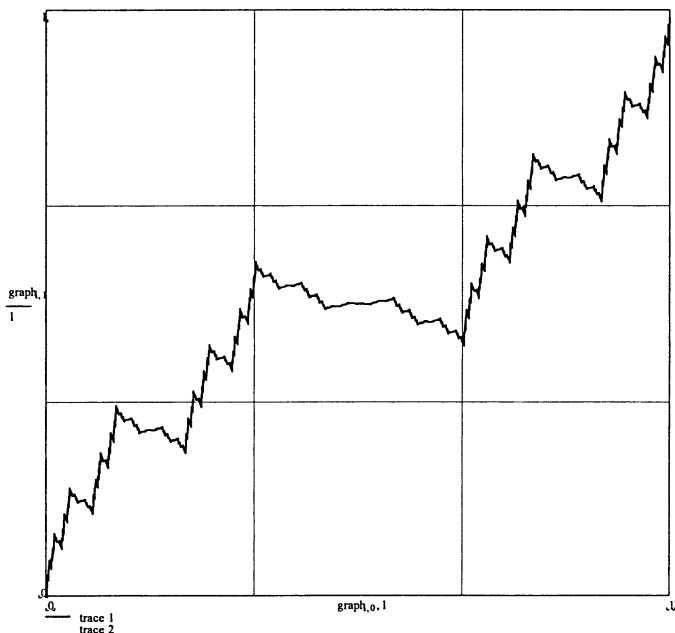
3. В диапазоне  $\frac{1}{3} < k < \frac{1}{2}$  функция построена для  $k = \frac{4}{9}$ . Свойства функции те же, что и при значениях  $k$  из диапазона  $0 < k < \frac{1}{3}$ .



4. Для  $k = \frac{1}{2}$  получена непрерывная монотонно возрастающая функция, известная как канторова функция или канторова лестница. Эта функция имеет почти всюду производную, равную нулю.

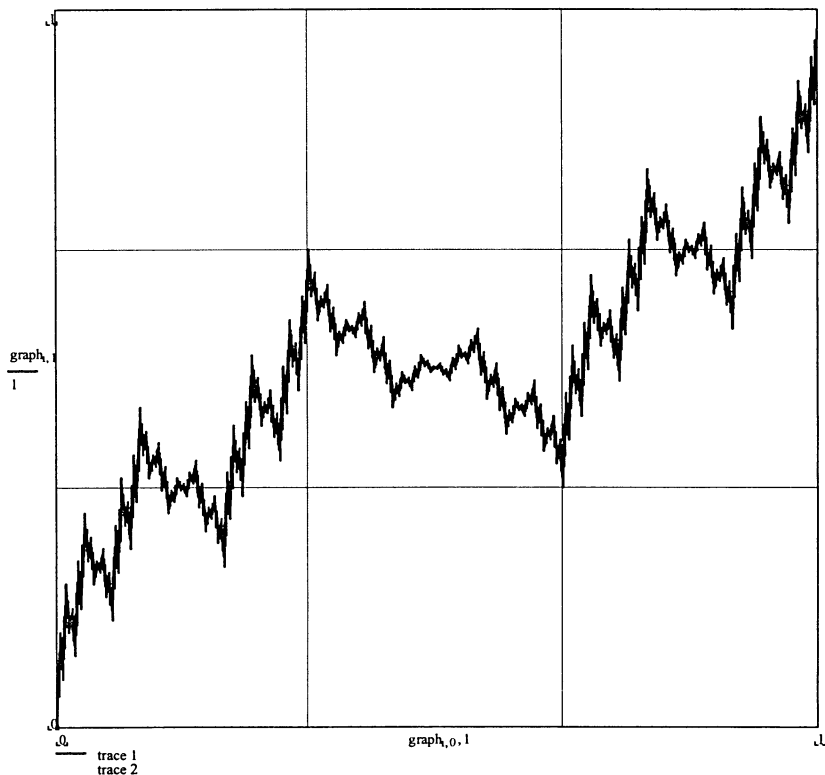


5. В диапазоне  $\frac{1}{2} < k < \frac{2}{3}$  построена для  $k = \frac{4}{7}$  непрерывная функция, которая



нигде не монотонна, имеет строгие минимумы и максимумы, нулевые производные, бесконечные (обоих знаков) односторонние производные на множествах точек, плотных на отрезке  $[0, 1]$ .

6. Для  $k = \frac{2}{3}$  построена функция непрерывная, но нигде не имеющая даже односторонних производных. Она, как и функция при  $\frac{1}{2} < k < \frac{2}{3}$ , нигде не монотонна, имеет строгие минимумы и максимумы на множествах, плотных на отрезке  $[0, 1]$ .



7. В диапазоне  $\frac{2}{3} < k < 1$  функция обладает теми же свойствами, что и функция для  $k = \frac{2}{3}$ . Просматривается та же фрактальная структура графика, но его «изломы» ярче выражены (график не приводим).



## ОТВЕТЫ

- 1.2., 1.3.  $x_n = (-1)^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  1.5.  $f(x) = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}$ .
- 1.6.  $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)D(x)$ . 1.7.  $f_1(x) = x$ ,  $f_2(x) = -x$ .
- 1.8.  $f(x) = 2D(x) - 1$ . 2.1.  $\left[\frac{1}{x}\right]$ . 2.2.  $f(x) = 2D(x) - 1$ . 2.3.  $f(x) = D(x)$ ,  $g(x) = 1 - D(x)$ , при этом  $\varphi(x) \equiv 0$ ,  $\psi(x) \equiv 1$ . 2.4.  $f(x) = \{x\}$ . 2.5. Нет. Любая непрерывная, но не равномерно непрерывная на  $(a, b)$  функция.
- 2.6.  $f(x) = x$  равномерно непрерывная в  $(-\infty, +\infty)$ , но  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
- 2.7.  $f(x) = x$  и  $g(x) = \ln x$  равномерно непрерывны на  $[1, +\infty)$ , чего нельзя сказать о  $f(x) \cdot g(x)$ . 3.1.  $f(x) = (x-1)^2(x-2)^2 D(x) + \frac{x^2}{2} + 2x$  имеет производную  $f'(1) = 3$ ,  $f'(2) = 4$ . 3.2.  $f(x) = \sqrt[3]{\sin(\pi x)}$ . 3.3.  $f(x) = |\sin(\pi x)|$ .
- 3.4. Нет.  $f(x) = \sin \ln x$ . 3.5. Нет.  $f(x) = \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$ ,  $a = 0$ . 3.6.  $f(x) = -x$ , если  $x < 0$ ;  $f(x) = x^2 - x$ , если  $0 \leq x \leq 1$ ;  $f(x) = x - 1$ , если  $x > 1$ . 3.7.  $f(x) = x^2$ , если  $x \leq 0$ ,  $f(x) = 2x^2$ , если  $x > 0$ . В точке  $x = 0$ . 3.8.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  равномерно непрерывна на  $(-\infty, +\infty)$ , но  $f'(x)$  не ограничена:  $f'(0) = +\infty$ .
- 4.3.  $f(x) = \sin x$  на  $[-\pi, \pi/2]$ . 4.4.  $f(x) = (1-x^2)\sqrt[3]{x}$  на  $[-1, 1]$ . 4.5.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  на  $[-1, 1]$ . 4.6. Функции  $f(x) = -x$ ,  $g(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x = 1 \end{cases}$  на отрезке  $[0, 1]$ .
- 4.7. Функции  $f(x) = |x|$ ,  $g(x) = x$  на отрезке  $[-1, 1]$ . 5.1. Функции  $f(x) = 2$ ,  $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{если } 1 < x \leq 2 \end{cases}$  на отрезке  $[0, 2]$ , в точке  $x = 1$  функция  $g(x)$  не определена. Выполняется  $f'(x) = g'(x)$ , но не выполняется  $f(x) = g(x) + C$ .
- 5.2.  $f(x) = 2$  и  $g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1 \end{cases}$  на отрезке  $[0, 1]$ , в конце отрезка ( $x = 1$ ) функция  $g(x)$  имеет разрыв. Выполняется  $f'(x) = g'(x) = 0$  в  $(0, 1)$ , но

не выполняется  $f(x) = g(x) + C$ . 5.3.  $f(x) = 2x + \sin x$ ,  $g(x) = -2x + \sin x$ .

5.4.  $f(x) = x^2 \sin \ln(x^2)$ , если  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ . 5.5.  $f_1(x) = x^2$  или

$f_2(x) = e^x + e^{-x}$ . 5.6.  $f(x) = |\lg(\pi x)|$ . 5.7.  $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot (D(x) + 1)$ . 5.8.  $f(x) = x^3$ .

6.3.  $f(x, y) = (x^2 - 1)D(x) + (y^2 - 1)D(y)$ . 6.4.  $f(x, y, z, u) = \frac{x^2 y^2 z^2 u^2}{x^8 + y^8 + z^8 + u^8}$ .

6.5.  $f(x, y, z) = D(xyz)$ ,  $x = R(u + v)$ ,  $y = R(u + w)$ ,  $z = R(v + w)$ , функция Римана принимает только рациональные значения. 6.6. Нет, рассмотреть окрестность точки  $(1, 1)$ .

7.1.  $f(x, y) = ((x-1)^2 + (y-2)^2)D(x+y) + 3x + 4y$ .

7.3.  $u(x, y, z) = (2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z-1)^2$ , где  $x = D(t+v)$ ,  $y = D(t+v)$ ,  $z = D(t+v)$ .

7.5. В точке  $(-2, 3, 3)$  касательная плоскость  $7x + 5y + z - 4 = 0$ .

7.6.  $f(x, y) = r(x) + r(y)$ , где функция  $r(t)$  определена в примере 5.12.

7.8.  $F(x, y, z) = (z - h_1(x, y))(z - h_2(x, y))(z - h_3(x, y)) = 0$ , где  $h_1, h_2, h_3$  — произвольные функции  $x$  и  $y$ . 8.2.  $\Phi(x) = F(x) + \varphi(x)$ , где  $\varphi(x)$  — любая ступенчатая функция, принимающая на каждом интервале некоторое свое произвольное постоянное значение.

8.3. Да. 8.4. Да, так как функция ограниченная, а множество ее точек разрыва счетно. 8.5. Функция Римана.

8.6.  $f(x) = \begin{cases} m, & \text{если } x = a, \\ M, & \text{если } x = b, \\ \mu_0, & \text{если } x \in (a, b). \end{cases}$  8.7. Нет. Как бы мы ни доопределяли подын-

тегральную функцию в нуле, она на отрезке  $[-1, 1]$  неограниченная, и она не

имеет первообразную на этом отрезке. 9.1. Да. Следует применить достаточ-

ное условие 1 квадратуемости. 9.2. Да. Следует использовать достаточные

условия 2 и 3 квадратуемости. 9.3. Да. 9.4. Нет.  $\overline{C_1} \setminus \overline{C_2}$ , где куб

$C_1: -1 \leq x, y, z \leq 2$ , куб  $C_2: 0 \leq x, y, z \leq 1$ . 9.5. Шар  $S: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ,

$S_1: x^2 + y^2 + z^2 \leq 0, 1D(x^2 + y^2 + z^2) + 0, 1$ ,  $S_2 = S \setminus S_1$ . 9.7. Нет. 10.1. Ряды

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$  и  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ . 10.2. Ряды  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \right)$  и

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ . 10.3. Неприменимы оба. 10.4. Применим,  $f(x) = 1/x^2$ .

10.5. Рассмотреть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n$ . 10.6. Надо снять предположение моно-

тонности:  $a_n > a_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ряд  $1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots$  10.7. Ряды

$1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + 1 + 1 - 1 + \dots$  и  $-1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - 1 - 1 + 1 - \dots$  11.1. Равномер-

на на  $(-\infty, a]$ , где  $a$  — любое число, неравномерна на  $(-\infty, +\infty)$ .

11.2.  $a_n(x) = x/n^2$ ,  $b_n(x) = x^{n-1}$ . 11.3.  $a_n(x) = x/n!$ ,  $b_n(x) = x^{n-1}$ .

11.4.  $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x D(x)$  на отрезке  $[-1, 1]$ , непрерывность только в точке

$x = 0$ . 11.5.  $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x D(x)$  на интервале  $(-\infty, +\infty)$ , непрерывность

только в точке  $x = 0$ . 11.6. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n D(x)}{n!}$  на отрезке  $[-1, 1]$ , предел в точке

$x = 0$ . 11.7. Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin x)^n$  на интервале  $(0, \pi/2)$ , предельная точка  $x = \pi/2$ .

11.8\*. Последовательность  $f_n(x) = \begin{cases} 1/n, & \text{если } 0 \leq x \leq n, \\ 0, & \text{если } n < x < +\infty, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$ , на полу-

интервале  $[0, +\infty)$ . 11.10. Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$  с  $R = 1$ . 12.2.  $f(x) = 1/x$ . 12.3. Лю-

бой расходящийся интеграл и  $c = 0$ . 12.4.  $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$ ,  $g(x) = \frac{1}{x^2} - 1$ .

12.5.  $f(x) = \frac{1+D(x)}{x^3}$ ,  $g(x) = \frac{x}{1+D(x)}$  на  $[1, +\infty)$ . 12.6.  $f(x) = 1/(1-x)$ ,

$g(x) = 1-x$  на  $[0, 1]$ . 12.7.  $f(x) = D(x)$ ,  $g(x) = \ln x$ , если  $0 < x \leq 1$ ,  $g(0) = 0$ , на  $[0, 1]$ . 13.2.  $f(x, y) = y(D(x) + 1)$  при  $y \rightarrow 0$  равномерно на всей оси  $OX$

сходится к  $\varphi(x) \equiv 0$ . 13.4. 1)  $f(x, y) = y + \operatorname{sgn} x$ ,  $-1 \leq x, y \leq 1$ ,  $y \rightarrow 0$ ; 2)

$f(x, y) = y + D(x)$ ,  $0 \leq x, y \leq 2$ ,  $y \rightarrow 1$ . 13.5.  $f(x, y) = D(y) \operatorname{sgn} x$ ,

$-1 \leq x, y \leq 1$ . 13.6. 1)  $f(x, y) = |x - y|$ ,  $0 \leq x, y \leq 1$ ; 2)  $f(x, y) = x + R(y)$ ,

$0 \leq x, y \leq 1$ . 13.7.  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{yx}$ ,  $Y: y \geq 1$ . 13.8. 1)  $f(x, y) = y e^{-[x]}$ ,  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,

$y \rightarrow 0$ ; 2)  $f(x, y) = y D(x)$ ,  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $y \rightarrow 0$ . 13.9.  $f(x, y) = \frac{\sin y}{x^2}$ ,

$x \geq 1$ ,  $-\pi \leq y \leq \pi$ . 13.10.  $f(x, y) = (\cos y)^x$ ,  $x \geq 1$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$ . 14.2. (K):

$y = y(x) = |x|$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ ;  $f(x, y) = x^3 y$ ; записать интеграл (14.2) в виде суммы интегралов на отрезках  $[-1, 0]$  и  $[0, 1]$ . 14.4. Вид кривой на шаге  $n$ :

$y = \frac{1}{2 \cdot 3^{2n}} (\cos(2 \cdot 3^n \pi x) + 1)$ ,  $-\frac{1}{2 \cdot 3^n} \leq x \leq \frac{1}{2 \cdot 3^n}$ . 14.6. Положим  $P(x, y) = xy$ ,

$Q(x, y) = -xy$ , проверить на контуре треугольника:  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(1, 0)$ .

15.1.  $f_1(x, y) = \frac{1}{xy}$ ,  $x, y \neq 0$ ,  $f_1(0, y) = 0$ ,  $f_1(x, 0) = 0$ ;  $f_2(x, y) = D(x) + D(y)$ ;

$0 \leq x, y \leq 1$ . 15.2.  $f(x, y) = D(x) + D(y)$ ,  $g(x, y) = -D(x) - D(y)$ , (P):

$0 \leq x, y \leq 1$ . 15.3.  $f(x, y) = D(x)D(y) - \frac{1}{2}$ ,  $|f(x, y)| = \left| D(x)D(y) - \frac{1}{2} \right| \equiv \frac{1}{2}$ , (P):

$0 \leq x, y \leq 1$ . 15.4.  $P(x, y) = \operatorname{sgn} y$ , (D):  $-1 \leq x, y \leq 1$ . 15.5.  $P(x, y) = R(x)$ ,

$Q(x, y) = R(y)$ , (D):  $0 \leq x, y \leq 1$ . 15.6.  $f(x, y) = D(\sqrt{x^2 + y^2})$ ,  $D(t)$  — функция

Дирихле, (D):  $x^2 + y^2 \leq 1$ , перейти к полярным координатам. 16.2.  $x = u$ ,

$y = v$ ,  $z = (u^2 + v^2)D(u + v)$ ,  $(\Delta)$ :  $-1 \leq u, v \leq 1$ , существует касательная плоскость  $z = 0$  в точке  $M_0(0, 0, 0)$ . 16.3.  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = D(u) + D(v)$ ,  $(\Delta)$ :  $-1 \leq u, v \leq 1$ , касательная плоскость не существует ни в одной точке.

16.4.  $A = -\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ ,  $B = -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ ,  $C = 1$ ; не существуют даже пределы

$\lim_{u \rightarrow 0, v \rightarrow 0} A$  и  $\lim_{u \rightarrow 0, v \rightarrow 0} B$ . 16.6.  $(S)$ :  $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = |u| + |v|$ ,  $(\Delta)$ :  $|u| + |v| \leq 1$ .

16.7.  $(S)$ :  $x = u^3$ ,  $y = v^3$ ,  $z = u^3 + v^3$ ,  $(\Delta)$ :  $-1 \leq u, v \leq 1$ ,  $S = 4\sqrt{3}$ . 16.9.  $D = 4$ .

17.3.  $f(x, y, z) = D(x) + D(y) + D(z)$ ,  $g(x, y, z) = -f(x, y, z)$ ;  $f(x, y, z) \equiv 0$ ,  $g(x, y, z) = \begin{cases} 4, & \text{если } z \geq 1/2, \\ -2, & \text{если } z < 1/2; \end{cases}$   $f(x, y, z) = 2D(x) \cdot D(y) \cdot D(z) - 1$ ; для всех трех

случаев  $(V)$ :  $0 \leq x, y, z \leq 1$ . 17.4.  $f(x, y, z) = R(x)R(y)R(z)$ . 17.5. Вписать шар в куб  $-1 \leq x, y, z \leq 1$ . Использовать для этого куба процедуру построения множества  $M$  из примере 17.7. Рассматривать на каждом шаге  $n$  только вновь построенные точки  $M$ , которые являются внутренними для разности между исходным шаром и уже удаленными открытыми шарами. Строить с центрами в этих точках удаляемые открытые шары (не пересекающиеся с ранее удаленными, можно одного радиуса) суммарного объема, меньшего  $n$ -го

члена положительного ряда, сходящегося к  $\varepsilon$ . 17.6.  $\begin{cases} x = 2\xi - \eta - \zeta, \\ y = -\xi + 2\eta - \zeta, \\ z = -\xi - \eta + 2\zeta. \end{cases}$

17.7.  $f(x, y, z) = R(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ ,  $(D)$ :  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , перейти к сферическим координатам  $\rho$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $(\Delta)$ :  $0 \leq \rho \leq 1$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. В 2 т. – М.: Наука, 1964.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3 т. – М.: Высшая школа, 1988.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа. В 2 т. – М.: Наука, 1988.
5. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: ООО «Издательство Астрель», 2002.
6. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – М.: Дрофа, 2003.
7. Титчмарш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. – М.: Наука, 1969.
9. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного, ч. 1–2. – М.: Наука, 1969.
10. Кротов Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М.: Постмаркет, 2000.
11. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
12. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002.

# УКАЗАТЕЛЬ ИЗБРАННЫХ ПРИМЕРОВ И КОНТРПРИМЕРОВ

## 1. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

|                                                                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.4. Последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ , такие, что $x_n > y_n$ , но $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ..... | 11 |
| 1.5. Счетное множество бесконечно малых последовательностей, сумма которых – бесконечно малая последовательность.....                                 | 11 |
| 1.12. Бесконечная последовательность вложенных незамкнутых промежутков, не имеющих общей точки.....                                                   | 13 |
| 1.14. Последовательность, частичные пределы которой – все целые числа.....                                                                            | 14 |
| 1.15. Последовательность, частичные пределы которой – все числа из отрезка $[0, 1]$ ...                                                               | 14 |
| 1.16. Последовательность, частичные пределы которой – все действительные числа...                                                                     | 15 |
| 1.21. Функции, не имеющие пределов в отдельной точке или всюду.....                                                                                   | 17 |
| 1.22. Функция, имеющая предел только в одной точке.....                                                                                               | 18 |
| 1.23. Функция, имеющая предел только при $x \rightarrow +\infty$ .....                                                                                | 18 |
| 1.26. Счетное множество бесконечно малых функций, сумма которых есть функция бесконечно малая.....                                                    | 19 |
| 1.29. Всюду немонотонная ограниченная функция, имеющая предел.....                                                                                    | 21 |

## 2. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

|                                                                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1. Функция, непрерывная только в одной точке.....                                                                                                       | 22 |
| 2.3. Функция, имеющая в любом интервале бесконечное число точек разрыва и точек непрерывности.....                                                        | 24 |
| 2.4. Непрерывная функция такая, что стремлению в данной точке приращения $\Delta y$ к нулю не соответствует стремление к нулю приращения $\Delta x$ ..... | 25 |
| 2.6. Разрывные функции, суперпозиция которых непрерывна.....                                                                                              | 26 |
| 2.7. Всюду непрерывная и всюду разрывная функции, суперпозиция которых всюду непрерывна.....                                                              | 26 |
| 2.8. Две всюду разрывные функции, суперпозиция которых всюду непрерывна.....                                                                              | 27 |
| 2.10. Разрывная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение первой теоремы Больцано–Коши.....                         | 27 |
| 2.15. Функция, определенная на отрезке и принимающая на его концах различные значения, а внутри отрезка – все промежуточные значения, но разрывная.....   | 28 |
| 2.16. Функция, которая не является непрерывной и монотонной, но имеет однозначную обратную функцию.....                                                   | 29 |
| 2.17. Функция, всюду немонотонная и всюду разрывная, имеющая однозначную обратную функцию.....                                                            | 29 |
| 2.19. Разрывная в одной внутренней точке отрезка функция, для которой не выполняется заключение первой теоремы Вейерштрасса.....                          | 30 |
| 2.23. Функция, определенная и непрерывная на интервале, для которой не выполняется заключение второй теоремы Вейерштрасса.....                            | 31 |

|                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.24. Функция, определенная и непрерывная на полуинтервале, для которой не выполняется заключение теоремы Кантора..... | 31 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

### 3. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

|                                                                                                                                                                  |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1. Функция, имеющая производную только в одной точке.....                                                                                                      | 34 |
| 3.3. График функции, имеющий касательную только в одной точке.....                                                                                               | 36 |
| 3.5. Функция $f(x)$ , для которой нарушены условия теоремы о существовании обратной функции, но существует обратная функция с производной, равной $1/f'(x)$ .... | 38 |
| 3.6. Функция, имеющая производную только в одной точке и непрерывная только в этой точке.....                                                                    | 39 |
| 3.8. Функция, имеющая бесконечную производную в точке и разрыв в этой точке.....                                                                                 | 39 |
| 3.12. Функции с бесконечными производными, для которых неприменимо правило $(u \pm v)' = u' \pm v'$ .....                                                        | 41 |
| 3.13, 3.14. Функции, одна из которых имеет бесконечную производную, для которых неприменимо (применимо) правило $(uv)' = u'v + uv'$ .....                        | 41 |
| 3.15. Функции, одна или обе из которых нигде не имеют производной, но суперпозиция которых всюду дифференцируема.....                                            | 42 |
| 3.16. Функция, имеющая дифференциал только в одной точке.....                                                                                                    | 43 |
| 3.17. Функция, имеющая бесконечную производную в точке и недифференцируемая в этой точке.....                                                                    | 43 |
| 3.18. Функция, не имеющая в точке производную заданного порядка.....                                                                                             | 44 |
| 3.19. Функция, нигде не имеющая производную заданного порядка.....                                                                                               | 45 |

### 4. ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

|                                                                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1. Функция, которая имеет конечную положительную производную в точке, но не возрастает монотонно в окрестности этой точки.....                                | 47 |
| 4.3, 4.4. Функции, имеющие нулевую производную в точке, в которой не достигается их наибольшее (наименьшее) значение.....                                       | 49 |
| 4.7. Функция, не имеющая производной во внутренней точке отрезка, для которой не выполняется заключение теоремы Дарбу.....                                      | 50 |
| 4.11, 4.12. Функции, не имеющие производной в одной точке интервала, для которых не выполняется заключение теоремы Ролля.....                                   | 51 |
| 4.15. Функция, имеющая разрыв в одной точке отрезка, для которой не выполняется заключение теоремы Лагранжа.....                                                | 52 |
| 4.20, 4.21. Имеющие бесконечные (нулевые) производные в одной точке интервала функции $f(x)$ и $g(x)$ , для которых не выполняется заключение теоремы Коши..... | 54 |
| 4.22, 4.23. Имеющие бесконечные (нулевые) производные в одной точке интервала функции $f(x)$ и $g(x)$ , для которых заключение теоремы Коши выполняется.....    | 56 |

### 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

|                                                                                                                                                            |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.11. Ограниченная функция, не имеющая минимумов и максимумов.....                                                                                         | 62 |
| 5.12. Функция, точки строгих максимумов и минимумов которой находятся в любом интервале числовой оси.....                                                  | 62 |
| 5.13. Функция, стационарная точка которой не является точкой экстремума.....                                                                               | 63 |
| 5.14. Функция, не имеющая в стационарной точке экстремума, но в любой окрестности этой точки имеющая бесконечное число строгих максимумов и минимумов..... | 63 |
| 5.18. Всюду имеющая конечную производную функцию, у которой строгий минимум не устанавливается ни одним из трех правил исследования на экстремум.....      | 66 |
| 5.19. Функции, к которым применимо только первое правило исследования на экстремум.....                                                                    | 67 |
| 5.20. Функция, к которой применимы только первое и третье правила исследования на экстремум.....                                                           | 67 |
| 5.21. Всюду имеющая производную функция, к которой применимо только первое правило исследования на экстремум.....                                          | 67 |

|                                                                                                                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.22. Имеющая производные до порядка $2n$ включительно функция, к которой применимо только первое правило исследования на экстремум.....                                      | 68 |
| 5.30. Всюду разрывная функция, которая не имеет максимального и минимального значений ни на одном, сколь угодно малом, отрезке числовой оси.....                              | 71 |
| 5.31. Выпуклая (вогнутая) функция, имеющая точки разрыва на концах отрезка.....                                                                                               | 72 |
| 5.32. Строго выпуклая (строго вогнутая) функция, имеющая точки разрыва на концах отрезка.....                                                                                 | 72 |
| 5.41. Кривая, имеющая точку перегиба по первому определению, но не по второму....                                                                                             | 76 |
| 5.42. Кривая, имеющая точку перегиба по второму определению, но не по первому....                                                                                             | 76 |
| 5.44. Функция $f(x)$ такая, что $f''(0) = 0$ , но ее график не имеет точки перегиба.....                                                                                      | 77 |
| 5.45, 5.46, 5.47. Функции, к которым неприменимы различные правила исследования на точку перегиба.....                                                                        | 78 |
| 5.48. Функции $f(x)$ и $g(x)$ , имеющие производные только в точке $x = a$ , для которых применима теорема 1 о раскрытии неопределенностей, но неприменимы теоремы 2 и 3..... | 79 |
| 5.49. Функции $f(x)$ и $g(x)$ , имеющие конечные производные в $(a, b)$ , $g'(x) \neq 0$ , для которых неприменимы теоремы 1, 2 и 3 о раскрытии неопределенностей.....        | 80 |
| 5.50. Функции $f(x)$ и $g(x)$ , имеющие конечные производные в $[a, b]$ , для которых применима теорема 1 о раскрытии неопределенностей, но неприменимы теоремы 2 и 3....     | 80 |
| 5.51. Функции $f(x)$ и $g(x)$ , всюду бесконечно дифференцируемые, для которых неприменимы теоремы 1, 2 и 3 о раскрытии неопределенностей.....                                | 80 |
| 5.52. Функции $f(x)$ и $g(x)$ , всюду бесконечно дифференцируемые, для которых неприменима теорема 4 о раскрытии неопределенностей.....                                       | 81 |

## 6. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

|                                                                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 6.1. Функция, у которой существуют и равны пределы по всем направлениям в точке, но предела в ней не существует.....                                      | 83 |
| 6.2–6.7. Примеры функций, иллюстрирующие все возможные варианты существования и несуществования двойного предела и соответствующих повторных пределов.... | 85 |
| 6.8. Функция, у которой нигде не существует двойного предела, но всюду существуют оба повторных равных предела.....                                       | 87 |
| 6.9. Функция двух переменных, непрерывная только в одной точке.....                                                                                       | 88 |
| 6.11. Функция трех переменных, непрерывная по каждому из них и по их парным совокупностям в своей точке разрыва.....                                      | 89 |
| 6.12. Непрерывная функция, бесконечно малому приращению которой соответствуют приращения переменных, большие единицы.....                                 | 90 |
| 6.14. Непрерывная функция двух переменных, которая является суперпозицией всюду разрывных функций.....                                                    | 91 |

## 7. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

|                                                                                                                                                                                                |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.1. Функция, имеющая частные производные только в одной точке.....                                                                                                                            | 94  |
| 7.3. Функция, частные производные которой разрывны в точке, недифференцируемая в этой точке.....                                                                                               | 95  |
| 7.4. Всюду дифференцируемая функция, имеющая разрывные в точке частные производные.....                                                                                                        | 96  |
| 7.5. Дифференцируемая в точке функция, про которую нельзя утверждать, что ее частные производные существуют в некоторой окрестности этой точки.....                                            | 97  |
| 7.6. Функция, дифференцируемая в точке, не имеющая ни в какой другой точке частных производных.....                                                                                            | 98  |
| 7.7. Функция, дифференцируемая только в одной точке и непрерывная только в ней....                                                                                                             | 98  |
| 7.11. Суперпозиция функции $u(x, y, z)$ , имеющей частные производные, разрывные в точке, и функций $x(t)$ , $y(t)$ , $z(t)$ , для которой $u'_i \neq u'_x x'_i + u'_y y'_i + u'_z z'_i$ ..... | 100 |
| 7.14. Функция 2-х переменных, имеющая полный дифференциал в одной точке.....                                                                                                                   | 102 |



|                                                                                                                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.15. Функция двух переменных, график которой имеет касательную плоскость только в одной точке.....                                                                                                     | 104 |
| 7.16. Функция двух переменных, имеющая полный дифференциал только в одной точке, при которой выполняется инвариантность формы первого дифференциала.....                                                | 105 |
| 7.18. Непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y)$ и область $D$ такие, что $f'_y(x, y) = 0$ внутри $D$ , но функция меняется при изменении $y$ в $D$ .....                                            | 108 |
| 7.19. Функция трех переменных, для которой существует производная в точке по любому направлению, но функция недифференцируема в этой точке.....                                                         | 109 |
| 7.21. Всюду разрывная функция, имеющая во всех точках, за исключением счетного их множества, производную по всем направлениям, за исключением счетного их (направлений) множества.....                  | 110 |
| 7.22, 7.27. Функция $f(x, y)$ , имеющая: $f'_x$ только на оси $Oy$ , $f'_y$ только на оси $Ox$ , $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ только в точке $(0, 0)$ ; и $f''_{xy}(0, 0) = f''_{yx}(0, 0)$ .....            | 112 |
| 7.25, 7.26. Функции, смешанные частные производные которых имеют разрывы в точке и не равны в этой точке.....                                                                                           | 113 |
| 7.28. Функция, у которой частные производные не везде существуют в любой окрестности точки, но существуют в этой точке и равны смешанные производные.....                                               | 114 |
| 7.30. Функция $f(x, y)$ , имеющая всюду плотные на плоскости $Oxy$ множества точек строгих максимумов и нестрогих минимумов.....                                                                        | 116 |
| 7.31. Непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y)$ , имеющая бесконечно много строгих максимумов, но ни одного минимума.....                                                                           | 116 |
| 7.33. Непрерывно дифференцируемая функция $f(x, y)$ , не имеющая в точке экстремума, но на любой прямой, проходящей через нее, имеющая строгий минимум.....                                             | 117 |
| 7.37, 7.38. Имеющие строгие минимумы функции двух переменных, к которым необходимое условие экстремума неприменимо.....                                                                                 | 119 |
| 7.39. Функция $f(x, y)$ , имеющая строгий минимум, к которой неприменимы достаточные условия экстремума.....                                                                                            | 120 |
| 7.48. Уравнение $F(x, y) = 0$ , определяющее $n$ функций.....                                                                                                                                           | 124 |
| 7.51. Функция $F(x, y)$ , которая не является непрерывной в любой окрестности точки, при этом уравнение $F(x, y) = 0$ однозначно определяет функцию $y = f(x)$ в данной окрестности.....                | 126 |
| 7.58. Функция $F(x, y, z)$ , которая не является непрерывной в любой окрестности точки, при этом уравнение $F(x, y, z) = 0$ однозначно определяет функцию $z = h(x, y)$ в этой окрестности.....         | 129 |
| 7.70. Функции $F(x, y, z)$ и $G(x, y, z)$ , для которых определитель $J(0, 0, 0) = 0$ , а система уравнений однозначно определяет функции $y = f(x)$ , $z = g(x)$ в окрестности точки $(0, 0, 0)$ ..... | 136 |

## 8. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

|                                                                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8.1. Функция, не имеющая первообразной.....                                                                                                                  | 138 |
| 8.2. Функция с разрывом второго рода, не имеющая первообразной.....                                                                                          | 138 |
| 8.4. Промежутки, на которых справедливы некоторые табличные интегралы.....                                                                                   | 140 |
| 8.5. Имеющая бесконечную производную функция $\omega(t)$ , при которой оказалась справедлива замена переменной в интеграле.....                              | 140 |
| 8.9. Некорректность определения интеграла, при котором отрезок разбивается на равные отрезки, а значения функции берутся в серединах отрезков разбиения..... | 143 |
| 8.13. Функция, имеющая точки разрыва плотно на отрезке, интегрируемая на нем.....                                                                            | 146 |
| 8.14. Функция, множество точек разрыва которой на отрезке имеет мощность континуума, интегрируемая на этом отрезке.....                                      | 147 |

|                                                                                                                                                                                                                    |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 8.15. Две функции, каждая из которых интегрируема, но их суперпозиция не интегрируема.....                                                                                                                         | 149 |
| 8.23. Функция, имеющая первообразную на отрезке, но неинтегрируемая на нем.....                                                                                                                                    | 153 |
| 8.30. Две функции $f(x)$ , к которым по разным причинам неприменима формула Ньютона–Лейбница при обычных предположениях.....                                                                                       | 156 |
| 8.32. Функция $f(x)$ , имеющая разрыв первого рода, к которой применима формула Ньютона–Лейбница при более общих предположениях.....                                                                               | 157 |
| 8.33. Функция $f(x)$ , имеющая разрыв второго рода, к которой неприменима формула Ньютона–Лейбница и при более общих предположениях.....                                                                           | 158 |
| 8.34. Функция $f(x)$ , для которой условие $F'(x) = f(x)$ не выполняется в счетном множестве точек, расположенных всюду плотно, однако применима формула Ньютона–Лейбница.....                                     | 158 |
| 8.35, 8.36. Интегралы, к которым при замене переменной $x = \varphi(t)$ , где функция $\varphi(t)$ имеет разрывы, неприменима формула $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ ..... | 159 |
| 8.37, 8.38. Интегралы, в которых функция $f(x)$ имеет разрывы и к которым при замене переменной $x = \varphi(t)$ применима формула $\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ .....    | 160 |
| 8.42. Интеграл, к которому при нарушении непрерывности $u'$ во внутренней точке отрезка $[a, b]$ применимо интегрирование по частям: $\int_a^b u dv = uv _a^b - \int_a^b v du$ .....                               | 163 |

## 9. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

|                                                                                                                                                                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.1. Область с границей бесконечной длины, но квадратуемая.....                                                                                                                                                   | 165 |
| 9.4. Ограниченное неквадрируемое множество точек.....                                                                                                                                                             | 168 |
| 9.6. Квадрируемое множество точек, заданное функцией, имеющей плотное множество точек разрыва.....                                                                                                                | 170 |
| 9.7. Кривые, имеющие ненулевую площадь.....                                                                                                                                                                       | 171 |
| 9.16. Применение теоремы об аддитивности площади для определения площади ковра Серпинского.....                                                                                                                   | 176 |
| 9.19. Применение критерия 3 к установлению квадратуемости снежинки Коха.....                                                                                                                                      | 178 |
| 9.24. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ( $0 \leq f_1(x) < f_2(x)$ ) на $[0, 1]$ , для которых существует $\int_0^1 (f_2(x) - f_1(x)) dx = 1$ , но множество точек, определяемое этими функциями, не имеет площади..... | 184 |
| 9.29. Ограниченное некубируемое множество точек.....                                                                                                                                                              | 188 |
| 9.49. Ограниченная неспрямляемая кривая.....                                                                                                                                                                      | 200 |
| 9.50. Ограниченная кривая, любая часть (дуга) которой не является спрямляемой.....                                                                                                                                | 201 |
| 9.55. Спрямляемая кривая, заданная явным уравнением $y = f(x)$ , $x \in [x_0, X]$ , для вычисления длины которой неприменима формула $s = \int_{x_0}^X \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ .....                             | 204 |

## 10. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

|                                                                                                                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.2. Расходимость гармонического ряда.....                                                                                                                                                  | 207 |
| 10.4. Пример расходящегося ряда с несуществующей суммой.....                                                                                                                                 | 208 |
| 10.9. Расходящиеся ряды, для которых выполняется необходимый признак.....                                                                                                                    | 210 |
| 10.12. Бесконечная последовательность расходящихся рядов $\sum a_n^{(k)}$ , $k = 1, 2, \dots$ , таких, что $a_n^{(1)} = 1/n$ и $a_n^{(k+1)} = o(a_n^{(k)})$ при $n \rightarrow \infty$ ..... | 212 |
| 10.15–10.18. Ряды, для которых применимы и неприменимы некоторые из трех теорем о сравнении рядов.....                                                                                       | 213 |
| 10.19. Ряд, для которого неприменим признак Коши сходимости.....                                                                                                                             | 215 |
| 10.22. Ряд, к которому неприменим признак Коши в предельной форме из-за несуществования предела, но применим собственно признак Коши.....                                                    | 217 |

|                                                                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.26. Ряд, расходимость которого устанавливается признаком Даламбера, но не устанавливается тем же признаком в предельной форме.....                               | 219 |
| 10.27. Ряд, сходимость которого не устанавливается признаком Даламбера (включая его предельную форму), но устанавливается признаком Коши.....                       | 219 |
| 10.28. Применимость признака Раабе к установлению расходимости гармонического ряда.....                                                                             | 220 |
| 10.30. Ряд, сходимость которого не устанавливается признаком Раабе.....                                                                                             | 220 |
| 10.34. Ряд, к которому признаки Коши и Даламбера неприменимы, но применим признак Раабе даже в предельной форме.....                                                | 222 |
| 10.36. Ряд, зависящий от параметров, к которому не при всех значениях параметров применим признак Раабе, но при всех их значениях применим признак Бертрانا.....    | 223 |
| 10.37. Ряд, сходимость которого устанавливается признаком Коши, но не устанавливается признаками Раабе и Бертрана.....                                              | 224 |
| 10.38. Сходящийся ряд, к которому неприменимы признаки Раабе и Бертрана.....                                                                                        | 224 |
| 10.39, 10.40. Снятие условия монотонного убывания функции в интегральном признаке Маклорена–Коши, приведшее к неправильным выводам.....                             | 225 |
| 10.46, 10.47. Ряды (расходящийся и сходящийся), удовлетворяющие всем требованиям признака Лейбница, кроме знакопеременности.....                                    | 231 |
| 10.48, 10.49. Ряды (расходящийся и сходящийся), удовлетворяющие требованиям признака Лейбница, кроме монотонности убывания абсолютной величины членов.....          | 232 |
| 10.50–10.56. Примеры рядов вида $\sum a_n b_n$ (расходящихся и сходящихся), для которых выполняются и не выполняются условия признака Абеля сходимости рядов.....   | 233 |
| 10.57–10.63. Примеры рядов вида $\sum a_n b_n$ (расходящихся и сходящихся), для которых выполняются и не выполняются условия признака Дирихле сходимости рядов..... | 234 |
| 10.64, 10.65, 10.66. Расходящиеся ряды, которые не обладают свойством ассоциативности.....                                                                          | 236 |
| 10.67. Расходящийся ряд, перестановкой членов которого получен ряд сходящийся.....                                                                                  | 237 |
| 10.68. Перестановка членов не абсолютно сходящегося ряда, приводящая к ряду, не имеющему даже бесконечной суммы.....                                                | 238 |
| 10.69. Знакопеременный расходящийся ряд с общим членом, стремящимся к нулю, перестановка членов которого не может дать ряд с любой заданной суммой.....             | 239 |
| 10.70. Произведение неабсолютно сходящихся рядов, дающее расходящийся ряд.....                                                                                      | 240 |
| 10.71. Произведение двух расходящихся рядов, дающее абсолютно сходящийся ряд.....                                                                                   | 240 |
| 10.79. Бесконечное произведение $\prod (1 + a_n)$ и знакопеременный ряд $\sum a_n$ , которые сходятся (оба).....                                                    | 243 |
| 10.81. Бесконечное произведение, к которому неприменимо достаточное условие сходимости бесконечного произведения.....                                               | 245 |

## 11. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

|                                                                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.4, 11.5. Функциональный ряд, сходящийся неравномерно на некоторой области $D_1$ и равномерно на $D_2 \subset D_1$ .....                                          | 249 |
| 11.9. Функциональный ряд, для которого не существует мажоранта (сходящаяся).....                                                                                    | 253 |
| 11.10. Равномерно сходящийся функциональный ряд, для которого не существует мажоранта (сходящаяся).....                                                             | 253 |
| 11.11–11.14. Примеры рядов $\sum a_n(x)b_n(x)$ , сходящихся неравномерно (равномерно) при различных нарушениях условий признака Абеля равномерной сходимости.....   | 254 |
| 11.15–11.19. Примеры рядов $\sum a_n(x)b_n(x)$ , сходящихся неравномерно (равномерно) при различных нарушениях условий признака Дирихле равномерной сходимости..... | 258 |
| 11.22. Сходящийся ряд, составленный из непрерывных функций, сумма которого разрывна.....                                                                            | 263 |
| 11.23. Неравномерно сходящийся ряд, составленный из непрерывных функций, сумма которого непрерывна.....                                                             | 264 |

|                                                                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.24. Последовательность непрерывных функций, сходящаяся к разрывной предельной функции.....                                                                                                         | 265 |
| 11.25. Последовательность непрерывных функций, сходящаяся (неравномерно) к непрерывной предельной функции.....                                                                                        | 265 |
| 11.26, 11.27. Последовательности всюду разрывных функций, равномерно (неравномерно) сходящиеся к непрерывной функции.....                                                                             | 266 |
| 11.32. Ряд, составленный из непрерывных неотрицательных функций, имеющий разрывную сумму и сходящийся неравномерно.....                                                                               | 269 |
| 11.40. Неравномерно сходящийся ряд, для которого не выполним почленный переход к пределу.....                                                                                                         | 273 |
| 11.42. Неравномерно сходящаяся последовательность, для которой выполним почленный переход к пределу в любой точке.....                                                                                | 274 |
| 11.43, 11.44. Неравномерно сходящиеся ряды, для которых несправедливо (справедливо) почленное интегрирование.....                                                                                     | 275 |
| 11.46. Равномерно сходящийся ряд, члены и сумма которого имеют разрывы плотно на отрезке интегрирования и для которого справедливо почленное интегрирование....                                       | 278 |
| 11.48. Неравномерно сходящаяся последовательность, для которой предельный переход при интегрировании несправедлив.....                                                                                | 280 |
| 11.51, 11.52. Неравномерно сходящиеся последовательности производных, при которых предельный переход при дифференцировании справедлив (несправедлив).....                                             | 283 |
| 11.54, 11.55. Неравномерно сходящиеся ряды $\sum u'_n(x)$ , при которых почленное дифференцирование рядов $f(x) = \sum u_n(x)$ справедливо (несправедливо).....                                       | 286 |
| 11.56. Функция $f(x)$ , разложимая в ряд Тейлора в некотором полуинтервале, в любой точке которого не соблюдается условие $ f^{(n)}(x)  \leq L$ .....                                                 | 287 |
| 11.57. Функция $f(x)$ , для которой условие $ f^{(n)}(x)  \leq L$ не соблюдается на отрезке и которая не раскладывается в ряд Тейлора на этом отрезке.....                                            | 288 |
| 11.64. Две функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ , ряды Тейлора которых тождественны, но $f(x) = \varphi(x)$ только при $x = 0$ .....                                                                         | 292 |
| 11.68. Степенной ряд, для которого существует и конечен $\lim_{x \rightarrow R-0} \sum a_n x^n$ , но который расходится в точке $x = R$ .....                                                         | 294 |
| 11.69. Степенной ряд, перестановка членов которого, не нарушая его сумму внутри интервала сходимости, делает ее разрывной в точке $x = R$ .....                                                       | 295 |
| 11.73, 11.74, 11.75. Примеры всюду бесконечно дифференцируемых функций, для которых их ряды Тейлора, формально построенные, либо не сходятся к ним, либо вообще сходятся только в точке $x = 0$ ..... | 299 |

## 12. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

|                                                                                                                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 12.4. Сходящийся интеграл первого рода на $[1, +\infty)$ от функции $f(x)$ такой, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$ .....                           | 302 |
| 12.5. Сходящийся интеграл первого рода на $[0, +\infty)$ от функции, неограниченной на любом полуинтервале $[A, +\infty)$ , $A > 0$ .....                        | 303 |
| 12.12. Контрпример, опровергающий одну из альтернатив критерия Коши сходимости интеграла первого рода.....                                                       | 308 |
| 12.17. Функции $f(x)$ и $g(x)$ , при которых нарушаются все предположения признака Абеля сходимости, однако интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится..... | 311 |
| 12.21. Контрпримеры, в которых нарушаются отдельные предположения признака Дирихле, но интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.....                      | 313 |

- 12.26. Расходящийся несобственный интеграл второго рода на  $[0, 1]$  от неотрицательной функции  $f(x)$  такой, что точка  $x = 0$  особая, но  $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) \neq +\infty$  ..... 316
- 12.27. Расходящийся несобственный интеграл второго рода на  $[0, 1]$  от функции  $f(x)$  такой, что точка  $x = 0$  особая, и  $\lim_{\eta \rightarrow 0+0} \int_{\eta}^1 f(x) dx$  не существует ..... 317
- 12.28, 12.29. Сходящийся (расходящийся) несобственные интегралы второго рода, к которым неприменим признак сходимости 1 ..... 318
- 12.44. Две записи подынтегрального выражения, при которых применима и не применима формула интегрирования по частям для сходящегося несобственного интеграла ..... 328

### 13. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

- 13.6. Непрерывные функции  $f(x, y)$ , сходящиеся к своим непрерывным предельным функциям  $\varphi(x)$  неравномерно на  $X$  ..... 337
- 13.10, 13.11. Непрерывные по  $x$  функции  $f(x, y)$ , не монотонно возрастающие по  $y$ , равномерно (неравномерно) сходящиеся к непрерывной предельной функции ..... 339
- 13.13, 13.14. Функции  $f(x, y)$ , сходящиеся к предельной функции  $\varphi(x)$  неравномерно, для которых выполняется (не выполняется)  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \varphi(x) dx$  ..... 341
- 13.15. Всюду разрывная функция  $f(x, y)$ , при которой интеграл  $I(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  — непрерывная функция от  $y$  ..... 344
- 13.19, 13.20. Разрывные функции  $f(x, y)$ , для которых выполняется (не выполняется) равенство  $\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$  ..... 346
- 13.21, 13.22. Разрывные функции  $x = \alpha(y)$ ,  $x = \beta(y)$ , при которых функция  $I(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx$  непрерывна (разрывна) ..... 347
- 13.28. Равномерно сходящийся интеграл первого рода, который не мажорируется сходящимся интегралом ..... 352
- 13.40, 13.41. Расходящиеся интегралы  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ , при которых интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x, y) dx$  равномерно сходится (расходится) ..... 360
- 13.42, 13.43. Неограниченные функции  $g(x, y)$ , при которых равномерно сходится (расходится) интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) g(x, y) dx$  ..... 361
- 13.48. Равномерно сходящийся собственный интеграл, который не мажорируется сходящимся интегралом ..... 366
- 13.49, 13.50. Неравномерно сходящиеся к  $\varphi(x)$  функции  $f(x, y)$ , при которых выполняется (не выполняется)  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  ..... 367
- 13.51, 13.52.  $f(x, y)$  такие, что сходится неравномерно на  $Y$   $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  и выполняется (не выполняется)  $\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  ..... 369
- 13.56, 13.57. Функции  $f(x, y)$  такие, что сходится неравномерно, но непрерывен (разрывен) на отрезке интеграл  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$  ..... 374
- 13.62, 13.63. Разрывные функции  $f(x, y)$ , при которых равенство  $\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy$  выполняется (не выполняется) ..... 377

- 13.64. Функция  $f(x, y)$  такая, что неравномерно сходится на отрезке  $[c, d]$  интеграл  $I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ , но  $\int_c^d I(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy$  ..... 378
- 13.66, 13.67. Разрывные функции  $f(x, y)$ , при которых равенство  $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$  выполняется (не выполняется)..... 380
- 13.70, 13.71. Разрывные по  $x$  функции  $f(x, y)$ , при которых выполняется (не выполняется):  $I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$  ..... 383
- 13.72, 13.73. Функции  $f(x, y)$ , при которых  $f'_y(x, y)$  разрывна и выполняется (не выполняется):  $I'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$  ..... 384

#### 14. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

- 14.5. Задания кривой, при которых применима и неприменима формула  $\int_{(K)} f(x, y) ds = \int_{t_0}^T f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$  ..... 390
- 14.9. Возможность рассмотрения несобственного криволинейного интеграла по кривой бесконечной длины, его сведением к обыкновенному несобственному интегралу первого рода..... 393
- 14.14. Кривая бесконечной длины, по которой существуют интегралы второго рода.. 399
- 14.15. Функции  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ ,  $f(x, y)$ , при которых существует  $\int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt$ , но не существует  $\int_{(AB)} f(x, y) dx$  ..... 400
- 14.18. Возможность рассмотрения несобственного криволинейного интеграла (второго рода) по кривой бесконечной длины, его сведением к обыкновенному несобственному интегралу первого рода..... 402
- 14.20. Функции  $y = y(x)$  и  $f(x, y)$ , при которых существует  $\int_a^b f(x, y(x)) dx$ , но не существует  $\int_{(AB)} f(x, y) dx$  ..... 404
- 14.21. Криволинейный интеграл второго рода по кривой бесконечной длины, для которого непосредственно применима формула  $\int_{(AB)} f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y(x)) dx$  ..... 404
- 14.26. Функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , такие, что  $P dx + Q dy$  не является полным дифференциалом, но интеграл  $\int_{(AB)} P dx + Q dy$  не зависит от выбора пути..... 411
- 14.29. Разрывные функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  такие, что всюду  $P'_y = Q'_x$ , но  $P dx + Q dy$  не является полным дифференциалом..... 413
- 14.30, 14.31. Неодносвязная область  $(D)$ , в которой  $P'_y = Q'_x$  и  $P dx + Q dy$  не является (является) полным дифференциалом..... 414
- 14.34. Замкнутые контуры бесконечной длины со счетным множеством точек самопересечения, интегралы по которым равны нулю..... 418
- 14.36. Замкнутый контур, интеграл по которому равен нулю, точки самопересечения которого совпадают с канторовым множеством..... 419

#### 15. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

- 15.1. Нескорректность определения двойного интеграла, при котором в область вписывается система равных прямоугольников, а значения функции берутся в их центрах..... 423
- 15.2. Область интегрирования такая, что любое ее разбиение  $T$  с диаметром  $\lambda_T < 1/2$  содержит несвязные множества разбиения..... 424
- 15.3. Область (открытая, связная), замыкание которой несвязно..... 425

|                                                                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 15.6. Пример существования двойного интеграла от функции, имеющей разрывы на счетном множестве кривых.....                                                             | 427 |
| 15.7. Переопределение функции в счетном множестве точек, приводящее к несуществованию двойного интеграла.....                                                          | 428 |
| 15.10–15.14. Примеры функций $f(x, y)$ , иллюстрирующие все возможные варианты существования и несуществования двойного и повторных интегралов.....                    | 431 |
| 15.15. Функция $f(x, y)$ , для которой не существует двойной интеграл, но существуют оба повторных интеграла (неравных).....                                           | 434 |
| 15.16. Области, которые невозможно разбить на конечное число криволинейных трапеций.....                                                                               | 435 |
| 15.19. Область, которую невозможно разбить на конечное число криволинейных трапеций, но при которой применима формула Грина.....                                       | 438 |
| 15.20. Область, которая не разбивается на конечное число криволинейных трапеций и ограничена не кусочно-гладким контуром, но при которой применима формула Грина.....  | 439 |
| 15.21, 15.22. Функции $P$ , $Q$ и производные $P'_y$ , $Q'_x$ , для которых нарушаются условия непрерывности в $(D)$ и формула Грина выполняется (не выполняется)..... | 440 |

## 16. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ, ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

|                                                                                                                                                                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 16.5. Поверхность, при параметрическом задании которой $z'_u$ , $z'_v$ не существуют и нигде не имеющая касательной плоскости.....                                                                            | 450 |
| 16.6, 16.7. Поверхности: имеющая (и не имеющая) в своей особой точке касательную плоскость.....                                                                                                               | 451 |
| 16.8. Простая гладкая поверхность, заданная двумя способами, при одном соблюдается соответствие обходов контуров $(\lambda)$ на $(\Delta)$ и $(I)$ на $(S)$ , при другом – нет.....                           | 452 |
| 16.11. Некорректность определения площади поверхности как предела площадей, вписанных в нее многогранных поверхностей.....                                                                                    | 456 |
| 16.12. Непрерывная, простая, но всюду негладкая поверхность, имеющая площадь.....                                                                                                                             | 459 |
| 16.13. Поверхность, которую нельзя разложить на конечное число простых и гладких кусков.....                                                                                                                  | 461 |
| 16.16. Поверхность, для вычисления площади которой неприменима формула $S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$ в одной системе координат и применима в другой.....                                       | 464 |
| 16.23. Интеграл второго рода по стороне поверхности бесконечной площади.....                                                                                                                                  | 471 |
| 16.24. Контрпример, показывающий некорректность рассмотрения интеграла второго рода по односторонней поверхности.....                                                                                         | 472 |
| 16.25. Интеграл второго рода по стороне неограниченной поверхности.....                                                                                                                                       | 474 |
| 16.31. Квадрируемая поверхность $(S)$ , при которой существует интеграл $\int_{(L)} P dx + Q dy + R dz$ , но $\iint_{(S)} (Q'_x - P'_y) dx dy + (R'_y - Q'_z) dy dz + (P'_z - R'_x) dz dx$ не существует..... | 479 |
| 16.32. Неприменимость формулы Стокса к односторонним поверхностям – на примере листа Мебиуса.....                                                                                                             | 480 |

## 17. ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

|                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 17.1. Несуществование тройных интегралов в случае неограниченной области.....                                                     | 482 |
| 17.2, 17.3. Области, по которым можно интегрировать, но ограниченные не кусочно-гладкими поверхностями.....                       | 483 |
| 17.4. Интегрируемая функция с плотным в области интегрирования множеством точек разрыва – счетной совокупностью поверхностей..... | 484 |
| 17.5. Интегрируемая функция, множество точек разрыва которой состоит из континуума поверхностей.....                              | 485 |

|                                                                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 17.7–17.10. Примеры функций $f(x, y, z)$ , иллюстрирующие различные варианты существования и несуществования тройного и повторных интегралов.....                                        | 487 |
| 17.11. Области, для которых невозможен переход от тройного интеграла к повторному.....                                                                                                   | 492 |
| 17.13. Функции $P, Q, R$ , для которых формула Гаусса–Остроградского выполняется, хотя их множества точек разрыва плотны в области.....                                                  | 494 |
| 17.14. Функции $P, Q, R, P'_x, Q'_y, R'_z$ , для которых условие непрерывности нарушается в одной точке и формула Гаусса–Остроградского не выполняется.....                              | 494 |
| 17.15. Функции $P, Q, R$ , для которых $P'_x + Q'_y + R'_z = 0$ и $\iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy = 0$ , хотя их множества точек разрыва всюду плотны.....                           | 496 |
| 17.16. Функции $P, Q, R, P'_x, Q'_y, R'_z$ , для которых условие непрерывности нарушается в одной точке, $P'_x + Q'_y + R'_z = 0$ , но $\iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy \neq 0$ ..... | 496 |
| 17.17. Не пространственно односвязная область, при которой $P'_x + Q'_y + R'_z = 0$ , но $\iint_{(S)} Pdydz + Qdzdx + Rdx dy \neq 0$ .....                                               | 497 |
| 17.18. Не взаимно однозначное отображение $(\Delta)$ на $(D)$ , при котором формула $D = \iiint_{(\Delta)}  J(\xi, \eta, \zeta)  d\xi d\eta d\zeta$ не выполняется.....                  | 498 |
| 17.19. Область $(\Delta)$ , имеющая бесконечный объем, при которой формула $D = \iiint_{(\Delta)}  J(\xi, \eta, \zeta)  d\xi d\eta d\zeta$ выполняется.....                              | 498 |
| 17.20. Область $(\Delta)$ это все пространство $\xi\eta\zeta$ , а формула $D = \iiint_{(\Delta)}  J(\xi, \eta, \zeta)  d\xi d\eta d\zeta$ выполняется.....                               | 499 |
| 17.21. Неограниченные области $(\Delta)$ и $(D)$ , при которых формула $D = \iiint_{(\Delta)}  J(\xi, \eta, \zeta)  d\xi d\eta d\zeta$ выполняется.....                                  | 500 |

## 18. ДОПОЛНЕНИЕ. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ФУНКЦИЙ

|                                                                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 18.1. Функция $y = f(x)$ с графиком, всюду плотным на плоскости $Oxy$ .....                                                              | 503 |
| 18.2. Функция $y = f(x)$ , определенная на всей оси $Ox$ и принимающая в любом непустом интервале значения на всей оси $Oy$ .....        | 504 |
| 18.3. Непрерывная функция $y = f(x)$ , имеющая строгие минимумы и максимумы в любом интервале изменения аргумента.....                   | 505 |
| 18.4. Функция, имеющая строгие максимумы, точки разрыва, производную на множествах, плотных на отрезке.....                              | 508 |
| 18.5. Строго монотонная функция, имеющая нулевую производную и точки перегиба на множестве, плотном на $[0, 1]$ .....                    | 510 |
| 18.6. Дифференцируемая строго монотонная функция с производной, равной нулю, и точками перегиба на множестве меры, близкой к полной..... | 513 |
| 18.7. Некоторые функции, построенные с применением фракталов.....                                                                        | 516 |
| 18.8. Фрактальное построение всюду непрерывной, но нигде недифференцируемой функции.....                                                 | 519 |



*Учебное издание*

**Шибинский Владимир Михайлович**

**ПРИМЕРЫ И КОНТРПРИМЕРЫ  
В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА**

Редактор *Л.А. Савина*

Внешнее оформление *К.И. Мандель*

Технический редактор *Л.А. Маркова*

Корректор *Г.Н. Петрова*

Оригинал-макет *А.В. Шибинского*

Изд. № РЕНТ-490. Подп. в печать 05.11.07. Формат 60×88<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.

Бум. офсетная. Гарнитура «Ньютон». Печать офсетная.

Объем 33,32 усл. печ. л., 34,08 усл. кр.-отт.

Тираж 3000 экз. Заказ № 4072.

ОАО «Издательство «Высшая школа», 127994, Москва,  
Неглинная ул., 29/14, стр. 1.

Тел.: (495) 694-04-56.

<http://www.vshkola.ru>. E-mail: [info\\_vshkola@mail.ru](mailto:info_vshkola@mail.ru)

Отдел реализации: (495) 694-07-69, 694-31-47, факс: (495) 694-34-86.

E-mail: [sales\\_vshkola@mail.ru](mailto:sales_vshkola@mail.ru)

Отпечатано в ОАО «Ивановская областная типография».  
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.

E-mail: [091-018@rambler.ru](mailto:091-018@rambler.ru)

В.М. Шибинский

# ПРИМЕРЫ И КОНТРПРИМЕРЫ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

*Студентам, изучающим математику с интересом, и преподавателям математики, относящимся к своей работе творчески*

Простой пример может привести к пониманию сложной истины, простой контрпример способен подчеркнуть нетривиальные рассуждения, гипотезы и заблуждения. Казалось бы, примеры и контрпримеры должны стать эффективным инструментом в руках (точнее, в умах) преподавателей и студентов. Однако перегруженность учебных программ привела к нелучшей традиции: излагать материал в сжатой и канонизированной форме. Сделать, опираясь на примеры и контрпримеры, «шаг влево — шаг вправо», ответить на возникающие при обучении качественные вопросы, дотошно выяснить границы применимости понятий, теорем, правил и методов уже не хватает времени. Помочь преподавателям и студентам выйти за рамки отмеченной традиции призвано данное учебное пособие.

Предлагаемые примеры и контрпримеры могут выборочно использоваться на лекциях и практических занятиях по математическому анализу. В целом пособие может составить содержание отдельной дисциплины по выбору для студентов старших курсов.

ISBN 978-5-06-005774-4



9 785060 005774